

다항식 Type-2 TSK FLS 구조: 설계 및 분석

Polynomial Type-2 TSK FLS Architecture: Design and Analysis

김길성¹, 오성권¹

¹ 수원대학교 전기공학과
E-mail: ohsk@suwon.ac.kr

요 약

Type-2 퍼지 집합은 언어적인 불확실성을 다루기 위하여 Zadeh에 의해 제안되었고 Mendel과 Karnik에 의해 이론이 체계화 되었다. TSK 퍼지 로직 시스템(TSK Fuzzy Logic Systems; TSK FLS)은 Mamdani 모델과 함께 가장 널리 사용되는 퍼지 로직 시스템이다. 본 논문에서는 Type-2 퍼지 집합을 이용하여 전반부 멤버십 함수를 구성하고 후반부 다항식 함수를 상수와 1차식, 2차식으로 확장한 다항식 Type-2 TSK FLS 설계한다. 또한 가스로 공정 데이터에 응용하여 후반부 다항식의 변화에 따른 Type-2 TSK FLS의 특징을 비교 분석 할 뿐 만 아니라 테스트 데이터에 노이즈를 첨가하여 노이즈에 따른 Type-1 TSK FLS과 Type-2 TSK FLS의 특성을 분석한다.

Key Words : Type-2 Fuzzy Logic Systems, Fuzzy Logic Systems, Type-2 TSK Fuzzy Logic Systems, TSK Fuzzy Logic Systems, Fuzzy Modeling

1. 서 론

최근 Mendel과 Karnik은 Type-2 FLS에 대한 완벽한 이론을 정립하였다[1]. Type-2 FLS은 언어적인 불확실성을 다룰 수 있는 Type-1 FLS의 확장이다. Type-2 퍼지 집합은 General Type-2 퍼지 집합과 Interval Type-2 퍼지 집합으로 나눌 수 있다. General Type-2 퍼지 집합은 특정한 주 소속 정도(primary membership grade)에 해당하는 두 번째 소속 정도(secondary membership grade)가 0과 1사이의 소속 정도를 갖는 퍼지 집합이다. 이에 반하여 Interval Type-2 퍼지 집합은 secondary 소속 정도가 모두 1의 값을 갖는다. General Type-2 퍼지 집합을 사용하여 FLS을 설계할 경우는 아래와 같은 문제점을 갖는다 [2].

- Type-reduction이 과정이 매우 어렵다.
- t-norm연산(특히 product t-norm)을 수행할 때 계산 량이 매우 많아 응용이 힘들다.
- 알맞은 secondary 멤버십 함수를 선택하기 어렵다.

이와 같은 어려움들로 인하여 Interval

Type-2 퍼지 집합을 이용한 Interval Type-2 FLS이 많이 연구되고 있다. 본 연구에서는 Interval Type-2 퍼지 집합을 이용한 Interval Type-2 TSK FLS을 구현하고 이를 확장한 다항식 Interval Type-2 TSK FLS을 설계하고 노이즈 섞인 데이터에 대한 모델링 성능에 대하여 Type-1 TSK FLS과 비교한다.

2. Type-1 TSK FLS

Type-1 TSK FLS은 아래의 퍼지 규칙으로 표현된다.

$$R^l: \text{If } x_1 \text{ is } F_1^l \text{ and } \dots \text{ and } x_p \text{ is } F_p^l \text{ THEN } y^l = c_0^l + c_1^l x_1 + c_p^l x_p \quad (1)$$

여기서 $l = 1, \dots, M$ 이고 M 은 총 퍼지 규칙 수이다. $c_i^l (i=1, \dots, p)$ 는 p 번째 입력 x_p 의 계수이고 후반부 파라미터이다. y^l 은 l 번째 규칙의 출력이다. $F_i^l (i=1, \dots, p)$ 는 Type-1 퍼지 집합이다. 입력 $[x_1, \dots, x_p]$ 가 주어졌을 때 Type-1 TSK FLS의 최종 출력은 다음의 식 (2)와 같다.

$$y = \frac{\sum_{l=1}^M w^l y^l}{\sum_{l=1}^M w^l} \quad (2)$$

여기서 w^l 은 전반부 적합도이다.

