



## 비정렬격자 SIMPLE 알고리즘기반 이상유동 수치해석 기법

김종태,<sup>\*1</sup> 박익규,<sup>2</sup> 조형규,<sup>2</sup> 김경두,<sup>2</sup> 정재준<sup>1</sup>

### NUMERICAL METHOD FOR TWO-PHASE FLOW ANALYSIS USING SIMPLE-ALGORITHM ON AN UNSTRUCTURED MESH

Jongtae Kim,<sup>\*1</sup> Ik-Kyu Park,<sup>2</sup> Hyung-Kyu Cho,<sup>2</sup> Kyung Doo Kim<sup>2</sup> and Jae Jun Jeong<sup>1</sup>

*For analyses of multi-phase flows in a water-cooled nuclear power plant, a three-dimensional SIMPLE-algorithm based hydrodynamic solver CUPID-S has been developed. As governing equations, it adopts a two-fluid three-field model for the two-phase flows. The three fields represent a continuous liquid, a dispersed droplets, and a vapour field. The governing equations are discretized by a finite volume method on an unstructured grid to handle the geometrical complexity of the nuclear reactors. The phasic momentum equations are coupled and solved with a sparse block Gauss-Seidel matrix solver to increase a numerical stability. The pressure correction equation derived by summing the phasic volume fraction equations is applied on the unstructured mesh in the context of a cell-centered co-located scheme. This paper presents the numerical method and the preliminary results of the calculations.*

**Key Words :** 이상유동(Two-Phase Flow), SIMPLE 알고리즘(SIMPLE Algorithm), 비정렬격자(Unstructured Mesh)

### 1. 서 론

이상유동(two-phase flow)은 우리 생활에 여러모로 영향을 미치고 있는 중요한 열수력 현상 중의 하나이며, 지금까지 이상유동의 현상에 대한 이해와 함께 정량적인 평가를 위하여 많은 실험과 모델링 및 수치계산이 이루어져 왔다.

특히, 물과 수증기의 이상유동은 주로 상변화(수증기의 응축과 물의 비등)를 수반하게 되며, 그 체적분률 (volume fraction)에 따라 연속상(continuous field) 혹은 분산상(dispersed field) 등 다양한 형태로 존재한다. 이와 같은 액상과 기상의 이상유동에서는 상간의 경계면 즉 계면에서의 상간의 상호작용이 매우 중요하다.

최근에 고정밀 CFD에서 사용되는 adaptive mesh, VOF, level-set 등의 기법[1-3]을 이용하여 상간의 경계를 포획(capturing) 혹은 추적(tracking)하고자 하는 노력이 이루어지고 있다. 이와 같은 방법은 단일 액적 유동 혹은 매우 짧은 시간

(short-term) 동안의 과도현상 해석에 활용되고 있으나, 긴 시간(mid or long-term) 동안의 과도현상을 해석하는데는 컴퓨터 성능의 한계로 활용에 제약에 받고 있다.

이상유동 해석에서 많이 사용되는 Euler-Euler 기법은 연속상 뿐만 아니라 분산상에 대해서도 Eulerian 관점의 Navier-Stokes 방정식을 적용하여 해석한다. 분산상인 기포나 액적의 크기가 일정한 경우에는 계면의 면적을 그 상의 체적분률을 이용하여 쉽게 구할 수 있기 때문에 이 방법은 매우 정확한 해를 구할 수 있다. 그러나 상변화가 있거나 기포의 상호 작용에 의하여 그 크기가 변하는 경우에는 계면을 예측할 수 있는 모델이 요구된다.

일반적인 상용 CFD 코드에서는 액상과 기상에 대하여 하나는 연속상으로 나머지 하나를 분산상으로 모델링하고 있다. CFX에서는 분산상(dispersed phase)에 대하여 기포(혹은 액적)의 크기를 그룹화하여 표현하는 MUSIC 모델을 사용한다. 그러나 이와 같은 2-field 기반 모델은 그 특정한 적용 범위가 제한적이라 할 수 있다. Kunz 등[4]은 물과 수증기에 대하여 각각 연속상과 분산상을 고려한 4-field 모델을 사용하였으며, Antal 등[5]은 기포 크기의 따라 상을 구분하여 해석하는 multi-field 개념을 이용하였다.

1 정회원, 한국원자력연구원

2 한국원자력연구원

\* Corresponding author, E-mail: ex-kjt@kaeri.re.kr



본 연구에서는 원자로에서 일어날 수 있는 다양한 이상유동 현상에 대하여 해석이 가능한 수치해석 알고리즘을 개발하는 것을 목적으로 하며, 이를 위하여 비정렬 격자 SIMPLE 알고리즘에 기반한 다상유동 수치해석 코드 CUPID-S(Component Unstructured Program for Interfacial Dynamics-based on SIMPLE algorithm)를 개발하였다. 원자로 열수력 거동 해석을 위하여 간단하면서도 이상유동의 모든 유동영역에 적용이 가능한 2유체(two-fluid) 3상(three-field) 방정식[6]을 지배방정식으로 사용하였으며, 단상유동 해석에 주로 사용되어 온 SIMPLE 기법을 다상유동장 해석으로 확장하기 위하여 MCBA(Mass Conservation-Based Algorithm)[7] 알고리즘을 적용하였다. 원자로 내부의 복잡한 형태에 대한 격자 생성을 용이하게 하게 위하여 비정렬 혼합격자(hybrid mesh, 혹은 mixed element mesh)에 기반한 유한체적법으로 지배방정식을 이산화 하였다. 다상유동의 운동량 보존방정식에서 상 간의 운동량 전달은 수치적 안전성에 영향을 크게 미치는 것으로 알려져 있으며 이를 해결하기 위하여 상 간의 운동량방정식을 연계하여 푸는 방법을 사용하였다.

