

셀형 스페이스 프레임 구조물의 하중 및 경계조건에 따른 불안정 거동에 관한 연구

A Study on the Unstable behavior according to Lode and boundary condition of shelled space frame structure

김 남 석*
Kim, Nam-Seok

손 수 덕**
Shon, Su-deog

김 승 덕***
Kim, Seung-deog

요 약

본 논문에서는 셀형 스페이스 프레임 구조물의 구조 불안정 특성을 조사한다. 대공간 구조물은 대경간을 가볍게 만들기 위해 두께비를 얇게 만들어야 하므로, 구조설계시 구조불안정 검토가 중요하다. 셀형 구조물의 구조불안정은 다양한 조건에 따라 민감하게 반응하며, 이는 대변형을 수반하는 비선형 문제에 귀착하게 된다. 따라서 본 연구에서는 기하학적 비선형을 고려한 수치해석 기법을 통하여 셀형 스페이스 프레임 구조물의 하중 및 경계조건에 따른 불안정 거동을 비교하고, 불안정 현상에 미치는 영향을 파악하여 기초적인 붕괴 메커니즘을 규명한다.

Abstract

This paper investigate the structure instability properties of the shelled space frame structure. The large structure must have thin thickness for build the large space structure there fore structure instability review is important when we do structural design. The structure instability of the shelled structure accept it sensitively by varied conditions. This come to a nonlinear problem with be concomitant large deformation. In this study, it is compared unstable behavior according to lode and boundary condition of the shelled space frame structure through numerical method which considered geometrical nonlinear and grasped influence for the instability phenomenon and investigated the fundamental collapse mechanism.

키워드 : 비선형 해석, 스페이스 프레임, 불안정, 뒹좌굴, 분기좌굴, 경계조건

Keywords : Nonlinear analysis, Space frame, Instability, Snap-through, Bifurcation, Boundary condition

1. 서 론

오늘날 우리는 첨단산업을 중심으로 하는 기술집약 시대를 맞이하고 있다. 또한 인간과 자연이 공존하는 웰빙·친환경 건축에 대한 사회적 요구가 급증하고 있다.

쾌청한 실외에서 행해지던 일상 활동들을 기상 상태와는 무관하게 즐길 수 있게 실내 대공간 구조물에 대한 수요가 국민소득 증가와 함께 증대되고 첨

단산업을 중심으로 하는 초대형 구조물분야, 특히 대공간 구조물 분야에 대한 수요가 증대 될 것이 예상된다. 우리나라는 향후 건설시장의 변화에 대비하여 대공간 구조물 분야의 기술력 확보가 중요한 과제로 대두되고 있다. 이러한 대공간 구조물은 지붕의 중량을 낮추면서 안정성을 유지하기 위해, 강성 구조 시스템을 이산화 시킨 프레임형 구조물의 셀 형태로 많이 만들어진다.

프레임형 구조물은 대경간을 가볍게 만들기 위해 두께비를 얇게 만들어야 하므로, 구조설계시 구조불안정 검토가 중요하다. 셀형 구조물의 구조불안정은 초기 조건이나 접합부 특성에 따라 민감하게 반응하며, 이는 대변형을 수반하는 비선형 문제에 귀착하게 된다.

* 학생회원, 세명대학교 건축공학과 석사과정
E-mail : hosi0324@hotmail.com

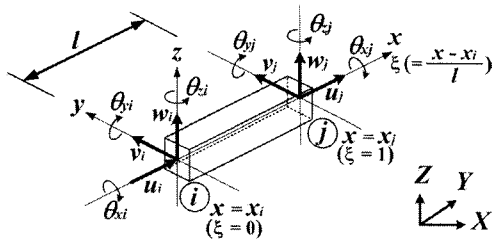
** 정회원, 경북대학교 건축공학과 공학박사
E-mail : sdshon70@semyung.ac.kr

*** 정회원, 세명대학교 건축공학과 교수, 공학박사
Tel: 043-649-1326 Fax: 043-649-1326
E-mail : sabinus@semyung.ac.kr

따라서 본 연구에서는 기하학적 비선형을 고려한 수치해석 기법을 통하여 셀형 스페이스 프레임 구조물의 하중 및 경계조건에 따른 불안정 거동을 비교하고, 불안정 현상에 미치는 영향을 파악하여 기초적인 붕괴 메커니즘을 규명한다.