3. Interval Type-2 TSK FLS

3.1. 규칙

Mendel은 Interval Type-2 TSK FLS의 3가지 모델을 제시 하였다[2]. 본 연구에서는 모든 불확실성이 전반부에서 발생하고 후반부는 1차식으로 표현되는 Interval Type-2 TSK FLS-Model II를 다루고 이는 아래의 퍼지 규칙으로 표현 된다

$$R^l: \text{If } x_1 \text{ is } \bar{F}_1^l \text{ and } \dots \text{ and } x_p \text{ is } \bar{F}_p^l \text{ THEN } y^l = c_0^l + c_1^l x_1 + c_p^l x_p \quad (2)$$

여기서 $\bar{F}_i^l (i=1, \dots, p)$ 는 Type-2 퍼지 집합이다. Interval Type-2 TSK FLS의 최종 출력은 아래의 식(3)과 같다.

$$Y_{TSK,2}(x) = [y_l, y_r] = \int_{f^l \in [\underline{f}^l, \bar{f}^l]} \dots \int_{f^M \in [\underline{f}^M, \bar{f}^M]} 1 / \frac{\sum_{i=1}^M f^i y^i}{\sum_{i=1}^M f^i} \quad (3)$$

비 퍼지화한 출력은 아래의 식(4)와 같다.

$$y_{TSK,2}(x) = \frac{y_l + y_r}{2} \quad (4)$$

3.2. 전반부 연산

l 번째 규칙의 전반부 적합도인 $f^l(x)$ 는 interval set이며 아래의 식 (5)로서 표현되고 식 (6), (7)로서 계산된다.

$$F^l(x) = [\underline{f}^l(x), \bar{f}^l(x)] \equiv [\underline{f}^l, \bar{f}^l] \quad (5)$$

$$\underline{f}^l(x) = \underline{\mu}_{\bar{F}_1^l}(x_1) \star \dots \star \underline{\mu}_{\bar{F}_p^l}(x_p) \quad (6)$$

$$\bar{f}^l(x) = \bar{\mu}_{\bar{F}_1^l}(x_1) \star \dots \star \bar{\mu}_{\bar{F}_p^l}(x_p) \quad (7)$$

\star 는 t -norm 연산자이고 본 연구에서는 product t -norm을 사용 한다. 이를 그림으로 표현하면 그림1과 같다.

3.2. 후반부 연산

Interval Type-2 TSK FLS의 후반부 연산은 전반부 적합도인 $f^l(x)$ 을 이용하여 식 (3)을 이용하여 최종 출력인 $[y_l, y_r]$ 을 구하는 과정

이다. y_r 은 M 개의 규칙이 존재할 때, $2M$ 개의 embedded 퍼지 집합 중 에서 무게 중심이 가장 큰 embedded 퍼지 집합의 무게 중심 값이 되고 y_l 은 가장 작은 무게 중심이다. Karnik과 Mendel은 $2M$ 번의 연산과정이 아닌 반복적인 연산을 통하여 무게 중심을 구하는 KM 알고리즘을 발표하였다[3]. 본 연구에서는 불확실성이 전반부에서만 발생하는 KM알고리즘의 특수한 경우를 통하여 $[y_l, y_r]$ 을 계산 하였다.

