

고차전단변형이론에 기초한 4절점 가변형률 판 요소를 이용한 대칭 및 비대칭 적층 판의 유한요소해석

FE Analysis of Symmetric and Unsymmetric Laminated Plates by using 4-node Assumed Strain Plate Element based on Higher Order Shear Deformation Theory

이 상 진*
Lee, Sang-Jin

김 하 룡**
Kim, Ha-Ryong

요 약

대칭 및 비대칭 적층판의 거동을 연구하기 위하여 가변형률과 고차전단변형이론을 바탕으로 4절점 판 유한요소(HSA4)를 개발하였다. 개발된 판 요소는 적층 판의 두께 방향으로 나타나는 전단변형의 포물선 분포를 고려하기 위하여 Reddy의 고차전단변형이론을 도입하였다. 특히 전단변형을 고려한 판 요소에서 발생하는 전단과대현상을 해결하기 위하여 가변형률을 채용하였다. 본 연구를 통하여 개발한 판 요소는 고차전단변형이론을 도입하여 각 절점당 7개의 자유도를 가지므로 요소전체에 28개의 자유도로 판의 변형을 표현하게 된다. 개발된 유한요소의 성능을 검증하고 우수성을 보여주기 위해 다양한 두께를 가지는 대칭 및 비대칭 적층 판에 대한 수치해석을 수행하였으며 그 결과를 다른 고차전단변형이론에 의해 도출된 참고해들과 비교하였다.

Abstract

A 4-node assumed strain finite element based on higher order shear deformation theory is developed to investigate the behaviours of symmetric and unsymmetric laminated composite plates. The present element is based on Reddy's higher order shear deformation theory so that it can consider the parabolic distribution of shear deformation through plate thickness direction. In particular, assumed strain method is adopted to alleviate the shear locking phenomena inherited plate elements based on higher order shear deformation theory. The present finite element has seven degrees of freedom per node and denoted as HSA4. Numerical examples are carried out for symmetric and unsymmetric laminated composite plate with various thickness values. Numerical results are compared with reference solutions produced by other higher order shear deformation theories.

키워드 : 고차전단변형이론, 비대칭, 적층판, 유한요소, 정적응력해석, 가변형률

Keywords : higher order shear deformation theory, unsymmetric, laminated plate, finite element, static stress analysis, assumed strains

1. 서 론

적층 판은 높은 강성과 강도 그리고 탁월한 내구 성능을 가지고 있어 건축, 토목, 항공, 조선등과 같이 다양한 분야에서 널리 이용되고 있다. 이렇게 적층 판이 다양한 분야에서 폭 넓게 이용되면서 이와 관련한 연구가 가속화되고 적층판에 연관된 많은 의미 있

는 연구결과가 도출되어 왔다[1]. 그러나 적층 판에 사용되는 재료의 복잡성으로 인해 판의 정밀해석과 적층판의 정확한 거동을 파악하기 위한 새로운 해석 기법 개발에 대한 노력이 여전히 계속되고 있다. 적층 판의 해석은 초기에 고전 판 이론을 바탕으로 수행되었으나 점진적으로 두께방향의 전단변형의 영향을 고려하기 위한 두꺼운 판 이론이 도입되기 시작했다[1,2]. 초기에는 판의 두께방향에 대한 전단변형을 일차의 전단변형으로 표현하였으나 점차 적층 판의 전단변형을 실제와 유사하게 표현하기 위하여 고차 전단변형이론을 이용하기 시작했다. Reddy[1]는

