



이차원 비압축성 유동 계산을 위한 Hermite 쌍 3차 유동 함수법

김진환¹

HERMITE BICUBIC STREAM FUNCTION METHOD FOR INCOMPRESSIBLE FLOW COMPUTATIONS IN TWO DIMENSIONS

J.W. Kim¹

This paper is an extension of previous study[9] on a development of a divergence-free element method using a hermite interpolated stream function. Divergence-free velocity bases defined on rectangles derived herein produce pointwise divergence-free flow fields. Hence the explicit imposition of continuity constraint is not necessary and the Galerkin finite element formulation for velocities does not involve the pressure. The divergence-free element of the previous study employed hermite serendipity cubic for interpolation of stream function, and it has been noted a possible discontinuity in variables along element interfaces. This deficiency can be removed by use of a hermite bicubic interpolated stream function, which requires at each element corners four degrees-of-freedom such as the unknown variable, its x- and y-derivatives and its cross derivative. Detailed derivations are presented for both solenoidal and irrotational bases from the hermite bicubic interpolated stream function. Numerical tests are performed on the lid-driven cavity flow, and results are compared with those from hermite serendipity cubics and a stabilized finite element method by Illinca et al[7].

Key Words : 무발산 요소(Divergence Free Element), 벡터 포텐셜(Vector Potential), 회전 기저 함수(Solenoidal Basis Function), 비회전 기저 함수(Irrotational Basis Function)

1. 서론

액체나 저속 기체의 물리적 운동을 서술하기 위하여 우리는 밀도 변화를 무시한 유동 방정식을 지배 방정식으로 사용한다. 이러한 가정에 의하여 단순화된 유동 방정식을 우리는 비압축성 Navier-Stokes 방정식이라 하며 다음과 같이 쓴다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{u} = -\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} + \nu \nabla^2 \underline{u} - \nabla p + \underline{f} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (1.2)$$

여기서, \underline{u} 는 유체 속도 벡터, p 는 압력, ν 는 동점성 계수,

\underline{f} 는 체적력을 의미한다.

그러나 운동 방정식의 단순화는 속도 벡터가 회전(solenoidal)이어야 한다는 구속 조건(식 (1.2))을 제시하고 있으며, 이 구속 조건은 오히려 단순화된 운동 방정식의 풀이를 더 어렵게 하고 있다.

우리는 Helmholtz 정리로부터 모든 벡터는 회전(solenoidal) 성분과 비회전(irrotational) 성분으로 직교 분리될 수 있음을 안다[1]. 이는 비압축성 Navier-Stokes 방정식도 예외가 아니며, 따라서 다음과 같이 분리된다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{u} = \pi^S(-\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} + \nu \nabla^2 \underline{u}) + \underline{f}^S \quad (2.1)$$

$$\nabla p = \pi^I(-\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} + \nu \nabla^2 \underline{u}) + \underline{f}^I \quad (2.2)$$

여기서, \underline{f}^S 는 중력항 \underline{f} 의 비보존적 혹은 회전 성분을,

¹ 정회원, 동의대학교 기계공학과

* Corresponding author, E-mail: kimjw@deu.ac.kr



f^l 는 f 의 보존적 혹은 비회전 성분을 의미하며, π^S 와 π^l 는 각각 벡터장의 회전 성분과 비회전 성분을 투사하는 투사 연산자(projection operator)이다.

회전함수 중에서 가중 함수 v 를 취하고, 비회전 함수 중에서 가중 함수 w 를 취하여, 식 (2.1)과 식 (2.2)에 각각 내적을 하면 다음과 같은 변분식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \left(v, \frac{\partial}{\partial t} u \right) \\ &= - \left(v, u \cdot \nabla u \right) - \nu (\nabla v, \nabla u) + \left(v, f^S \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & \left(w, \nabla p \right) \\ &= - \left(w, u \cdot \nabla u \right) - \nu (\nabla w, \nabla u) + \left(w, f^l \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

여기서, $(,)$ 는 내적을 의미한다. 영역 Ω 를 겹치지 않는 (non-overlapping) 소 영역 혹은 요소(element)들로 나누어 식 (3.1)과 식 (3.2)를 각각의 요소에 적용하면, 우리는 갈러킨(Galerkin) 유한 요소법을 수행하게 된다. 이 경우, 요소 내에서 정의되는 회전 혹은 비회전 기저함수 혹은 형상함수들을 이용하여 식 (3.1)과 식 (3.2)를 계산하게 된다.