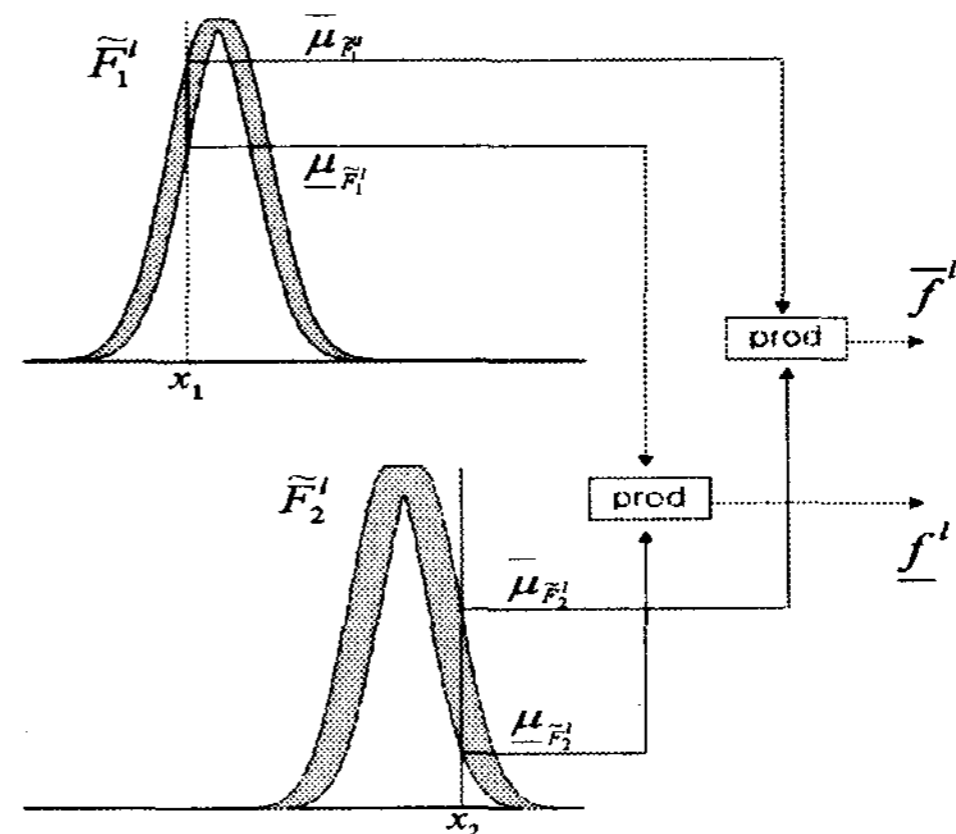


그림 1. Interval Type-2 TSK FLS의 전반부 연산

4. Polynomial Interval Type-2 TSK FLS

4.1. 구조

본 연구에서는 Interval Type-2 TSK FLS의 확장인 Polynomial Interval Type-2 TSK FLS을 설계한다. Polynomial Interval Type-2 TSK FLS은 아래의 퍼지 규칙으로 표현된다.

$$R^l: \text{If } x_1 \text{ is } \bar{F}_1^l \text{ and } \dots \text{ and } x_p \text{ is } \bar{F}_p^l \text{ THEN } y^l = g^l(x) \quad (8)$$

후반부 다항식인 $g^l(x)$ 는 상수항, 1차식, 2차식의 중의 한 가지 구조를 갖는다.

$$\text{Constant: } g^l(x) = a_0^l \quad (9)$$

$$\text{Linear: } g^l(x) = a_0^l + \sum_{j=1}^p a_j^l x_j \quad (10)$$

$$\text{Quadratic: } g^l(x) = a_0^l + \sum_{j=1}^p a_j^l x_j + \sum_{j=1}^p \sum_{k=j}^p a_{jk}^l x_j x_k \quad (11)$$

제안된 다항식 Type-2 TSK 모델의 최종 출력은 식 (12)와 같다.

$$Y_{P-TSK,2}(x) = [y_l, y_r] = \int_{f^1 \in [\underline{f}^1, \bar{f}^1]} \dots \int_{f^M \in [\underline{f}^M, \bar{f}^M]} 1 / \frac{\sum_{i=1}^M f^i g^i}{\sum_{i=1}^M f^i} \quad (12)$$

4.2. 파라미터 학습

본 연구에서의 멤버쉽 함수 형태는 가우시안 형태의 멤버쉽 함수를 사용하고 불확실한 중심을 갖는 Type-2 퍼지 집합을 사용한다. 이는 식 (13)과 그림 2로 표현된다.

$$\mu_A(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right] \quad m \in [m_1, m_2] \quad (13)$$