* 교신저자, 정회원, 경상대학교 건축공학과 부교수, Ph.D
Tel: 055-751-6541

E-mail : lee@gnu.ac.kr

** 학생회원, 경상대학교 건축공학과 박사후보생
E-mail : khjjs1291@gnu.ac.kr

Taylor급수를 이용하여 면내 변위장에 고차의 항을 포함하는 고차전단변형이론을 개발하였다. Reddy의 연구결과를 필두로 이후에 점차 많은 연구자들이 고차전단변형이론을 바탕으로 적층판의 정적 또는 동적해석을 수행하였다[1]. 한편 국내에서는李와金[2]이 적층 판 유한요소해석의 정확도를 높이기 위하여 일차변형이론을 바탕으로 가변형률을 도입하여 대칭인 적층 판에 대한 연구를 수행한 바 있다.朴[3]은 이들의 연구결과를 비대칭 적층 판의 해석으로 확장하고 이를 위상최적화에 이용한 바 있다. 그리고 金 등[4]이 고차전단변형이론을 사용하여 FRP바닥판의 정적해석을 수행하였으나 국내에서는 적층 판에 대한 연구가 여전히 미진하다. 그리고 건축분야에서 나타나는 새로운 복합재료의 다양성으로 인해 고차전단변형이론에 대한 연구의 필요성이 더욱 증가하고 있다. 특히 金과李[5]의 연구에 따르면 전단변형률에 고차의 항을 고려하더라도 개발된 유한요소에는 전단과대현상이 발생하는 것으로 나타났다. 따라서 본 연구에서는 적층 판의 정확한 거동분석을 위해서 Reddy[1]에 의해 제시된 고차전단변형이론과 함께 가변형률을 도입하여 절점당 7개의 자유도를 가지는 4절점 판 요소를 개발하고 이를 이용하여 대칭 및 비대칭 적층 판의 정적응력해석을 수행하고자 한다.

2. 고차 전단 변형이론

2.1 변위장에 대한 정의

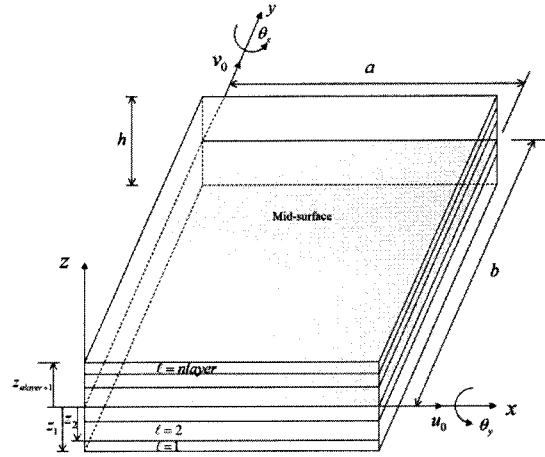
본 연구에 사용된 적층 판의 전체 영역(Ω)는 <그림 1>과 같이 중앙면을 기준으로 한 영역과 두께 방향의 영역으로 이루어져 있으며 아래와 같이 정의되어진다.

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid (x, y) \in \Omega_0, z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right] \right\} \quad (1)$$

여기서 Ω_0 는 중앙면 $x-y$ 평면을 나타내며 h 는 판의 두께를 나타낸다. 본 연구에서는 적층판에서 발생하는 전단변형을 고려할 때 고차항을 포함하여 변위장을 아래에 같이 정의하였다.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_x + z^3 \left(-\frac{4}{3h^2} \right) (\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}) \quad (2) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\theta_y + z^3 \left(-\frac{4}{3h^2} \right) (\theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned}$$

여기서 u_0, v_0 는 면내 변위를 w_0 는 중앙면 $x-y$ 평면에서의 처짐을 θ_x, θ_y 는 $x-z, y-z$ 면에 대한 회전변위를 나타내고 있으며 $\partial w_0/\partial x, \partial w_0/\partial y$ 는 변형된 중앙면에서의 기울기를 나타내고 있다.



<그림 2> 적층판의 형상과 부호규약

2.2 변형률의 정의

판에서 발생하는 변형률은 식(2)에 정의된 변위장을 변형률의 정의 $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ 에 대입하여 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \{\epsilon_p\} &= \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{(0)} \\ \epsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{(1)} \\ \epsilon_y^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} + c_1 z^3 \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{(3)} \\ \epsilon_y^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (3) \\ \{\epsilon_s\} &= \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \end{Bmatrix} + c_2 z^2 \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{(2)} \\ \gamma_{yz}^{(2)} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

여기서 ϵ_p 는 면내 변형률을 ϵ_s 는 면의 전단변형률을 나타내며 $c_1 = -4/3h^2, c_2 = -4/h^2$ 이다.