벡터 포텐셜(이차원의 경우, 유동함수) ψ 가 존재하면 속도 벡터 u 는 $u = \nabla \times \psi$ 의 관계로부터 구할 수 있으며, 이렇게 구한 속도 벡터 u 는 항상 $\nabla \cdot u = 0$ 을 만족시킨다. 선행 연구[]에서는 ψ 의 공간을 hermite 단순 3차(simple cubic) 함수 공간으로 취하였으나, 이 연구에서는 ψ 의 공간을 hermite 쌍 3차(bicubic) 함수 공간으로 취하고 이의 부공간에서 속도 함수 u 에 대한 유한 요소 기저 함수를 구하고자 한다.

유동함수를 hermite 단순 3차 함수에 의하여 보간할 경우, 이로부터 구해지는 속도 성분 중에서 요소 경계에서 수직 방향 성분은 인접 요소 경계에서의 수직 방향 속도 성분과 그 크기와 방향이 같지만, 접선 방향 성분은 그 크기가 다를 수 있다. 즉, 요소 경계에서 수직 방향 성분은 연속이지만 접선 방향 속도는 연속이 아니다. 속도 함수가 회전적(solenoidal)이기 위한 최소 요구 조건은 요소 경계에서 속도의 수직 성분이 연속이어야 하기 때문에 접선 성분의 불연속은 무발산에 영향을 미치지 않지만, 하여튼 이는 hermite 단순 3차 함수 사용의 취약점으로 남는다. Hermite 쌍 3차 함수를 유동 함수의 보간으로 사용하면 복잡성은 증가하지만 단순 3차 함수의 단점을 보완할 수 있으리라 본다. 부록(B)에 단순 형상의 요소들에 대한 수직 및 접선 방향의 속도를 계산하여 이를 연속성 및 불연속성을 보여주고 있다.

2. 사변형 요소에 대한 무발산 보간 함수

2.1 Hermite 쌍 3차 보간 함수

$\phi^e(x,y)$ 를 사변형 요소 내에서 함수 $\phi(x,y)$ 의 근사값이라 하고 hermite 쌍 3차 함수에 의하여 보간된다고 하자. (ξ, η) -좌표계를 가지는 master 요소에 대한 hermite 쌍 3차 함수는 다음과 같다[5].

$$g_{00i} = (1/16)(\xi + \xi_i)^2(\xi_i \xi - 2)(\eta + \eta_i)^2(\eta_i \eta - 2) \quad (4.1)$$

$$g_{10i} = (-1/16)(\xi + \xi_i)^2(\xi - \xi_i)(\eta + \eta_i)^2(\eta_i \eta - 2) \quad (4.2)$$

$$g_{01i} = (-1/16)(\xi + \xi_i)^2(\xi_i \xi - 2)(\eta + \eta_i)^2(\eta - \eta_i) \quad (4.3)$$

$$g_{11i} = (1/16)(\xi + \xi_i)^2(\xi - \xi_i)(\eta + \eta_i)^2(\eta - \eta_i) \quad (4.4)$$

여기서, 아래 첨자 i 는 요소의 절점 번호를 나타내며, ξ_i 와 η_i 는 해당되는 절점 좌표값인 ± 1 을 가진다.

쌍 3차 hermite 함수에 대한 자유도는 미지수 g 자신과 x 및 y 방향에 대한 도함수들 및 교차 도함수로 구성된다. Hermite 쌍 3차 함수는 단순 3차 함수에 비하여 교차 도함수의 자유도가 첨가되었으며, 이는 일차 도함수의 자유도들이 요소 경계를 따라서 연속성을 유지하게 한다[4].

임의 절점 i 에 대한 자유도들 $(\Phi_i, \partial\Phi_i/\partial x, \partial\Phi_i/\partial y, \partial^2\Phi_i/\partial x\partial y)$ 라 하면, 요소 내에서 유동 함수는 다음과 같이 근사화 된다.

$$\begin{aligned} & \phi^e(x,y) \\ &= \sum_{i=1}^4 \left(\Phi_i g_{0i} + \frac{\partial\Phi_i}{\partial x} g_{xi} + \frac{\partial\Phi_i}{\partial y} g_{yi} + \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x\partial y} g_{xyi} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서,

$$g_{0i} = g_{00i} \quad (6.1)$$

$$g_{xi} = g_{10i} \frac{\partial x}{\partial \xi} + g_{01i} \frac{\partial x}{\partial \eta} + g_{11i} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \quad (6.2)$$

$$g_{yi} = g_{10i} \frac{\partial y}{\partial \xi} + g_{01i} \frac{\partial y}{\partial \eta} + g_{11i} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \quad (6.3)$$



$$g_{xyi} = g_{11i} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \quad (6.4)$$