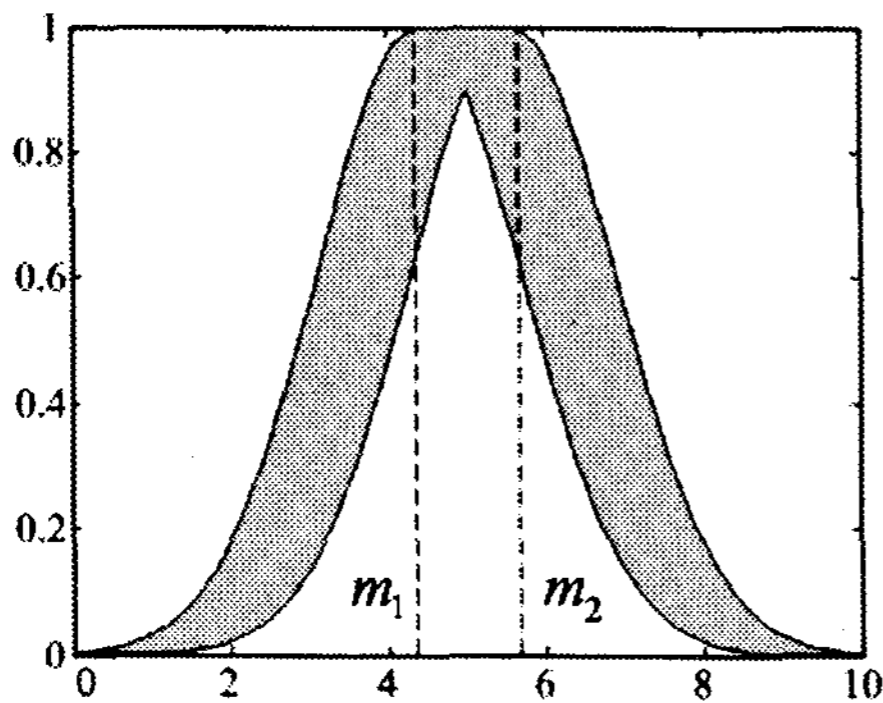


그림 2. uncertain mean을 갖는 가우시안 형태의 Type-2 퍼지 집합

4.2.1 전반부 파라미터 학습

본 연구에서는 전반부 파라미터로 m_l 과 m_r 를 back-propagation 방법으로 학습한다. 학습은 모든 입력 벡터 x 에 대하여 식 (14)의 오차를 최소화 하도록 진행된다.

$$e^{(t)} = \frac{1}{2} [D^{(t)} - Y_{TSK,2}^{(t)}(x)]^2 \quad (14)$$

여기서, $D^{(t)}$ 는 t번째 입력의 목적값(Desired value)이고 $Y_{TSK,2}^{(t)}(x)$ 는 t번째 입력의 Type-2 TSK FLS의 출력이다. 학습은 $Y_{TSK,2}^{(t)}$ 이 $[y_l, y_r]$ 의 값을 갖는 interval set이기 때문에 y_l 과 y_r 에 대하여 각각 학습이 이루어지며 primary 멤버쉽 함수의 중심이 불확실성을 가지므로 구간에 따라 오차식이 다르다. 임의의 멤버쉽 함수의 첫 번째 중심 m_{j1}^l 이 출력 y_r 에 영향을 주었다면 오차에 따른 m_{j1}^l 의 변화분(delta)은 식 (15)로 정의된다. 식 (15)에서 α 는 학습률을 $l(1, \dots, M)$ 은 l번째 규칙을 나타내며 $j(1, \dots, p)$ 는 입력벡터 x 의 j번째 원소를 나타낸다. \bar{f}^l 은 KM알고리즘 내에서 y_r 을 계산하는

데 영향을 준 \bar{f}^l 또는 f^l 중 하나를 나타낸다.

$$\Delta m_{j1}^l = -\alpha \frac{\partial e}{\partial m_{j1}^l} = \frac{1}{2} \alpha (D - Y_{TSK,2})(g^l - y_r) \cdot \frac{(x_j - m_{j1}^l)}{(\sigma_j^l)^2} \cdot \frac{\bar{f}^l g^l}{\sum_{i=1}^M \bar{f}^i} \quad (14)$$

본 연구에서는 입력공간을 균등하게 분할하고 분할된 공간의 중심에서 이웃하는 멤버쉽 함수가 만나도록 σ 를 고정 시킨 후 m_l 과 m_r 를 학습하여 전반부 파라미터들을 동조하였다.

4.2.2 후반부 파라미터 학습

본 연구에서 제안한 다항식 Interval Type-2 TSK FLS는 후반부의 구조가 상수, 1차식, 2차식 3가지의 경우 중 한가지로 결정된다. 후반부 다항식의 계수(후반부 파라미터)들은 전반부와 마찬가지로 back-propagation 방법을 사용하여 식 (14)의 오차식을 최소화 하도록 학습된다. 후반부가 상수항, 1차식, 2차식인 경우의 후반부 다항식은 식 (9), (10), (11)로 표현되어 지는 다항식의 상수항, 1차항, 2차항의 각각의 변화분(delta)은 아래의 식 (15), (16), (17)로 표현되며 2차식인 경우는 상수와 1차식의 변화분에 대하여도 모두 학습해야하며 마찬가지로 1차식인 경우 상수항에 대하여서도 학습을 진행하여야 한다.

$$\Delta a_0^l = -\alpha \frac{\partial e}{\partial a_0^l} = \alpha (D - Y_{TSK,2})(y_l + y_r) / 2 \quad (15)$$

$$\Delta a_j^l = -\alpha \frac{\partial e}{\partial a_j^l} = \alpha (D - Y_{TSK,2})(y_l + y_r) x_j / 2 \quad (16)$$

$$\Delta a_{jk}^l = -\alpha \frac{\partial e}{\partial a_{jk}^l} = \alpha (D - Y_{TSK,2})(y_l + y_r) x_j x_k / 2 \quad (17)$$