2. 비선형 유한요소의 정식화

프레임형 공간 구조물의 기하학적 비선형을 고려한 유한요소해석을 수행하기 위해 본 장에서는 2절점 6자유도 요소의 접선강성행렬을 유도한다.



<그림 1> 2절점 6자유도 요소의 모델

요소좌표계는 (x, y, z) 로, 전체좌표계는 (X, Y, Z) 로 설정하고, 양단의 절점변위 d 및 절점하중 f 는 식 (1)과 같이 나타낸다.

$$d = \begin{Bmatrix} d_i \\ \vdots \\ d_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \\ \vdots \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix}, \quad f = \begin{Bmatrix} f_i \\ \vdots \\ f_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{xi} \\ f_{yi} \\ f_{zi} \\ m_{xi} \\ m_{yi} \\ m_{zi} \\ \vdots \\ f_{xj} \\ f_{yj} \\ f_{zj} \\ m_{xj} \\ m_{yj} \\ m_{zj} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

그리고 부재 길이 방향의 거리 x 는 무차원량 ξ 를 도입하여 나타낸다. 따라서 ξ ($0 \leq \xi \leq 1$) 는 x_1 을 이용하여 식(2)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\xi = \frac{x - x_1}{l} \quad (2)$$

요소내 임의점 변위 u 를 절점변위 d 로 나타내기 위해 형상함수를 이용한다. 부재축 방향 변위 $u(x)$ 와 St. Venant 비틀림 $\psi(x)$ 는 Lagrange 보간 함수를 이용하여 다음과 같이 정의한다.

$$u(x) = L_1 u_i + L_2 u_j \quad (3)$$

$$\psi(x) = L_1 \theta_\xi + L_2 \theta_{xj} \quad (4)$$

$$v(x) = H_1 v_i + H_2 v_j + H_3 \theta_{zi} + H_4 \theta_{zj} \quad (5)$$

$$w(x) = H_1 w_i + H_2 w_j - H_3 \theta_{yi} - H_4 \theta_{yj} \quad (6)$$

여기서,

$$L_1 = 1 - \xi$$

$$L_2 = \xi$$

$$H_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

$$H_2 = 3\xi^2 - 2\xi^3$$

$$H_3 = l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)$$

$$H_4 = l(-\xi^2 + \xi^3)$$

$u(x), v(x), w(x), \psi(x)$ 의 미분을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \equiv U_1^T d \quad (7)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \equiv V_1^T d \quad (8)$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d^2 v}{d\xi^2} \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 \equiv V_2^T d \quad (9)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \equiv W_1^T d \quad (10)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d^2 w}{d\xi^2} \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 \equiv W_2^T d \quad (11)$$

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \equiv \Psi_1^T d \quad (12)$$

여기서,

$$U_1^T = \frac{1}{l} [-100000 : 100000]$$

$$V_1^T = \frac{1}{l} [0(-6\xi + 6\xi^2) \ 0 \ 0 \ 0 \ l(1 - 4\xi + 3\xi^2) : 0(6\xi - 6\xi^2) \ 0 \ 0 \ 0 \ l(-2\xi + 3\xi^2)]$$

$$V_2^T = \frac{1}{l^2} [0(-6 + 12\xi) \ 0 \ 0 \ 0 \ l(-4 + 6\xi) : 0(6 - 12\xi) \ 0 \ 0 \ 0 \ l(-2 + 6\xi)]$$

$$W_1^T = \frac{1}{l} [0 \ 0(-6\xi + 6\xi^2) \ 0 \ l(-1 + 4\xi - 3\xi^2) \ 0 : 0 \ 0(6\xi - 6\xi^2) \ 0 \ l(2\xi - 3\xi^2) \ 0]$$

$$W_2^T = \frac{1}{l^2} [0 \ 0(-6 + 12\xi) \ 0 \ l(4 - 6\xi) \ 0 : 0 \ 0(6 - 12\xi) \ 0 \ l(2 - 6\xi) \ 0]$$

$$\Psi_1^T = \frac{1}{l} [000-100 : 000100]$$

변위-변형도 관계식을 2차항까지 포함하는 비선형 방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$= \epsilon_0^p + \epsilon_0^b + \epsilon_L^p \quad (13)$$