(x, y) 좌표계와 (ξ, η) 좌표계 사이에서 기저 함수의 변환을 아래와 같이 정의한다.

$$\underline{g}_i = \hat{\underline{g}}_i \mathbf{T}^g \quad (7)$$

여기서 $\underline{g}_i = (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi} \ g_{xyi})$, $\hat{\underline{g}}_i = (g_{00i} \ g_{10i} \ g_{01i} \ g_{11i})$ 이며, 변환 행렬 \mathbf{T}^g 는 다음과 같다.

$$\mathbf{T}^g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (8)$$

일반적인 변환 도함수 행렬(Jacobian) \mathbf{J} 는 아래와 같다.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

따라서 \mathbf{J}^{-1} 는 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (9.2)$$

여기서, $\Delta = \det \mathbf{J} = J_{11}J_{22} - J_{21}J_{12}$ 이다.

식 (8)에서 보인 도함수들은 라그랑지안(lagrangian) 함수를 이용하여 근사화하고, 요소 면적의 계산에는 식 (9)의 행렬식을 이용하기로 한다. 요소를 정의하는 기하학적 자료들은 (x, y) 의 좌표값들이 일반적이고 이들의 기울기는 잘 사용되지 않는다. 따라서 기하학적 근사는 해의 근사보다 오차를 더 많이 유발할 수 있으며, 이러한 접근법을 sub-parametric 방법이라 한다. 영역이 직선이나 2차 곡선 정도로 잘 근사시킬 수 있으면 sub-parametric 방법을 사용하더라도 해의 수렴이나 정밀도에는 영향을 미치지 않는 것으로 알려져 있다.

2.2 회전(solenoidal) 보간 함수

$\psi^e(x, y)$ 를 요소 내에서 유동 함수라면 $\psi^e(x, y)$ 는 벡터 포텐셜(유동함수)의 기저 함수 \underline{s}_i 및 요소의 자유도 $\underline{\Psi}_i^e$ 에 의하여

$$\psi^e(x, y) = \sum_{i=1}^n \underline{s}_i(x, y) \underline{\Psi}_i^e \quad (10)$$

으로 구한다. 여기서

$$\underline{\Psi}_i^e = (\Psi_i, U_i, V_i, \partial^2 \Psi_i / \partial x \partial y)^t \quad (11)$$

이며, 이를 hermite 쌍 3차 함수에 대한 자유도와 비교하면

$$\underline{\Psi}_i^e = (\Psi_i, \partial \Psi_i / \partial y, -\partial \Psi_i / \partial x, \partial^2 \Psi_i / \partial x \partial y)^t \quad (12)$$

이 된다. 따라서 $\underline{s}_i(x, y)$ 는 \underline{g}_i 를 재배열하여 다음과 같이 둔다.

$$\underline{s}_i = (g_{0i} \ g_{yi} - g_{xi} \ g_{xyi}) \quad (13)$$

\underline{s}_i 의 정의와 유사하게 $\hat{\underline{s}}_i$ 도

$$\hat{\underline{s}}_i = (g_{00i} \ g_{01i} - g_{10i} \ g_{11i}) \quad (14)$$

로 두면, 변환 행렬 \mathbf{T}^s 를 이용하여 \underline{s}_i 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\underline{s}_i(x, y) = \hat{\underline{s}}_i(\xi, \eta) \mathbf{T}^s \quad (15)$$

여기서 \mathbf{T}^s 는 다음과 같다.

$$\mathbf{T}^s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} & -\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (16)$$

속도 벡터 $\underline{u}^e(x, y)$ 는 유동함수 $\psi^e(x, y)$ 에 curl을 적용함으로써 얻어진다. 따라서

$$\begin{aligned} \underline{u}^e(x,y) &= \nabla \times \psi^e(x,y) \hat{k} \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} (\partial/\partial y)(g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi} \ g_{xyi}) \\ (-\partial/\partial x)(g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi} \ g_{xyi}) \end{pmatrix} \underline{\Psi}_i^e \end{aligned} \quad (17)$$

회전 속도에 대한 보간 함수를 $S_i(x,y)$, $i = 1, \dots, 4$ 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} S_i(x,y) &= \begin{pmatrix} (\partial/\partial y)(g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi} \ g_{xyi}) \\ (-\partial/\partial x)(g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi} \ g_{xyi}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S_{11i} & S_{12i} & S_{13i} & S_{14i} \\ S_{21i} & S_{22i} & S_{23i} & S_{24i} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