본 논문에서는 비정렬격자 SIMPLE 알고리즘 기반 다상유동 수치기법에 대하여 기술하고 그 수치기법을 검증하기 위하여 상 분리(phase separation) 현상 및 압력 감소에 의한 비등 현상에 대하여 수치해석을 수행하였다

## 2. 지배방정식 및 수치해법

상변화가 일어나는 다상 유동장의 해석을 위하여 본 연구에서는, 수증기와 물의 2유체에 대하여 연속액상(continuous liquid phase), 액적상(droplets phase), 그리고 증기상(vapor phase)의 3상에 대한 해석 모델을 사용한다. 유동장의 압력은 상에 관계없이 동일하다고 가정하였다.

### 2.1 2유체 3상 모델의 지배 방정식

증기상  $v$ , 연속액상  $l$ , 액적상  $d$ 에 대하여  $k$ 로 나타내면 각 상에 대한 연속방정식은 다음과 같은 형태로 표현된다.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \vec{u}_k) = S_{\alpha_k} \quad (1)$$

$$S_{\alpha_v} = \Gamma_v$$

$$S_{\alpha_l} = -(1-\eta)\Gamma_v - S_E + S_D$$

$$S_{\alpha_d} = -\eta\Gamma_v + S_E - S_D$$

$\alpha_k$ 는 각 상의 체적분율이며,  $\Gamma_v$ 는 상변화(증발-응축)에 의한 질량생성율이다.  $S_E$ 와  $S_D$ 는 증기에 의하여 연속액상에

서 액적이 생성되어 이탈하거나 반대로 액적이 연속액상에 포함되는 비율을 의미하며,  $\eta$ 는 연속액상과 액적상에서 액적상이 차지하는 비율을 나타낸다. 각 상에 대한 운동량방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k \vec{u}_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \vec{u}_k \vec{u}_k) = & -\alpha_k \nabla p + \nabla \cdot (\alpha_k \mathbf{T}_k) \\ & + \alpha_k \rho_k \vec{g} + \mathbf{M}_k^{mass} + \mathbf{M}_k^{drag} + \mathbf{M}_k^{VM} \end{aligned} \quad (2)$$

CUPID-S 코드에서는 현재 상 간의 운동량 전달을 세 가지로 모델링하였으며, 질량전달에 의한 운동량전달, 상 간의 마찰(drag force)에 의한 운동량 전달, 그리고 상 간의 가속력의 차이(virtual mass force)에 의하여 발생하는 운동량전달 등을 포함한다. 유동장 내 열전달은 엔탈피로 표현된 식을 사용하며, 특히 액적상과 연속액상은 열적평형(thermal equilibrium) 상태를 가정하였다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k h_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k h_k \vec{u}_k) - \nabla \cdot (\alpha_k \vec{q}_k) \\ = \alpha_k \mathbf{T}_k : \nabla \vec{u}_k + \alpha_k \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha_k \vec{u}_k \cdot \nabla p + I_k + \alpha_k Q'' \end{aligned} \quad (3)$$

지배방정식과 종속변수에 대한 계(system)의 닫힘(closure)를 위하여 상태방정식과 다음과 같은 보존식을 사용한다.

$$\sum_k \alpha_k = 1 \quad (4)$$

### 2.2 지배방정식의 이산화

각 상에 대한 연속방정식, 에너지방정식, 그리고 각 좌표성분의 운동량방정식은 일반적인 스칼라 수송방정식의 형태로 표현된다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \alpha_k \rho_k \phi_k d\Omega + \int \alpha_k \rho_k \phi_k \vec{u}_k d\vec{A} - \int \Gamma_k \nabla \phi_k d\vec{A} = \int S_{\phi_k} d\Omega \quad (5)$$

대류 및 확산항은 Green-Gauss 정리에 의하여 체적분을 면적적분으로 변환하였다. 적분항의 식 (5)는 유한체적법(Finite Volume Method, FVM)으로 비정렬격자의 각 셀(cell)에 대하여 이산화(discretization)한다. 본 연구에서 다루고 있는 SIMPLE 계열의 알고리즘은 음해법(implicit method)을 기반으로 지배방정식을 이산화하며, 여기서는 Euler 후방차분을 사용하였다.

이산화된 방정식은 각 항 특히, 대류항의 비선형성으로 인하여 안정적으로 수렴해를 구하기 어렵기 때문에 일반적으로



하향이완(under-relaxation) 기법을 주로 사용하고 있다. 그리고, 비정렬격자 상에서 2차 정확도로 대류항과 확산항을 이산화하기 위하여 주로 내재적(implicit)으로 처리할 수 있는 항과 외재적(explicit)으로 처리할 수 있는 항을 구분하는 방식(deferred correction method)을 사용하고 있다.

본 연구에서는 변수의 증분 형태(delta form)의 이중시간 적분법(dual-time integration)을 사용한다[10].

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int \alpha_k \rho_k \phi_k d\Omega + \frac{\partial}{\partial \tau} \int \alpha_k \rho_k \phi_k d\Omega + \int \alpha_k \rho_k \phi_k \bar{u}_k d\bar{A} \\ & = \int \Gamma_k \nabla \phi_k d\bar{A} + \int S_{\phi_k} d\Omega \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)은 식 (5)에 가상시간(pseudo-time) 항을 더한 것으로 이중시간적분법의 기본이 된다. 이 방법으로 이산화된 방정식은 좌변이 수치알고리즘을 내포하고 있는 반면, 지배방정식의 모든항을 포함하고 있는 우변은 방정식의 물리적 의미를 그대로 내포하고 있기 때문에, 수치 알고리즘과 플렉스 스킴의 개선을 별개로 수행할 수 있고 코드의 유지보수가 매우 쉬워 압축성 공기역학 해석에서 많이 사용되어 왔다. 여기서는 선행 연구에서 확립된 SIMPLE 알고리즘의 이중시간적분법을 다상유동 수치기법에 확장 적용하였다. 식 (6)의 각 항에 대한 이산화는 참고문헌[8]에 기술되어있다.