2.3 구성방정식

본 연구에서는 직교이방성물질을 도입하였으며 두께방향의 응력 σ_z 을 0으로 가정하였다. 적층 판에서 ℓ 번째 층의 재료축 좌표계 (1-2-3)에 대한 응력-변형률의 관계는 아래와 같다.

$$\{\sigma\}^{(\ell)} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix}^{(\ell)} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix}^{(\ell)} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix}^{(\ell)} \quad (4)$$

식(4)의 행렬 C_{ij} 성분은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, C_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \\ C_{12} &= \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = C_{21}, \\ C_{33} &= G_{12}, C_{44} = G_{13}, C_{55} = G_{23} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 E_1, E_2 는 재료축 1방향과 2방향에 대한 탄성 계수를 나타내고 G_{12}, G_{13}, G_{23} 은 전단탄성계수를 나타내며 ν_{12}, ν_{21} 은 프의송비를 나타낸다. 재료 좌표계에 준하는 응력과 변형률은 변환행렬 $[T]$ 를 사용하여 전체 좌표계에서의 응력과 변형률로 다음과 같이 표현되어진다.

$$\{\sigma\}^g = [T]\{\sigma\}^m, \{\varepsilon\}^g = [T]\{\varepsilon\}^m \quad (6)$$

여기서 위첨자 m 은 재료 축에 대한 국부 좌표계를 나타내고 g 는 전체 좌표계를 나타내고 있으며 변환행렬 $[T]$ 는 다음과 같다.

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & -2sc & 0 & 0 \\ sc & sc & c^2-s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c-s & \\ 0 & 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서 $c = \cos\theta, s = \sin\theta$ 로 θ 는 국부 좌표계와 전체 좌표계의 사이의 각도 값이다. 식(6)와 식(7)에 의해서 전체 좌표계의 응력-변형률관계는 아래와 같이 표현되어진다.

$$\begin{aligned} \{\sigma\}^g &= [T]\{\sigma\}^m = [T][C]\{\varepsilon\}^m \\ &= [T][C][T]^T\{\varepsilon\}^g \\ &= [Q]\{\varepsilon\}^g \end{aligned} \quad (8)$$

2.4 힘의 정의

적층 판에서 발생하는 힘의 성분은 제 2.3절에서 정의된 응력을 두께 방향으로 적분한 값으로 다음과 같이 N, M, P, Q, R항으로 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} N_x & M_x & P_x \\ N_y & M_y & P_y \\ N_{xy} & M_{xy} & P_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{nlayer} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \{1 \ z \ z^3\} dz \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{xz} & R_{xz} \\ Q_{yz} & R_{yz} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{nlayer} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \{1 \ z^2\} dz$$

여기서 $nlayer$ 는 적층 판의 층 개수를 나타내며 힘은 다음과 같이 표현되어진다.

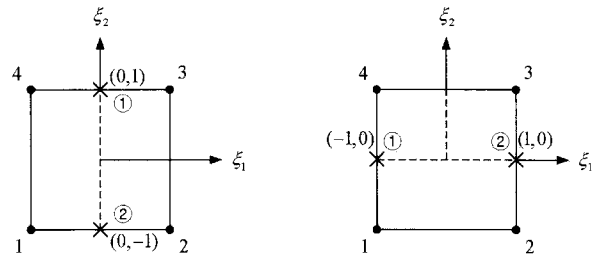
$$\begin{bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{P\} \\ \{Q\} \\ \{R\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & c_1[E] & 0 & 0 \\ [B] & [D] & c_1[F] & 0 & 0 \\ [E] & [F] & c_1[H] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [G] & c_2[S] \\ 0 & 0 & 0 & [S] & c_2[T] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^{(0)} \\ \varepsilon^{(1)} \\ \varepsilon^{(3)} \\ \gamma^{(0)} \\ \gamma^{(2)} \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서 식(10)의 행렬의 성분 $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}, G_{ij}, S_{ij}, T_{ij}$ 는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) & \quad (11) \\ &= \sum_{k=1}^{nlayer} \int_{z_k}^{z_{k+1}} [Q_{ij}]^k (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz \quad (i, j = 1, 3) \\ (G_{ij}, S_{ij}, T_{ij}) & \\ &= \sum_{k=1}^{nlayer} \int_{z_k}^{z_{k+1}} [Q_{ij}]^k (1, z^2, z^4) dz \quad (i, j = 4, 5) \end{aligned}$$

2.5 가변형률법

본 연구에서는 전단과대현상을 제거하기 위하여 가변형률을 도입하였다. <그림 2>에는 4절점 판 요소의 가변형률을 구하는데 이용된 표준점의 위치를 도시하고 있다.