여기서,

$$\epsilon_0^p = \frac{du}{dx}$$

$$\epsilon_0^b = -y \frac{d^2 v}{dx^2} - z \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$\epsilon_L^p = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]$$

재료는 선형탄성범위 내에 있음을 가정하면, 응력-

변형도 관계식은 다음과 같다.

$$\sigma = E\epsilon \quad (14)$$

초기 상태에서의 절점하중, 절점변위, 응력, 변형도를 각각 f, d, σ, ϵ 라 하고, 이때의 각 증분을 $\Delta f, \Delta d, \Delta \sigma, \Delta \epsilon$ 라 정의한다. 가상일의 식을 구하면 다음과 같다.

$$\delta \Delta d^T (f + \Delta f) = \int \delta \Delta \epsilon^T (\sigma + \Delta \sigma) dv \quad (15)$$

위 식의 $\delta \Delta \epsilon^T$ 를 구하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta \Delta \epsilon^T = \delta \Delta d^T [(U_1 - yV_2 - zW_2 + C_1U_1 + C_2V_1 + C_3W_1) + (U_1U_1^T \Delta d + V_1V_1^T \Delta d + W_1W_1^T \Delta d)] \quad (16)$$

여기서,

$$C_1 = \frac{du}{dx} = U_1^T d, \\ C_2 = \frac{dv}{dx} = V_1^T d, \\ C_3 = \frac{dw}{dx} = W_1^T d$$

또 식(15)의 $\Delta \sigma$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\Delta \sigma = E\Delta \epsilon = E(\Delta \epsilon_0^p + \Delta \epsilon_0^b + \Delta \epsilon_L^p) \quad (17)$$

여기서,

$$\Delta \epsilon_0^p = U_1^T \Delta d \\ \Delta \epsilon_0^b = -yV_2^T \Delta d - zW_2^T \Delta d \\ \Delta \epsilon_L^p = \frac{1}{2} \{ (U_1^T \Delta d)^2 + (V_1^T \Delta d)^2 + (W_1^T \Delta d)^2 \} + (C_1U_1^T + C_2V_1^T + C_3W_1^T) \Delta d$$

식(16)와 식(17)을 식(15)의 가상일의 방정식에 대입한 뒤, 증분 구간내의 선형화를 위해 Δd 의 고차항을 무시하고 정리하면, 3차원 보요소들의 증분 강성 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta f = (r_1 + r_2 + r_3 - f) + (k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5) \Delta d \quad (18)$$

여기서,

$$r_1 = EA \int_0^l U_1 (\epsilon_0^p + \epsilon_L^p) dx \\ r_2 = \left[EI_z \int_0^l (V_2 V_2^T) dx + EI_y \int_0^l (W_2 W_2^T) dx \right] d \\ r_3 = EA \int_0^l (C_1 U_1 + C_2 V_1 + C_3 W_1) (\epsilon_0^p + \epsilon_L^p) dx$$

$$k_1 = EA \int_0^l U_1 U_1^T dx \\ k_2 = EI_z \int_0^l V_2 V_2^T dx + EI_y \int_0^l W_2 W_2^T dx \\ k_3 = EA \int_0^l (V_1 V_1^T + W_1 W_1^T) (\epsilon_0^p + \epsilon_L^p) dx \\ k_4 = EA \int_0^l (U_1 U_1^T) (\epsilon_0^p + \epsilon_L^p) dx \\ k_5 = EA \int_0^l [U_1 (C_1 U_1^T + C_2 V_1^T + C_3 W_1^T) + (C_1 U_1 + C_2 V_1 + C_3 W_1) U_1^T + (C_1 U_1 + C_2 V_1 + C_3 W_1) + (C_1 U_1^T + C_2 V_1^T + C_3 W_1^T)] dx$$