각 셀 c0에 대하여 식 (6)을 이산화하면 식 (7) 형태의 산술방정식을 얻는다.

$$A_{c_0}^{\phi_k} \delta \phi_{k,c_0}^{m,n+1} + \sum_{c_j(f)} A_{c_j}^{\phi_k} \delta \phi_{k,c_j}^{m,n+1} = B_{c_0}^{\phi_k} \quad (7)$$

여기서, cj는 셀 c0와 면 f를 공유하며 이웃한 셀을 의미한다. 상첨자 m은 가상시간단계 혹은 반복단계(iteration step)를 의미하고 n은 물리시간단계를 나타낸다.  $\delta \phi$ 는 m+1 단계와 m 단계에서의  $\phi$ 값의 차이를 의미한다. 각 셀에서 구해진 식 (7)을 이웃한 셀의 식과 연립하면 행렬(matrix)로 표현된다.

### 2.3 운동량방정식의 이산화

일반 수송방정식의 비정상항을 이산화할 때 체적분율과 밀도를 시간지연하는 기법을 사용하였다. 이 방법은 상변화가 없는 일반적인 다상유동 해석에서 잘 작동하는 것으로 보인다. 그러나 물-증기와 같이 상변화를 수반하는 이상유동에서는 상변화에 의한 체적분율의 극심한 변화를 SIMPLE 알고리즘과 같은 순차 해석기법에서는 잘 반영하지 못하는 것으로 보이며 이를 개선하기 위하여 식 (8)와같이 밀도와 체적분율의 변화를 고려하였다.

$$\delta(\alpha_k \rho_k u_k)^m = (\alpha_k \rho_k)^m \delta u_k^m + u_k^m \delta(\alpha_k \rho_k)^m \quad (8)$$

식 (8)을 이용하여 시간항 및 반복계산항을 선형화하여 x-운동량방정식에 대입하면 다음과 같이 식 (9)의 좌변에  $\delta(\alpha_k \rho_k)$ 의 항이 추가됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{(\alpha_k \rho_k)^m}{\delta t} + \frac{(\alpha_k \rho_k)^m}{\delta \tau} \right] \delta u_k^m + u_k^m \left[ \frac{1}{\delta t} + \frac{1}{\delta \tau} \right] \delta(\alpha_k \rho_k)^m \\ & + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k u_k \bar{u}_k) - \nabla \cdot (\alpha_k \bar{T}_{x,k}) + \alpha_k \frac{\partial p}{\partial x} \\ & = S_{u_x} - \frac{1}{\delta t} \left[ (\alpha_k \rho_k u_k)^{m,n+1} - (\alpha_k \rho_k u_k)^n \right] \end{aligned} \quad (9)$$

이 식에서  $\bar{T}_x$ 는 x-운동량방정식의 전단력을 나타낸다.

$\delta(\alpha_k \rho_k)$ 에 관한 식을 얻기 위하여 각 상의 연속방정식을 식 (10)과 같이 시간에 대하여 이산화한다.

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\delta t} + \frac{1}{\delta \tau} \right] \delta(\alpha_k \rho_k)^m + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \bar{u}_k) \\ & = S_{\alpha_k} - \frac{1}{\delta t} \left[ (\alpha_k \rho_k)^{n+1,m} - (\alpha_k \rho_k)^n \right] \end{aligned} \quad (10)$$

참고로, 연속방정식에서 각 상의 체적분율을 구할 때는 밀도를 시간지연하여 사용한  $\delta \alpha_k$ 에 관한 식을 사용한다. 식 (10)을 이용하여 식 (9)의 좌변 둘째 항을 치환하면 식 (11)의 운동량방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{(\alpha_k \rho_k)^m}{\delta t} + \frac{(\alpha_k \rho_k)^m}{\delta \tau} \right] \delta u_k^m + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k u_k \bar{u}_k) - \nabla \cdot (\alpha_k \bar{T}_{x,k}) \\ & = -\alpha_k \frac{\partial p}{\partial x} + S_{u_x} - \frac{1}{\delta t} \left[ (\alpha_k \rho_k u_k)^{m,n+1} - (\alpha_k \rho_k u_k)^n \right] \\ & - u_k^m \left\{ -\frac{1}{\delta t} \left[ (\alpha_k \rho_k)^{n+1,m} - (\alpha_k \rho_k)^n \right] - \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \bar{u}_k) + S_{\alpha_k} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

이 식의 마지막 항은 시간지연기법으로 비정상항을 선형화한 경우와 달리 반복계산 내에서 상변화에 의한 체적분율 변화의 영향을 운동량방정식에서 고려함으로써 해의 안정성(stability)에 크게 기여한다.