<그림 2> 표준점의 위치: (좌) $\tilde{\varepsilon}_{31}$, (우) $\tilde{\varepsilon}_{32}$

회전단 변형률에 대한 4절점 판요소의 가변형률 $\tilde{\varepsilon}_{31}^{(a)}$ 와 $\tilde{\varepsilon}_{32}^{(a)}$ 는 아래와 같이 표현된다.

$$\tilde{\varepsilon}_{31}^{(a)} = \sum_{\delta=1}^2 P_{\delta}(\xi_2) \tilde{\varepsilon}_{31}^{\delta}, \quad \tilde{\varepsilon}_{32}^{(a)} = \sum_{\delta=1}^2 Q_{\delta}(\xi_1) \tilde{\varepsilon}_{23}^{\delta} \quad (12)$$

여기서 δ 는 <그림2>에서의 표준점의 위치를 나타내고 보간함수 P, Q 는 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 P_1(\xi_2) &= \frac{1}{2}(1+\xi_2) & P_2(\xi_2) &= \frac{1}{2}(1-\xi_2) \\
 Q_1(\xi_2) &= \frac{1}{2}(1-\xi_2) & Q_2(\xi_2) &= \frac{1}{2}(1+\xi_2)
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

위의 가변형률의 유도과정은 Lee[6]의 논문에 자세하게 설명되어 있다.

3. 유한요소의 정식화

3.1 판요소에 대한 정의

본 연구에서는 아래식과 같이 요소의 위치벡터와 변위장에 동일한 형상함수를 사용하는 등매개변수법을 이용하여 절점당 7개의 자유도를 가지는 4절점 유한요소를 형성하였다.

$$\begin{aligned}
 x_i &= \sum_{a=1}^n N_a x_i^a \quad (i=1,3) \\
 u_i &= \sum_{a=1}^n N_a u_i^a \quad (i=1,7)
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

여기서 N_a 는 절점 a 와 연관된 형상함수를 나타내고 x_i 는 요소의 위치벡터의 각 성분을 나타내고 u_i 는 변위벡터의 각 성분을 나타낸다.

$$\{u\} = \left\{ u, v, w, \theta_x, \theta_y, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right\}
 \tag{15}$$

따라서 제 2.2절에서 정의된 변형률을 이용하여 변형률-변위 행렬 $[B]$ 는 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$\{\varepsilon\} = \sum_{a=1}^n [B^a]_{(5 \times 7)} \{u^a\}
 \tag{16}$$

3.2 강성 행렬에 대한 정의

판의 변형에너지는 제 2장에서 정의된 힘의 항과 변형률을 이용하여 아래와 같이 정의할 수 있다.

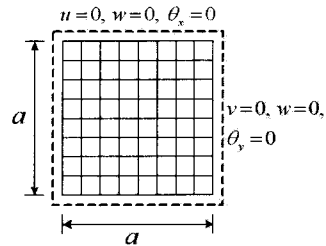
$$\begin{aligned}
 \Pi &= \int_{dA} \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dz \right\} dA \\
 &= \int_{dA} (\{N\}^T \{\varepsilon^{(0)}\} + \{M\}^T \{\varepsilon^{(1)}\} + \{P\}^T \{\varepsilon^{(3)}\} \\
 &\quad + \{Q\}^T \{\gamma^{(0)}\} + \{R\}^T \{\gamma^{(2)}\}) dA \\
 &= \{u\}^T (K_N + K_M + K_P + K_Q + K_R) \{u\}
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

여기서 K 는 강성행렬이며 강성행렬의 수치적분은

정상적분을 사용하였다.