본 연구에서는 폐단면을 대상으로 하는 St. Venant의 비틀림을 대상으로 하여 원주좌표계를 이용 전단변형도 γ 를 식(4)의 ψ 로 나타내면 다음과 같다.

$$\gamma = r \frac{d\psi}{dx} \equiv r \Psi_1^T d \quad (19)$$

여기서,

r : 단면의 반지름

응력-변형도 관계식을 구하면 다음과 같다.

$$\tau = G\gamma \equiv Gr\Psi_1^T d \quad (20)$$

여기서,

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$: 전단계수

가상일에 의한 증분형 방정식을 구하기 위해 가상일의 식을 구하면 다음과 같다.

$$\delta \Delta d^T (f + \Delta f) = \int \delta \Delta \gamma^T (\tau + \Delta \tau) dv \quad (21)$$

위 식의 $\delta \Delta \gamma, \Delta \tau$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\delta \Delta \gamma = r \frac{d \delta \Delta \psi}{dx} \equiv r \Psi_1^T \delta \Delta d \quad (22)$$

$$\Delta \tau = G \Delta \gamma \equiv Gr \Psi_1^T \Delta d \quad (23)$$

$\delta \Delta \gamma$ 와 $\Delta \tau$ 를 이용하여 식 (21)를 정리하면 St. Venant이론에 의한 비틀림 모멘트의 증분 강성 방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta f = k_6 \Delta d \quad (24)$$

여기서,

$$k_6 = GI_p \int \Psi_1 \Psi_1^T dx$$

식(18) 및 식(24)를 조합하여 최종적인 증분

형 비선형 강성방정식을 구하면 다음과 같이 된다.

$$\Delta f - \Delta r = (k_E + k_G) \Delta d \quad (25)$$

여기서,

$$k_E = k_1 + k_2 + k_6$$

$$k_G = k_3 + k_4 + k_5$$

$$\Delta r = r_1 + r_2 + r_3 - f$$

전체좌표계에서의 절점력, 불평형력, 절점변위를 각각 $\Delta F, \Delta R, \Delta D$ 라 하고, 좌표변환 매트릭스를 T 라 나타내면, 요소좌표계에서의 절점력 Δf , 불평형력 Δr , 절점변위 Δd 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta f = T \Delta F \quad (26)$$

$$\Delta r = T \Delta R \quad (27)$$

$$\Delta d = T \Delta D \quad (28)$$

따라서 전체좌표계에서의 증분 구간에 관한 강성방정식은 다음과 같이 구해진다.

$$\Delta F - \Delta R = (K_E + K_G) \Delta D \quad (29)$$

여기서,

$$K_E = T^T k_E T$$

$$K_G = T^T k_G T$$

본 연구에서는 요소내 단면적은 일정하다고 가정하면, 합응력 $N_x, M_y, M_z, T, V_y, V_z$ 에 대응하는

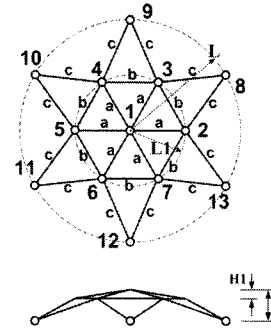
변형량을 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right\}, \frac{d^2 w}{dx^2},$

$\frac{d^2 v}{dx^2}, \frac{dw}{dx}, \frac{d^3 w}{dx^3}, \frac{d^3 v}{dx^3}$ 으로 각각 정의한다.