각 상간에서는 상의 경계에서 마찰, 상변화 등으로 운동량 전달이 일어나며 이 상간의 운동량 전달이 비선형적이며, 상내에서의 대류와 확산보다 더 크게 영향을 미치는 경우가 있기 때문에 이를 단순히 외재적으로 처리하는 경우에는 수렴해를 얻는 것이 매우 어려워진다. 운동량방정식은 상간의 연계가 매우 중요하며 이를 위하여 상간의 운동량 전달 항은



내재적으로 처리한다. 본 연구에서 사용하고 있는 3상 모델에 대한 운동량방정식은 상 간의 운동량전달항에 의하여 상 간의 연계(phasic coupling)가 이루어지고 대류항 및 확산항에 의하여 공간에 대한 연계(spatial coupling)가 이루어진다. 3차원 3상 유동의 운동량방정식은 각 좌표성분의 운동량방정식이 상 간에 연계가 되어 각 셀에서 다음과 같은 형태의 산술방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} A_{v,c0}^u & A_{l,c0}^u & A_{d,c0}^u \\ A_{v,c0}^u & A_{l,c0}^u & A_{d,c0}^u \\ A_{v,c0}^u & A_{l,c0}^u & A_{d,c0}^u \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{v,c0}^{m,n+1} \\ \delta u_{l,c0}^{m,n+1} \\ \delta u_{d,c0}^{m,n+1} \end{bmatrix} \\ & + \sum_{f(j)} \begin{pmatrix} A_{cj}^u & 0 & 0 \\ 0 & A_{cj}^u & 0 \\ 0 & 0 & A_{cj}^u \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{v,cj}^{m,n+1} \\ \delta u_{l,cj}^{m,n+1} \\ \delta u_{d,cj}^{m,n+1} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} B_{c0}^u \\ B_{c0}^u \\ B_{c0}^u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_v^{n+1,m} \\ \alpha_l^{n+1,m} \\ \alpha_d^{n+1,m} \end{bmatrix} \left( \Omega \frac{dp'}{dx} \right)_{c0}^{m,n+1} \end{aligned} \quad (12)$$

#### 2.4 속도수정성분과 압력수정성분의 관계식

SIMPLE 계열의 알고리즘에서는 운동량방정식을 계산할 때 m단계의 압력값을 사용하기 때문에 질량보존을 만족하지 않는 속도를 얻게 된다. 이를 보정하기 위하여 (m+1) 단계 압력을 이용한 산술 운동량 방정식에서 식 (12)를 빼면 다음과 같은 속도 수정식을 얻는다.

$$\underline{\underline{A}}_{c0}^u u'_{c0} + \sum_{f(j)} \underline{\underline{A}}_{cj}^u u'_{cj} = -\underline{\underline{\alpha}}_{c0} \left( \Omega \frac{dp'}{dx} \right)_{c0} \quad (13)$$

여기서  $p^{m+1} - p^m = p'$ 로 나타내었다.

식 (13)에서 셀 c0의 압력수정 성분은 c0 셀과 그 이웃하는 셀의 속도수정 성분으로 표현되므로, 이 식을 연속방정식에 대입하면 압력수정 방정식은 풀기가 불가능해지므로 SIMPLE 알고리즘에서는  $u'_{cj} \approx 0$ 이라는 가정을 사용하여 위 식에서 공간적 연계를 제거한다. 이 가정을 이용하면 SIMPLE 알고리즘의 다상유동을 위한 속도수정과 압력수정의 관계식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}_{c0}^u u'_{c0} &= -\underline{\underline{\alpha}}_{c0} \left( \Omega \frac{dp'}{dx} \right)_{c0} \\ u'_{c0} &= - \left( \underline{\underline{A}}_{c0}^u \right)^{-1} \underline{\underline{\alpha}}_{c0} \left( \Omega \frac{dp'}{dx} \right)_{c0} = -\underline{\underline{H}}_{c0} \left( \Omega \frac{dp'}{dx} \right)_{c0} \end{aligned} \quad (14)$$

단상유동의 SIMPLEC 알고리즘에서는  $u'_{cj} \approx u'_{c0}$ 라는 가정을 사용하며, 이것을 식 (15)에 적용하면 SIMPLEC 알고리즘의 다상유동을 위한 속도수정과 압력수정의 관계식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \left( \underline{\underline{A}}_{c0}^u + \sum_{f(j)} \underline{\underline{A}}_{cj}^u \right) u'_{c0} = -\underline{\underline{\alpha}}_{c0} \left( \Omega \frac{dp'}{dx} \right)_{c0} \\ u'_{c0} &= - \left( \underline{\underline{A}}_{c0}^u + \sum_{f(j)} \underline{\underline{A}}_{cj}^u \right)^{-1} \underline{\underline{\alpha}}_{c0} \left( \Omega \frac{dp'}{dx} \right)_{c0} = -\underline{\underline{H}}_{c0} \left( \Omega \frac{dp'}{dx} \right)_{c0} \end{aligned} \quad (15)$$

#### 2.5 압력수정방정식

운동량방정식의 압력항을 전단계의 값을 사용함으로써 운동량방정식으로부터 얻은 속도는 연속방정식을 만족하지 못하며 이 속도를 보정하기 위하여 압력수정방정식을 유도하여 사용한다. 다상유동 해석을 위한 압력수정방정식을 유도하는 데는 질량보존기반(mass conservation-based algorithm MCBA)과 체적보존기반(geometric conservation-based algorithm GCBA)[9] 알고리즘으로 나뉘어지며 본 연구에서는 질량보존기반의 MCBA를 사용하여 유도하였다.