5. 실험

본 연구에서는 다항식 Interval Type-2 TSK FLS를 구현하고 전·후반부 파라미터들을 back-propagation 방법을 사용하여 동조하였다. 제안된 다항식 Interval Type-2 TSK FLS를 기존의 Type-1 TSK FLS과 성능을 비교 분석하기 위하여 가스로 공정 모델링에 응용하였다. 가스로 시계열 데이터의 입력 $u(t)$ 는 가스 흐름율이고 출력 $y(t)$ 는 이산화탄소 농도인 1입력 1출력의 데이터 296쌍으로부터 $u(t-3)$, $u(t-2)$, $u(t-1)$, $y(t-3)$, $y(t-2)$, $y(t-1)$ 의 6개의 입력 변수와 한 개의 출력 변수 $y(t)$ 를 설정하고 학습 데이터로 145개 테스트 데이터로서 각각 145개의 데이터 쌍을 사용한다. 입·출력 데이터 집합 $[u(t-3), y(t-1), y(t)]$ 이

외에서는 데이터 분포가 균일하지 못하고 흩어진 분포를 보여줌으로 모델링에 적절치 못하므로 본 연구의 실험에서는 $[u(t-3), y(t-1), y(t)]$ 의 입력 데이터 쌍을 사용한다. 또한 테스트에 랜덤 화이트 가우시안 노이즈를 첨가하여 테스트 데이터 100개를 구축하고 100번을 실험하여 평균과 표준편차를 구하였다. 실험에 사용된 파라미터 들은 다음의 표 1과 같다. PI와 EPI는 Mean Square Error를 사용하였고 실험 결과는 표 2와 같다.

표 1. 실험 파라미터

파라미터		값
Type-1 TSK FLS	멤버쉽함수 수	각 입력당 3개 / 2개
	학습 횟수	100
	학습률	[0.001 0.01]
	$[\sigma_1, \sigma_2]$	[1.178, 6.200]
Polynomial Type-2 TSK FLS	멤버쉽함수 수	각 입력당 3개 / 2개
	학습 횟수	300
	학습률	[0.0001 0.01]
	$[\sigma_1, \sigma_2]$	[1.178, 6.200]

학습 횟수 및 학습률은 Type-1 TSK FLS과 Interval Type-2 TSK FLS의 학습을 통해 동조되어야 하는 파라미터 수와 모델 구조가 틀리기 때문에 학습률과 학습 횟수는 서로 다르다.

표 2. 실험 결과

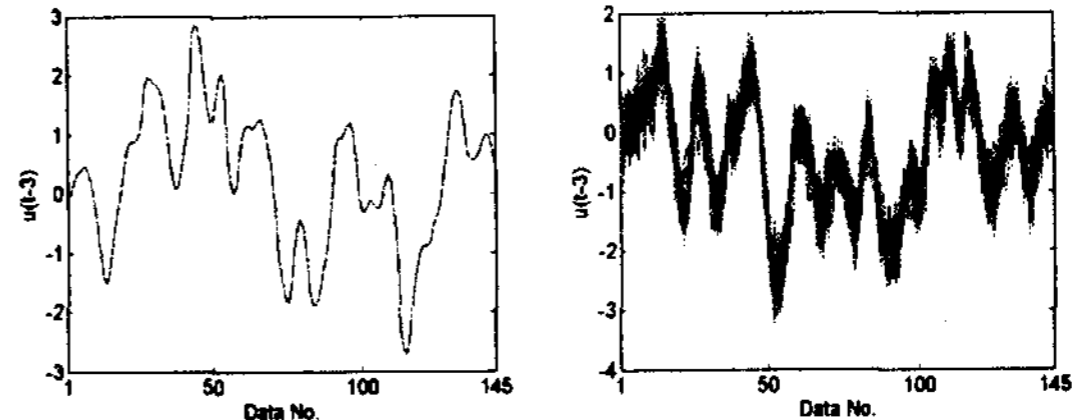
Type	Polynomial	PI	EPI
Type-1 TSK FLS	Constant	0.0506	0.865±0.08
	Linear	0.0187	0.725±0.08
	Quadratic	0.019	0.746±0.08
Type-2 TSK FLS	Constant	0.0290	0.753±0.07
	Linear	0.0190	0.722±0.07
	Quadratic	0.019	0.740±0.08

표 2의 실험 결과로 Interval Type-2 TSK FLS이 PI에서는 비슷한 성능을 보였으나 노이즈 섞인 테스트 데이터 집합에 대한 실험에서는 더 좋은 성능을 보임을 알 수 있다. 아래의 그림 3은 실험에 사용된 학습데이터와 테스트 데이터를 보여주며 그림 4는 Interval Type-2 TSK FLS의 출력을 보여준다. Type-2 TSK FLS시스템의 출력은 그림과 같이 interval set으로서 upper 출력과 lower 출력이 존재한다.