3 수치해석 예제

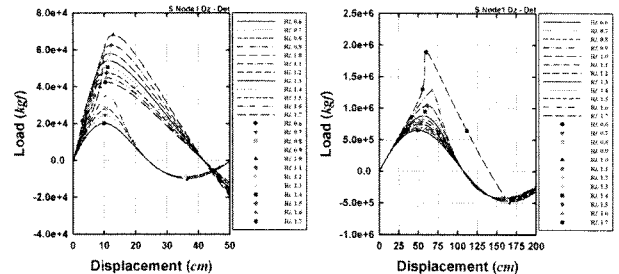
3.1 하중조건을 고려한 수치 모델

해석 대상 구조물의 형상은 <그림 2>에서 보는 바와 같고, 모든 부재의 단면적은 요소내에서 일정하다고 가정된다. 물성치는 모두 동일한 탄성계수 ($E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$)와 밀도 ($\rho = 7.85 \times 10^{-3} \text{ kgf/cm}^3$)를 가지고 있는 모델을 선정하고 구조불안정 문제를 다루고자 한다.

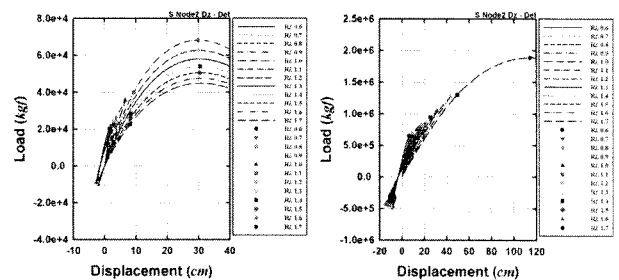


<그림 2> 다자유절점 해석모델 A

모델의 해석 결과로 <그림 3>과 <그림 4>는 각각 하중비 변화에 따른 변위 곡선을 나타내는 것이며, 곡선상의 다각형의 점들은 증분해석의 단계별 접선 강성행렬의 특이점을 보여주고 있다.

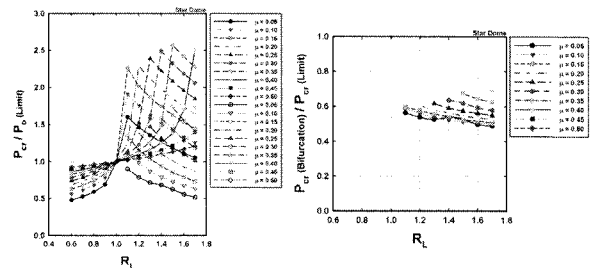


<그림 3> 하중-변위 곡선 (Node 1-Dz)



<그림 4> 하중-변위 곡선 (Node 2-Dz)

<그림 5>에서는 극한점의 좌굴하중으로 무차원화 하여 나타낸 그림이며, <그림 6>은 분기점에서의 하중레벨을 극한점에서의 하중레벨로 무차원화 하여 나타내었다.



<그림 5> 좌굴하중비

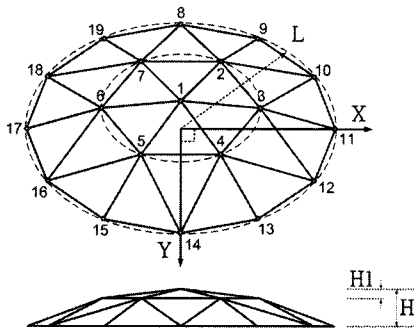
<그림 6> 뒹좌굴 하중비

3.2 경계조건을 고려한 수치모델

본 논문에서 셸형 스페이스 프레임 구조물의 불안정 거동을 알아보기 수치해석을 이용하며, 다자유절점의 모델을 사용한다. 사용된 모델의 물성치는 탄성계수 $E=2.1 \times 10^6 \text{kgf/cm}^2$, 부재 재질은 SPS 400 ($F_y=2,400 \text{kgf/cm}^2$), 모델의 스펜 7.00m, 높이 0.845m로 동일하며 기타 부재 물성치는 <표 1>과 같다.