MCBA에서는 각 상의 연속방정식을 합산한 방정식을 사용한다. 특히, 물과 수증기는 밀도차가 매우 크기 때문에 단순히 각 상의 연속방정식을 합산하는 방법은 밀도가 상대적으로 매우 큰 상의 영향이 지배적으로 나타난다. 이를 보완하기 위하여 각상의 기준 밀도로 정규화(normalize)한 연속방정식을 합산하는 방법을 사용하였다.

$$\sum_{k=v,l,d} 1/\rho_{k,ref} \left\{ \Omega \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k) + \sum_f (\alpha_k \rho_k \bar{u}_k A)_f - \Omega S_{\alpha_k} \right\} = 0 \quad (16)$$

식 (16)에서 각 상의 밀도와 속도를 다음과 같이 계산된 (known) 값과 수정값으로 구분하면 비정상항과 대류 플럭스를 다음과 같이 선형화할 수 있다.

$$\rho_k^* = \rho_k^m + \rho'_k \quad (17)$$

$$u_k^{m+1} = u_k^* + u'_k \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \Omega \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k) &= \frac{\Omega}{\delta t} (\alpha_k^{m,n+1} \rho_k^{*,n+1} - \alpha_k^n \rho_k^n) \\ &= \frac{\Omega}{\delta t} \alpha_k^{m,n+1} \rho'_k + \frac{\Omega}{\delta t} \alpha_k^{m,n+1} \rho_k^{m,n+1} - \frac{\Omega}{\delta t} \alpha_k^n \rho_k^n \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \rho_k^{*,n+1} u_k^{m+1,n+1} &= (\rho_k^{m,n+1} + \rho'_k) (u_k^{*,n+1} + u'_k) \\ &\approx \rho_k^{m,n+1} u_k^{*,n+1} + \rho_k^{m,n+1} u'_k + \rho'_k u_k^{*,n+1} \end{aligned} \quad (20)$$



식 (19), (20)을 식 (16)에 대입하면 다음과 같은 합산 연속 방정식을 얻는다.

$$\sum_{k=v,l,d} \frac{1}{\rho_{k,ref}} \left\{ \frac{\Omega}{\delta t} \alpha_k^m \rho_k' + \sum_f (\alpha_k^m \rho_k' U_k^*)_f + \sum_f (\alpha_k^m \rho_k^m U_k^*)_f \right\} = - \sum_{k=v,l,d} \frac{1}{\rho_{k,ref}} \left\{ \frac{\Omega}{\delta t} (\alpha_k^m \rho_k^m - \alpha_k^n \rho_k^n) + \sum_f (\alpha_k^m \rho_k^m U_k^*)_f - \Omega S_k^\alpha \right\} \quad (21)$$

밀도수정값인  $\rho'$ 은 chain-rule을 이용하여 압력수정값으로 치환하고 속도수정값은 앞에서 구한 식 (14), (15)를 이용하여 압력수정값으로 치환한다.

$$\rho_k' = \frac{d\rho_k}{dp} p' = C_{p,k} p' \quad (22)$$

$$u_k' = -H_k \frac{dp'}{dx}, \quad \vec{u}_k' = -H_k \nabla p' \quad (23)$$

$$U_{k,f}' = (\vec{u}_k' \vec{A})_f = -(H_k \nabla p' \vec{A})_f \quad (24)$$

식 (22), (23), (24)를 식 (21)에 대입하면 식 (25)와 같은 압력수정방정식을 얻는다.

$$\sum_{k=v,l,d} \frac{1}{\rho_{k,ref}} \left\{ \frac{\Omega}{\delta t} \alpha_k^m C_{p,k} p' + \sum_f (\alpha_k^m C_{p,k} p' U_k^*)_f - \sum_f (\alpha_k^m \rho_k^m H_k \nabla p' \vec{A})_f \right\} = - \sum_{k=v,l,d} \frac{1}{\rho_{k,ref}} \left\{ \frac{\Omega}{\delta t} (\alpha_k^m \rho_k^m - \alpha_k^n \rho_k^n) + \sum_f (\alpha_k^m \rho_k^m U_k^*)_f - \Omega S_k^\alpha \right\} \quad (25)$$

밀도 변화를 고려한 압축성 다상유동의 압력수정방정식인 식 (25)는 이산화된 일반 수송방정식과 같은 형태를 갖는다. 이 식의 우변은 각 상의 연속방정식을 그대로 나타내고 있으며, 좌변의 첫째 항은 비정상항으로 둘째 항은 대류항, 셋째 항은 확산항의 역할을 한다. 좌변의 둘째 항은 상류차분을 이용하여 구한다.

$$(\alpha_k^m C_{p,k} p' U_k^*)_f = \max(U_{k,f}^*) (\alpha_k C_{p,k})_{c0} p'_{c0} + \min(U_{k,f}^*) (\alpha_k C_{p,k})_{cj}^m p'_{cj} \quad (26)$$

압력수정방정식의 좌변 셋째 항은 확산항의 이산화와 마찬가지로 두 개의 성분으로 나누어 표현할 수 있다.

$$(\alpha_k^m \rho_k^m H_k \nabla p' \vec{A})_f = (\alpha_k^m \rho_k^m H_k)_f \left\{ (p'_{cj} - p'_{c0}) \frac{A_f}{ds \cdot \hat{n}} + \left[ \overline{\nabla p'} \cdot \vec{A}_f - (\overline{\nabla p'} \cdot \vec{ds}) \frac{A_f}{ds \cdot \hat{n}} \right] \right\} \quad (27)$$

셀의 면적 벡터  $\vec{A}$ 가 그 면에 이웃하는 두 셀의 중심을 잇는 변위 벡터  $\vec{ds}$ 와 평행한 찌그러짐(skewness)이 없는 격자에서는 식 (27)의 우변은 그 첫째항만 존재하지만 일반적으로 격자의 찌그러짐이 있는 경우 둘째 항이 의미 있는 값을 가지게 된다. 일반적인 격자에서는 이 둘째 항의 크기는 첫째 항의 크기와 비교하여 미미하고 SIMPLE 알고리즘에서는 해가 수렴함에 따라 압력수정값이 0이 되기 때문에 이 둘째 항을 생략하여도 해의 정확도에는 영향을 미치지 않으므로 식 (28)과 같이 근사하여 사용한다.

$$(\alpha_k^m \rho_k^m H_k \nabla p' \vec{A})_f \approx \left( \alpha_k^m \rho_k^m H_k \frac{A}{ds \cdot \hat{n}} \right)_f (p'_{cj} - p'_{c0}) \quad (28)$$