4. 수치해석 예제 및 분석

본 연구를 통하여 개발된 4절점 적층판요소를 이용하여 다양한 두께를 가지는 세 가지의 대칭 및 비대칭 정사각형 적층 판의 해석을 수행하였다. 수치해석에 사용된 판은 네 변이 단순 지지된 판으로 형상 및 경계조건은 <그림 3>와 같다.



<그림 3> 적층판의 형상, 경계조건 및 유한요소망

유한요소해석에 사용된 복합재료의 물성치는 $E_1/E_2 = 25$, $G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$, $G_{23} = 0.2E_2$, $\nu_{12} = 0.25$ 이며 적층 판에는 식(18)과 같은 sine하중이 작용하는 것으로 가정하였다.

$$q(x,y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}
 \tag{18}$$

수치해석결과는 식(19)에서와 같이 비차원화하였다.

$$\begin{aligned}
 \bar{w} &= w \left(\frac{100E_2 t^3}{qa^4} \right), & \bar{\sigma}_x &= \sigma_x \left(\frac{t^2}{qa^2} \right), \\
 \bar{\sigma}_y &= \sigma_y \left(\frac{t^2}{qa^2} \right), & \bar{\tau}_{xy} &= \tau_{xy} \left(\frac{t^2}{qa^2} \right), \\
 \bar{\tau}_{xz} &= \tau_{xz} \left(\frac{t^2}{qa^2} \right), & \bar{\tau}_{yz} &= \tau_{yz} \left(\frac{t^2}{qa^2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

그리고 판의 처짐은 판의 중심에서 측정하였고 응력 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ 은 각각 $(A = \frac{a}{2}, B = \frac{b}{2}, 0)$, $(A, B, \pm H = \pm \frac{h}{2})$, $(0, 0, \pm H)$, $(0, B, \pm H)$, $(A, 0, \pm H)$ 에서 가장 가까운 가우스 적분점의 위치에서 도출하였다.

4.1 대칭 3개층의 적층판(0°/90°/0°)

이 예제는 3개의 층(0°/90°/0°)을 가진 적층판의

해석을 수행한 것으로 폭과 두께 비의 변화에 따른 적층 판의 중앙처짐값과 면내응력값을 조사하였다. <표 1>에는 비차원화한 판의 처짐과 응력값을 기술하였다. 이 값들은 이론해 및 다른 수치해들과 매우 유사하게 나타났다.

<표 1> sine 하중(q)을 받는 단순지지된 3개층 적층 판의 처짐 및 응력

h/a	theory	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xy}$
0.01	HSA4	0.4330	0.5336	0.1788	0.0211
	Elastic	-	0.5390	0.1810	0.0213
	Kant*[7]	0.4343	0.5392	0.1807	0.0214
	Kant**[7]	0.4343	0.5392	0.1807	0.0214
	Reddy[1]	0.4342	0.5390	0.1806	0.0214
0.05	HSA4	0.5045	0.5450	0.2030	0.0229
	Elastic	-	0.5520	0.2100	0.0289
	Kant*[7]	0.5053	0.5504	0.2049	0.0231
	Kant**[7]	0.5058	0.5507	0.2050	0.0231
	Reddy[1]	0.5041	0.5460	0.2043	0.0230
0.10	HSA4	0.7163	0.5784	0.2687	0.0278
	Elastic	-	0.5900	0.2850	0.0289
	Kant*[7]	0.7151	0.5864	0.2705	0.0279
	Kant**[7]	0.7176	0.5847	0.2712	0.0281
	Reddy[1]	0.7125	0.5684	0.2690	0.0277
0.25	HSA4	1.9257	0.7479	0.5031	0.0494
	Elastic	-	0.7550	0.5560	0.0505
	Kant*[7]	1.8948	0.7648	0.4939	0.0487
	Kant**[7]	1.9261	0.7670	0.5079	0.0500
	Reddy[1]	1.9218	0.7344	0.5028	0.0497

$\bar{\sigma}_y: (0, b/2, h/6), \max$

4.2 대칭 4개층의 적층판($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)