<표 1> 부재 물성치

Element Number 1~30	Member Size	$\phi 101.6 \times 3.2t$
	Weight	7.760 (kgf/m)
	Cross-sectional Area	9.892 (cm^2)
Element Number 31~42	Member Size	$\phi 101.6 \times 4.5t$
	Weight	15.000 (kgf/m)
	Cross-sectional Area	19.130 (cm^2)



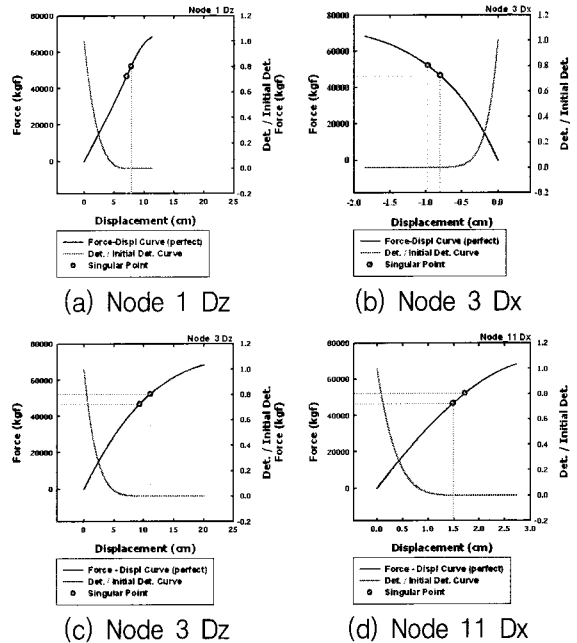
<그림 7> 다자유절점 해석 모델 B

해석 모델에 대하여 자유경계조건과 고정 경계조건으로 변화시켜 경계조건에 따른 불안정거동을 파악한다.

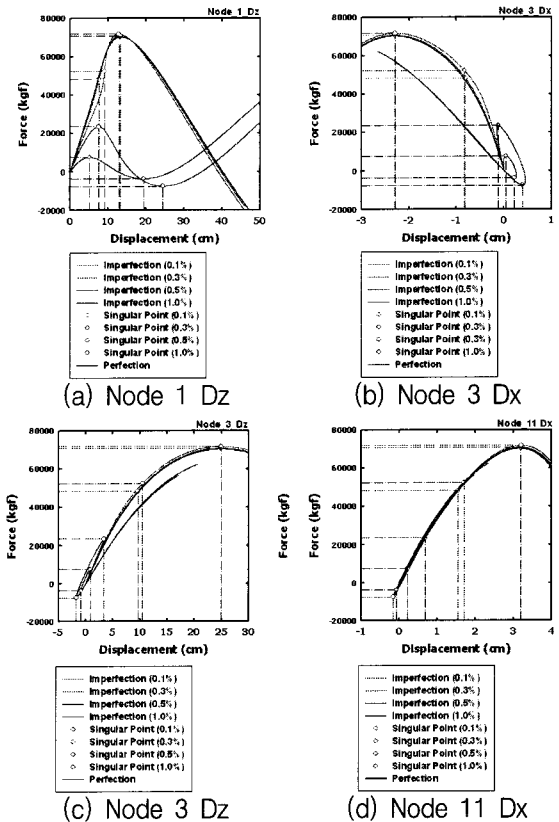
3.2.1 자유 경계조건

모델은 <그림7>에서와 같은 다자유 절점 모델로 선정하였다. 해석은 변위를 1mm 간격으로 증분시켜 수행하였으며 증분단계의 행렬식의 특이점과 하중 변위 곡선을 조사하였다.

경계조건은 절점 1~7을 자유로 두고 나머지 8~19번 절점을 편으로 한다. 하중조건은 절점 1~7에 연직 방향으로 집중하중을 작용시며, 이에 다른 해석 결과는 <그림 8>, <그림9>와 같다.