식 (25)를 각 항별로 이산화하여 대입하면 다음과 같은 압력수정식의 산술방정식을 얻는다.

$$A_{c0}^p p'_{c0} + \sum_{f(cj)} A_{cj}^p p'_{cj} = B_{c0}^p \quad (29)$$

### 2.6 에너지방정식

본 연구에서는 엔탈피 형태의 에너지 보존방정식을 사용하며, 특히 연속액상과 액적상에 대해서는 열적평형을 가정하여 증기상 및 연속액상-액적상의 두 개의 에너지 방정식을 푼다. 다상유동장은 상 간의 상호작용이 매우 긴밀한데, 특히 상변화를 수반하는 경우 어느 한 상의 총 에너지 증가는 단순히 엔탈피의 증가뿐만 아니라 그 상의 체적분율의 증가와도 관계가 있다. SIMPLE 알고리즘과 같이 각각의 방정식을 순차적으로 해결하는 방법에서는 체적분율, 에너지, 속도의 연계가 동시해법(coupled algorithm)에 비하여 약하기 때문에 상변화를 수반하는 다상유동장 해석을 매우 불안정하게 만들 수 있다. 본 연구에서는 상변화가 있는 경우 에너지방정식도 운동량방정식과 마찬가지로 비정상항의 이산화 시에  $\alpha_k \rho_k$ 를 선형화에 포함시키는 방법을 사용한다.

에너지방정식에서 구한 엔탈피로부터 각 상의 온도, 밀도 및 열전도와 같은 물성치들은 참고문헌[9]에서 개발된 증기표(steam table) 함수를 이용하여 구한다.

### 3. 검증 계산

SIMPLE 알고리즘 기반 다상유동 해석기법을 검증하기 위하여 밀폐된 공간 내에서 상 분리(phase separation) 현상, 파이프 내에서 감압에 의한 상변화 현상을 모의하였다.

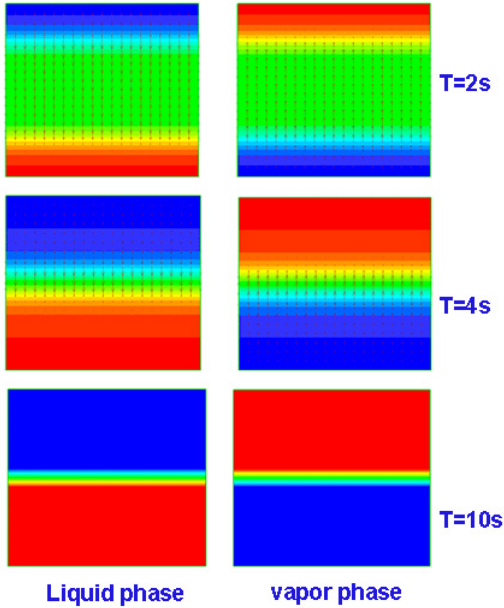


Fig. 1 Progress of phasic volume fractions and velocity fields along time for a phase separation in a square chamber, left: liquid phase, right: vapor phase

### 3.1 상 분리(phase separation) 현상 해석

상 분리 현상은 초기에 동일한 체적분율로 이상적으로 섞여 있는 포화상태의 물과 수증기가 시간이 진행함에 따라 밀도차에 의하여 물은 아래로 내려가고 수증기는 상부로 올라가서 최후에는 두 상이 완전히 분리되는 과정으로 다상유동의 매우 중요한 현상 중에 하나이다. 이 상 분리 문제는 시간에 따라 상 간의 경계면이 생성되어 전파되어 가면서 2상에서 단상으로 변하기 때문에 본문의 수치기법에서 기술한 바와 같이 체적분율이 0이 되어 각 상의 방정식이 위치에 따라 특이점에 놓이게 되는 수치해석 상 어려운 문제 중의 하나이다. 본 연구에서 개발된 CUPID-S 코드의 검증을 위하여 2차원 정사각 챔버 및 길이 2 m의 수직관에 대하여 수치계산을 수행하였다.

가로 세로 길이  $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ 의 2차원 정사각 챔버 내의 상 분리 문제를 계산하기 위하여 400개의 사각 셀로 구성된 격자를 생성하여 사용하였으며, 초기 속도가 0인 물과 수증기는 1기압의 포화상태에 있으며 벽면은 단열과 미끄럼(slip) 조건을 사용하였다. 이 문제에서 정수압에 의한 포화온도의 상승과 이에 따른 수증기의 응축은 고려하지 않았다. Fig. 1은 시간에 따라 상이 분리되는 현상을 물과 증기의 체적분율 분포를 이용하여 나타내었다. 물은 위에서부터 서서히 아래로 내려오고, 증기는 아래에서부터 위로 올라가는 것을 알 수 있으며, 10초 후에는 두 상이 완전히 분리되어 있음을 알 수 있

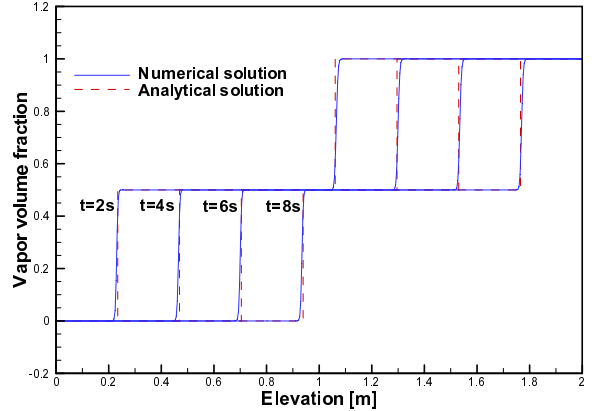


Fig. 2 Phase separation in a vertical pipe, comparison of the vapor-liquid interface propagation between numerical and analytical solutions

다. 본 수치계산을 통하여 CUPID-S 가 다상 영역뿐만 아니라 단상 영역에서도 문제없이 계산이 됨을 알 수 있다.