(ξ, η) 좌표계에서의 회전 보간 함수를 $\hat{S}_i(\xi, \eta)$ 라 두면 $S_i(x,y)$ 는 다음과 같은 변환 관계가 있다.

$$S_i(x,y) = (1/\Delta) \mathbf{J} \hat{S}_i(\xi, \eta) \mathbf{T}^s \quad (19)$$

(x,y) 좌표계에서의 도함수들, $\partial S_i(x,y)/\partial x$ 와 $\partial S_i(x,y)/\partial y$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_i(x,y)}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{J} \hat{S}_i(\xi, \eta) \mathbf{T}^s \\ &= \frac{\mathbf{J}}{\Delta^2} \left(\frac{\partial \hat{S}_i}{\partial \xi} J_{22} - \frac{\partial \hat{S}_i}{\partial \eta} J_{21} \right) \mathbf{T}^s \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_i(x,y)}{\partial y} &= \frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{J} \hat{S}_i(\xi, \eta) \mathbf{T}^s \\ &= \frac{\mathbf{J}}{\Delta^2} \left(-\frac{\partial \hat{S}_i}{\partial \xi} J_{12} + \frac{\partial \hat{S}_i}{\partial \eta} J_{11} \right) \mathbf{T}^s \end{aligned} \quad (21)$$

$\hat{S}_i(\xi, \eta)$, $\partial \hat{S}_i(\xi, \eta)/\partial \xi$ 및 $\partial \hat{S}_i(\xi, \eta)/\partial \eta$ 는 부록(A)에 정리하였다. 이들을 이용하여 요소 내의 속도 $\underline{u}^e(x,y)$, $\partial \underline{u}^e/\partial x$ 그리고 $\partial \underline{u}^e/\partial y$ 는 아래와 같이 구한다.

$$\underline{u}^e(x,y) = \sum_{i=1}^4 S_i(x,y) \underline{\Psi}_i^e \quad (22.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \underline{u}^e(x,y) = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial x} S_i(x,y) \underline{\Psi}_i^e \quad (22.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \underline{u}^e(x,y) = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial y} S_i(x,y) \underline{\Psi}_i^e \quad (22.3)$$

이렇게 구해진 속도 $\underline{u}^e(x,y)$ 가 무발산임을 검증하는 것은 어렵지 않다. 그러나 인접 요소 간에 속도의 연속성이 유지되는지는 검증할 필요가 있다. 부록 (B)에 요소 영역이 $[-1, 1] \times [-1, 1]$ 인 두 요소에 대하여 hermite 단순 3차 함수와 hermite 쌍 3차 함수의 사용에 대한 속도의 연속성을 조사하였다. 여기서 우리는 hermite 단순 3차 함수에 의한 속도의 수직 방향 성분은 경계에서 연속이나 접선 방향 성분은 연속이 아님을 본다. 또 hermite 쌍 3차 함수에 의한 수직 및 접선 방향 성분들은 모두 연속임을 알 수 있다.

2.3 비회전(irrotational) 보간 함수

비회전 속도 성분들은 스칼라 포텐셜($\phi(x,y)$)의 구배 (gradient)로부터 얻을 수 있다. 스칼라 포텐셜($\phi(x,y)$)의 보간 함수는 2.1절에서 보인 hermite 쌍 3차 함수인 $g_i(x,y)$ 이다. 임의 사변형에서 $\phi^e(x,y)$ 는 식(5)와 같이 구해진다.

비회전 기저 함수, $\mathbf{G}_i(x,y)$, 는 스칼라 포텐셜, $\phi^e(x,y)$, 의 구배를 취하여 구하면 된다. 따라서,

$$\begin{aligned} \nabla \phi^e(x,y) &= \sum_{i=1}^4 \nabla (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi} \ g_{xyi}) \underline{\Phi}_i^e \\ &= \sum_{i=1}^4 \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi} \ g_{xyi}) \\ \frac{\partial}{\partial y}(g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi} \ g_{xyi}) \end{pmatrix} \underline{\Phi}_i^e \end{aligned} \quad (23)$$

요소 내에서 $\nabla \phi^e(x,y) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{G}_i(x,y) \underline{\Phi}_i^e$ 로 근사화되기 때문에 비회전 기저 함수, $\mathbf{G}_i(x,y)$, 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_i(x,y) &= \begin{pmatrix} G_{11i} & G_{12i} & G_{13i} & G_{14i} \\ G_{21i} & G_{22i} & G_{23i} & G_{24i} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi} \ g_{xyi}) \\ \frac{\partial}{\partial y}(g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi} \ g_{xyi}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