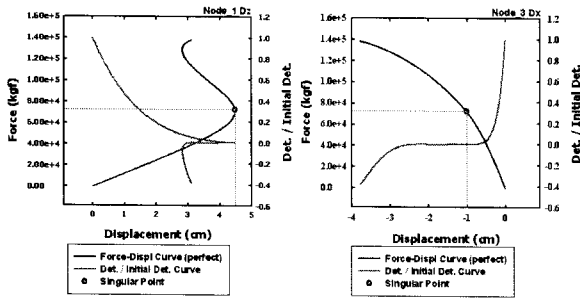
<그림 8> 완정 형상 해석에 따른 하중-변위 곡선



<그림 9> 불안정 형상 해석에 따른 하중-변위 곡선

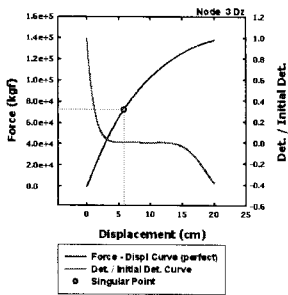
3.2.2 고정 경계조건

경계조건 해석은 1~7번 절점은 자유, 8~19번 절점은 고정으로 한다. 하중조건과 해석방법은 자유 경계조건과 동일하고 이에 따른 해석 결과는 <그림 10>, <그림 11>과 같다.



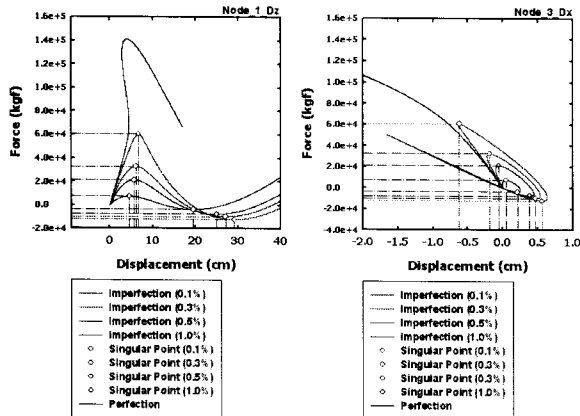
(a) Node 1 Dz

(b) Node 3 Dx



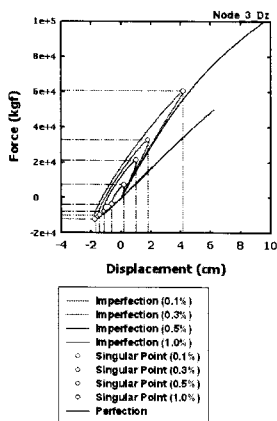
(c) Node 3 Dz

<그림 10> 완전형상 해석에 따른 하중-변위 곡선



(a) Node 1 Dz

(b) Node 3 Dx



(c) Node 3 Dz

<그림 11> 불완전형상 해석에 따른 하중-변위 곡선

4. 결론

본 논문은 대공간 구조물 중에서 강성계 이산화 구조시스템으로 분류되는 돔형 공간 구조물을 대상으로 불안정 현상을 규명하기 위하여 접선강성행렬을 유도하고 비선형 해석을 수행한 결과를 다음과 같이 요약하였다.

- 1) 하중비가 낮은 범위에서는 절점좌굴이, 하중비가 높은 범위에서는 전체 좌굴이 지배적인 현상이다.
- 2) 전체좌굴현상에 있어서 이분할 된 돔형 공간구조물의 경우, 분기점 하중레벨은 극한점 하중레벨의 약 50%~70%의 분포를 가진다.
- 3) 경계조건이 자유단일 경우 전체좌굴이, 고정단일 경우 절점좌굴이 지배적 현상이다. 또 전체좌굴이 발생하는 경로는 모두 분기점을 가지며, 고정경계의 경우가 더 민감한 반응을 보인다.

감사의 글

본 연구는 건설교통부 첨단도시개발사업의 연구비 지원(과제번호#06 R&D B03)에 의해 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

1. Analysis, Design and Construction of Braced Domes, Edited by Makowski, Z. S., Nichols Publishing Company, New York, 1984.
2. Bulenda, Th. and Knippers, J., "Stability of grid shells," Computers and Structures, Vol. 79, 2001, pp.1161-1174.
3. Choong, K. K. and Hangai, Y., "Review on methods of bifurcation analysis for geometrically nonlinear structures," IASS, Vol.34, No.112, 1993, pp.133-149.
4. Hill, Christopher D., Blandford, George E. and Wang, Shien T., "Post-buckling analysis of steel space trusses," Journal of Structural Engineering, vol. 115, No. 4, 1989.4, pp.900-919.
5. 金勝德, "偏平構造物の動的安定に関する研究," 東京大學 大學院, 博士學位論文, 1990