수직 파이프 내 정지한 물과 증기의 2상 혼합유체의 상 분리 문제는 상 간의 마찰력과 중력에 의한 체력만을 고려하여 해석해를 구할 수 있다[10]. 해석적인 방법으로 구한 증기와 물의 경계면의 전파속도를 본 연구에서 개발된 수치기법으로 계산하여 비교함으로써 본 수치기법의 정확도를 평가하였다. 길이 2 m의 수직관에 대하여 반경방향으로 1개의 셀, 길이 방향으로 500개의 셀을 사용하여 수치계산을 수행하였으며, 초기 조건은 2차원 챔버 내에서의 상 분리 문제와 같다.

Fig. 2는 파이프의 길이 방향으로 증기상의 체적분율을 보여주는 것으로 시간에 따른 변화를 해석해와 비교하였다. 파이프의 위와 아래에서부터 상이 분리되면서 만들어진 두 개의 상 경계면이 서로 반대방향으로 이동하고 있음을 알 수 있다. 본 연구의 수치해법이 상 간의 경계면을 매우 선명하게 포획하고 있고 경계면의 전파속도도 해석해와 잘 일치하고 있다. Fig. 3은 계산 시작 2초와 6초 경과 후에 증기상의 체적분율 분포로, 중력에 의하여 상이 분리되면서 생성된 경계면의 이동을 보여주고 있다.

### 3.2 2차원 채널 내에서 플래싱 유동

감압에 의하여 물이 비등하는 플래싱(flashing) 현상은 원자로에서 매우 중요한 열수력 현상 중의 하나이다. 개발된 CUPID-S 코드가 이 플래싱 현상을 잘 모의 할 수 있는지를 파악하기 위하여 2차원의 개념적 문제를 사용하여 해석을 수행하였다. 높이가 0.1 m이고 길이가 2 m인 수평 파이프에 대하여 Fig. 4(a)와 같은 사각 격자를 생성하여 사용하였다. 사용된 격자의 총 셀 수는 250 개이며, 왼쪽 입구에서 4.0 m/s의 속도로, 온도 450 K, 압력 1 MPa의 물이 유입된다. 초기

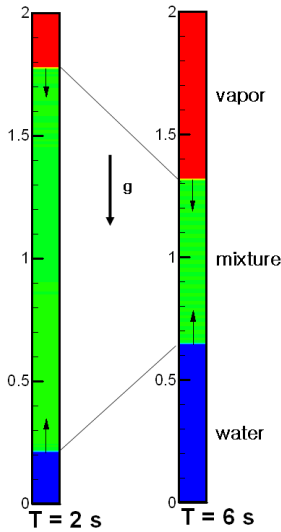


Fig. 3 Phase separation in a vertical pipe, vapor volume fractions at 2 s and 6 s

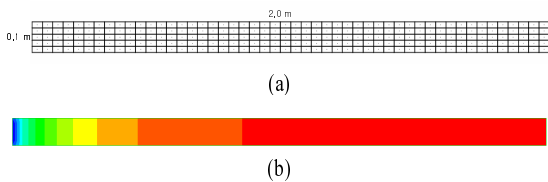


Fig. 4 Calculation of the flashing in a 2-D channel (a) 2-D mesh, (b) Pressure distribution

10초 동안 출구의 압력은 1 MPa에서 0.854 MPa로 서서히 내려가서 그 후 압력은 유지된다. 압력이 1 MPa과 0.854 MPa에서 포화온도는 각각 453.04 K와 446.27 K로, 유동장은 초기에 과냉 상태에서 출구 압력이 낮아짐에 따라 플래싱에 의하여 2상유동이 형성된다.

과도해석의 초기 10초 동안 2차원 채널 내에서는 단상의 물이 플래싱에 의하여 2상의 기상-액상 혼합 유동으로 변화하였으며, 약 13초 후에 정상상태에 도달하였다. Fig. 4 (b)는 13초에서 압력장의 분포 보여준다. Fig. 5에서 보는 바와 같이 채널 입구 부근에서 급격한 변화가 이루어짐을 알 수 있다. 채널의 후반부에서는 각 상의 체적 분율은 거의 변화하지 않으며 증기상의 체적 분율은 약 0.6에 도달하는 것으로 나타났다. 감압에 의한 물의 증발율  $\Gamma_v$ 는 상 간의 계면(interfacial) 열전달 계수에 의하여 달라질 수 있으며 본 연구에서는 수치 알고리즘의 평가를 위하여 단순하게 1 차원 시스템 코드의 계산에서 얻어진 값을 상수로 사용하였다. 출구에서의 증기의 체적분율은 시스템 코드 해석결과와 유사한 값으로 나타났으며, 상변화에 대한 정량적인 평가는 정교한 계면 열전달 모

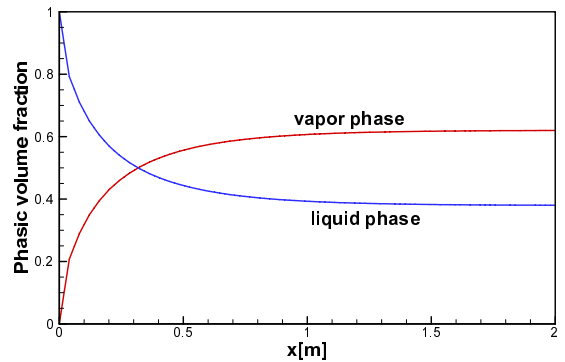


Fig. 5 Flashing in a 2-D channel, distributions of the water and vapor volume fractions along the channel