6. 결론

본 연구에서는 다항식 Interval Type-2 TSK FLS을 구현하고 비선형 공정 모델링에 응용하여 그 특성을 Type-1 TSK FLS과 비교 분석하였다. 제안된 다항식 Type-2 TSK

FLS은 노이즈 섞인 데이터에 Type-1 TSK FLS 보다 우수한 성능을 보임을 알 수 있었다. 본 연구에서는 back-propagation방법으로 전·후반부 파라미터 들을 동정 하였으나 보다 효율적인 파라미터 동정방법이 차후 연구과제로 남아있다.



(a) 학습 데이터 (b) 테스트 데이터
그림 3. 실험에 사용된 가스로 공정 데이터

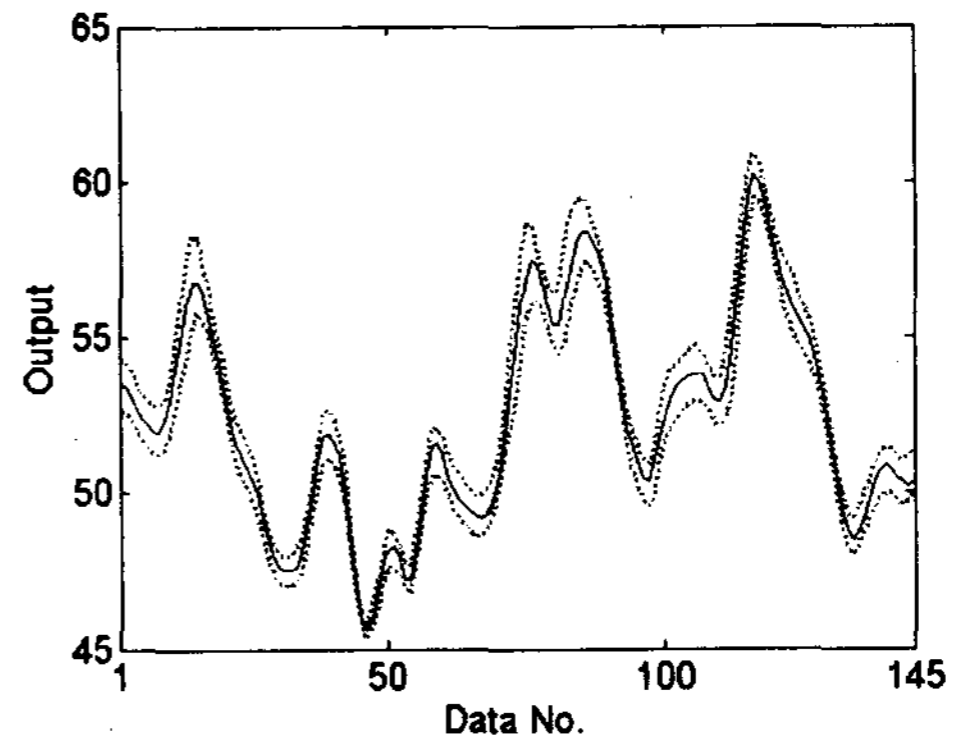


그림 4. Polynomial Interval Type-2 TSK FLS의 출력

감사의 글

이 논문은 2007년도 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (KRF-2007-313-D00710)

참고 문헌

- [1] N. Karnik, J. Mendel, and Q. Liang, "Type-2 Fuzzy Logic Systems," *IEEE Trans. On Fuzzy Systems*, Vol. 7, No. 6, pp. 643-658, 1999.
- [2] J. M. Mendel, "Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions," Prentice-Hall: NJ, 2001.
- [3] N. Karnik, J. Mendel, "Introduction to Type-2 Fuzzy Logic Systems," in *Proc. IEEE Fuzzy Conf.*, pp.915-920, Anchorage, AK, May. *Trans. On Fuzzy Systems*, Vol. 7, No. 6, pp. 643-658, 1999.