이 예제는 4개의 층($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)을 가진 적층판

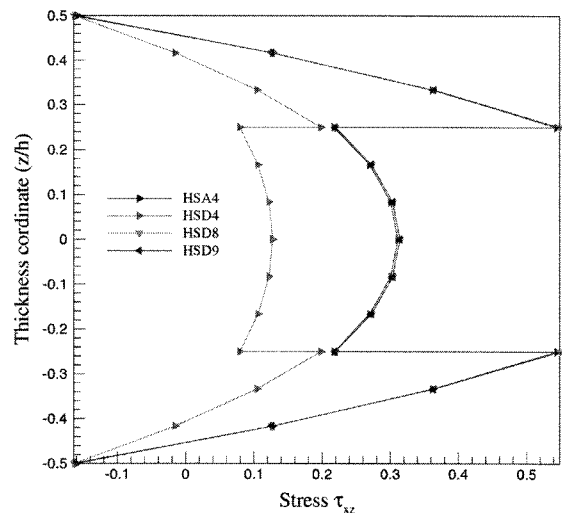
<표 2> sine 하중(q)을 받는 단순지지된 정사각 적층 판의 처짐과 전단응력

h/a	판 한번당 17개 절점 사용				Elasticity	Reddy[1]	Aknas[8]	Pervez[9]
	Present	HSD4	HSD8	HSD9		HSDT	HSDT	HSDT
\bar{w}	0.01	0.4331	0.2215	0.4326	0.4344	0.4380	0.4340	0.4340
	0.05	0.5065	0.4877	0.5076	0.5079	0.5170	0.5060	0.5080
	0.10	0.7190	0.7122	0.7202	0.7204	0.7430	0.7150	0.7190
	0.25	1.9014	1.8997	1.9021	1.9024	1.9540	1.8940	1.8937
$\bar{\tau}_{xz}$	0.01	0.3114	0.1276	0.3115	0.3132	0.3370	0.2900	0.3070
	0.05	0.3028	0.2900	0.3045	0.3045	0.3280	0.2820	0.2990
	0.10	0.2807	0.2782	0.2823	0.2823	0.3010	0.2640	0.2780
	0.25	0.2112	0.2114	0.2123	0.2123	0.2190	0.2060	0.2090

HSDn: 고차전단변형이론 n절점 판요소

의 해석을 수행한 것으로 폭과 두께의 비의 변화에 따른 적층 판의 중앙처짐과 전단응력을 구하였다. 기존의 연구에서 적층판은 폭과 두께비(h/a)가 0.01 인 경우 고차전단변형이론을 도입한 4절점 표준 판 요소는 이론해와 큰 차이를 나타낸바 있다. 그러나 판의 두께가 두꺼워짐에 따라 그 차이는 줄었고 두

께비가 0.1이상의 경우에는 다른 고차 표준요소들과 거의 같은 처짐 값을 나타내었다. 이러한 연구결과는 고차전단변형이론을 도입한 4절점 표준요소는 고차 항을 사용하여도 판의 두께가 얇으면 전단 과대현상의 영향을 받는 것을 나타낸다. 그러나 본 연구에서 개발한 HSA4 요소는 두께비가 0.01인 경우에도 다른 고차적층판요소 및 이론해들과 유사한 결과를 나타내었다. 즉 고차전단 변형 이론에 가변형틀을 도입함으로써 전단과대현상이 사라지고 요소의 성능이 향상되었음을 알 수 있다. <그림4>는 두께비가 0.01인 판의 전단응력($\bar{\tau}_{xz}$)을 도시한 것이다.



<그림 5> 적층판($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)의 응력분포

4.3 비대칭 적층판에 대한 해석($0^\circ/90^\circ$)

이 예제는 2개의 층($0^\circ/90^\circ$)을 가진 비대칭 적층판의 해석을 수행한 것으로 폭과 두께의 비의 변화에 따른 적층 판의 중앙처짐 및 면내응력을 구하였다.