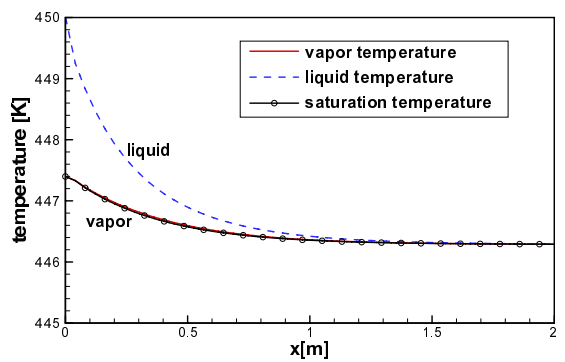


Fig. 6 Flashing in a 2-D channel, distributions of the water and vapor temperatures along the channel

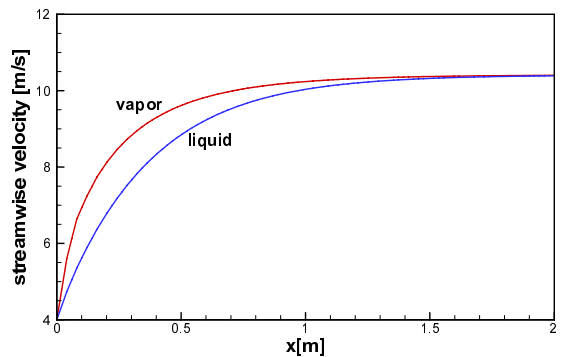


Fig. 7 Flashing in a 2-D channel, distributions of the water and vapor velocities along the channel

델을 도입한 후 논의하기로 한다.

채널의 길이 방향으로 각 상의 온도분포를 Fig. 6에 나타내었으며, 각 상의 온도를 각 지점에서의 압력에 따른 포화온도와 비교하였다. 채널 입구 부근에서는 물이 과냉 상태로 있으며, 이로 인하여 급격한 증발이 발생함을 알 수 있다. 특히 채널의 중반 이후부터는 물과 증기의 온도가 포화 온도와



같아지며, 이로 인하여 Fig. 5에서 보는 것처럼 각 상의 체적 분율이 변화하지 않게 됨을 알 수 있다. Fig. 7은 채널 내 주 유동 방향의 속도 분포를 보여 주는 것으로 채널 입구 부근에서 급격히 생성된 증기가 가속되면서 마찰력에 의하여 물을 견인하고 있고 채널의 출구로 가면서 점차적으로 증기와 물의 속도가 같아지는 것을 알 수 있다. 채널 내 감압에 의한 물의 증발 현상인 플래싱에 대하여 CUPID-S 코드로 계산을 수행하고 압력, 온도분포를 분석하여 상변화가 물리적으로 타당하게 모의되고 있는 것으로 보여진다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 복잡한 형상의 원자로 컴포넌트 내부의 2-유체 3-상 유동장 해석을 위하여 SIMPLE 알고리즘과 비정렬 격자 유한체적법에 기반한 수치해석 코드를 개발하였으며, 원자력분야 열수력의 중요한 현상에 대하여 적용하여, 개발된 수치기법의 타당성을 평가하였다.

본 연구에서 개발된 수치기법은 과도 상태 다상유동 해석에서 정성적으로 타당한 계산결과를 만들어 내는 것으로 평가되며, 앞으로 난류 모델, 계면 전달 모델 등, 다상유동 해석을 위한 여러 모델을 도입하여 코드를 개선할 계획이다.

#### 후 기

본 연구는 교육과학기술부의 원자력연구개발 중장기 사업 일환으로 수행되었습니다.

#### 참고문헌

- [1] 2005, Dai, M. and Schmidt, D.P., "Adaptive tetrahedral meshing in free-surface flow," *J. of Comp. Phys.*, Vol.208, pp.228-252.
- [2] 1999, Scardovelli, R. and Zaleski, S., "Direct numerical simulation of free-surface and interfacial Flow", *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol.31, pp.567-603.
- [3] 2005, Yu, J., Sakai, S. and Sethian, J., "A coupled quadrilateral grid level set projection method applied to ink jet simulation," *J. of Comp. Phys.*, Vol.206, pp.227-251.
- [4] 1998, Kunz, R., et al., "A Coupled Phasic Exchange Algorithm for Three-dimensional Multi-field Analysis of Heated Flows with Mass Transfer," *Computers & Fluids*, Vol.27, No.7, pp.741-768.
- [5] 2000, Antal, S.P., et al., "Development of a Next Generation Computer Code for the Prediction of Multicomponent Multiphase Flows," *Int. Meeting on Trends in Numerical and Physical Modeling for Industrial Multiphase Flow*.
- [6] 2007, Jeong, J.J., et al., "Hydrodynamic Solver for a Transient, Two-fluid, Three-field Model on Unstructured Grids," *한국전산유체공학회*, 12권 4호, pp.44-53.
- [7] Darwish, M., Moukalled, F. and Sekar, B., 2001, "A Unified Formulation of the Segregated Class of Algorithm for Multifluid Flow at All Speeds," *Numerical Heat Transfer B*, Vol.40, pp.99-137
- [8] 2006, 김종태, 탁남일, 김상백, 김민환, 이원재, "이중시간 적분법을 이용한 순차적 유동해석 기법," *한국전산유체공학회 추계학술회의 논문집*, pp.31-35.
- [9] 2002, 김수형, 김희철, "IAPWS-IF97을 이용한 증기표 프로그램," *한국원자력연구원 기술보고서 KAERI/TR-2314/2002*.
- [10] 2006, Stadke, H., *Gasdynamic Aspects of Two-Phase Flow*, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co..