〈표 3〉 사인 하중(q)을 받는 단순지지된 비대칭 적층 판의 처짐 및 응력

h/a	theory	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xy}$
0.01	HSA4	1.0619	-0.7087	0.7087	-0.0520
	Elastic	1.0742	-0.7219	0.7219	-0.0529
	Kant*[8]	1.0651	-0.7161	0.7161	-0.0525
	Kant**[8]	1.0695	-0.7152	0.7152	-0.0527
	Reddy[1]	1.0651	-0.7161	0.7161	-0.0525
0.05	HSA4	1.0995	-0.7136	0.7136	-0.0521
	Elastic	1.1060	-0.7200	0.7200	-0.0529
	Kant*[6]	1.1025	-0.7189	0.7186	-0.0527
	Kant**[6]	1.1078	-0.7185	0.7185	-0.0530
	Reddy[1]	1.1102	-0.7235	0.7235	-0.0527
0.10	HSA4	1.2168	-0.7288	0.7288	-0.0525
	Elastic	1.2318	-0.7317	0.7353	-0.0540
	Kant*[8]	1.2192	-0.7269	0.7273	-0.0533
	Kant**[8]	1.2274	-0.7286	0.7286	-0.0539
	Reddy[1]	1.2161	-0.7468	0.7468	-0.0533
0.20	HSA4	1.6836	-0.7847	0.7847	-0.0540
	Elastic	1.7287	-0.7723	0.8036	-0.0586
	Kant*[8]	1.6800	-0.7510	0.7720	-0.0557
	Kant**[8]	1.7037	-0.7662	0.7662	-0.0572
	Reddy[1]	1.6670	-0.8385	0.8385	-0.0558

본 연구에 개발된 4절점 판요소를 이용한 처짐과 응력값은 이론해 및 다른 유한요소들과 매우 유사한 값을 가지고 있다. 특히 판의 기하학적 형상 및 재료적 대칭성에 의해서 $\bar{\sigma}_x$ 및 $\bar{\sigma}_y$ 의 값이 동일하게 나타났다.

5. 결 론

본 연구를 통하여 고차전단변형이론을 바탕으로 가변형률을 채용한 전체 28자유도를 가지는 4절점 적층판 요소를 개발하였다. 개발된 4절점 저차 적층판요소를 이용하여 세 가지의 대칭 및 비대칭 적층판의 해석을 수행한 결과 이론해 및 다른 유한요소에 의해서 구해진 참고해와 매우 유사한 결과를 도출함을 알 수 있었다. 특히 가변형률을 도입하지 않은 저차 표준 적층판 유한요소의 경우는 고차 항을 도입하여도 적층판의 처짐과 응력분포에서 불리한 결과가 도출되었는데 가변형률을 도입함으로써 저차유한요소의 경우에도 판의 폭과 두께 비에 상관없이 우수한 결과를 도출하였다.

참고문헌

1. J.N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates*. CRC Press, 1997
2. 이상진, 김용부, 가변형도법이 적용된 적층 판의

유한요소 휨 해석, 대한건축학회 논문집, 10권 5호 pp.181-187, 1994.

3. 박경임, 비대칭 층 인공재료모델을 이용한 평판구조물의 위상최적화 경상대학교 대학원 석사학위논문, 2006
4. 김영빈, 이재홍, 윤광섭. 고차 전단변형 평판이론을 이용한 FRP 바닥판의 휨 해석모델 개발, 대한건축학회 학술발표대회논문집, 26권 1호, pp. 49-52, 2006
5. 김하룡, 이상진, 고차전단변형이론을 이용한 대칭 및 비대칭 적층 판의 유한요소 해석, 대한건축학회 학술발표회논문집, 27권 1호 pp.249- 252, 2007.
6. S.J. Lee, Free vibration analysis of plates by using a four-node finite element formulated with assumed natural transverse shear strain, *Journal of sound and vibration*, Vol. 278, pp. 657-684, 2004
7. T. Kant and K. Swaminathan, Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory, *Composites Structures*, Vol. 36, 6-7, pp. 496-503, 2005
8. G. Akhras, and W. Li, Static and Free Vibration Analysis of Composite Plates using Spline Finite Strips with Higher Order Shear Deformation, *Composites*, Vol. 36, 6-7, pp. 496-503, 2005
9. T. Pervez, A.C. Seibi and F.K.S. Al-Jahwari, Analysis of thick orthotropic laminated composite plates based on higher order shear deformation theory, *Composite Structures*, Vol. 36, 6-7, pp. 496-503, 2005