$\mathbf{G}_i(x,y)$ 와 $\nabla \mathbf{G}_i(x,y)$ 의 실제적 계산은 다음과 같이 할 수 있다.

$$\mathbf{G}_i(x,y) = \mathbf{J}^{-t} \hat{\mathbf{G}}_i(\xi, \eta) \mathbf{T}^g \quad (25.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}_i(x,y)}{\partial x} = \frac{\mathbf{J}^{-t}}{\Delta} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{G}}_i}{\partial \xi} J_{22} - \frac{\partial \hat{\mathbf{G}}_i}{\partial \eta} J_{21} \right) \mathbf{T}^g \quad (25.2)$$



$$\frac{\partial G_i(x,y)}{\partial y} = \frac{J^{-t}}{\Delta} \left(-\frac{\partial \hat{G}_i}{\partial \xi} J_{12} + \frac{\partial \hat{G}_i}{\partial \eta} J_{11} \right) T^g \quad (25.3)$$

$\hat{G}_i(\xi,\eta), \partial \hat{G}_i(\xi,\eta)/\partial \xi$ 및 $\partial \hat{G}_i(\xi,\eta)/\partial \eta$ 는 부록(B)에 정리하였다.

3. 수치 계산

3.1 무발산 요소의 정식화

임의 사변형 요소에서 식 (3.1)과 식 (3.2)에 대하여 Galerkin 잔여치법을 적용하기로 한다. 식 (3.1)의 시간항 $(\underline{v}, \frac{\partial}{\partial t} \underline{u})$ 에 대한 요소 행렬을 M_{ij}^e , 대류항 $(\underline{v}, \underline{u} \cdot \nabla \underline{u})$ 에 대한 요소 행렬을 C_{ij}^e , 소산항 $\nu(\nabla \underline{v}, \nabla \underline{u})z$ 에 대한 요소 행렬을 D_{ij}^e , 그리고 외력의 회전(solenoidal) 성분을 \underline{f}_i^e 라 하면 다음과 같다.

$$M_{ij}^e = \int_{\Omega_e} S_i^t S_j d\Omega_e \quad (26.1)$$

$$C_{ij}^e = \int_{\Omega_e} S_i^t \left(u \frac{\partial S_j}{\partial x} + v \frac{\partial S_j}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad (26.2)$$

$$D_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \nu \left(\frac{\partial S_i^t}{\partial x} \frac{\partial S_j}{\partial x} + \frac{\partial S_i^t}{\partial y} \frac{\partial S_j}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad (26.3)$$

$$\underline{f}_i^e = \int_{\Omega_e} S_i^t \underline{f}^s d\Omega_e \quad (26.4)$$

여기서 위첨자 t 및 s는 각각 전치 행렬과 회전 성분을 의미하며, 요소의 자유도, Ψ_i^e ,는 식 (11)과 같다.

식 (3.2)는 압력에 대한 변분식으로 이의 유한 요소 전개는 다음과 같이 한다. 압력항 $(\underline{w}, \nabla p)$ 에 대한 요소 행렬을 \bar{M}_{ij}^e , 대류항 $(\underline{w}, \underline{u} \cdot \nabla \underline{u})$ 에 대한 요소 행렬을 \bar{C}_{ij}^e , 소산항 $\nu(\nabla \underline{w}, \nabla \underline{u})$ 에 대한 요소 행렬을 \bar{D}_{ij}^e , 그리고 외력 $(\underline{w}, \underline{f}^i)$ 의 비회전 성분을 $\bar{\underline{f}}_i^e$ 라 하면 다음과 같이 된다.

$$\bar{M}_{ij}^e = \int_{\Omega_e} G_i^t G_j d\Omega_e \quad (27.1)$$

$$\bar{C}_{ij}^e = \int_{\Omega_e} G_i^t \left(u \frac{\partial S_j}{\partial x} + v \frac{\partial S_j}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad (27.2)$$

$$\bar{D}_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \nu \left(\frac{\partial G_i^t}{\partial x} \frac{\partial S_j}{\partial x} + \frac{\partial G_i^t}{\partial y} \frac{\partial S_j}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad (27.3)$$

$$\bar{\underline{f}}_i^e = \int_{\Omega_e} G_i^t \underline{f}^i d\Omega_e \quad (27.4)$$

식 (26)과 식 (27)을 이용하여 요소 방정식에 대한 무발산 유한 요소 정식화 과정을 수행하고, 이들을 조합하여 전체 행렬 방정식을 구성하게 된다.

3.2 덮개 움직임에 의한 공동(lid driven cavity) 유동

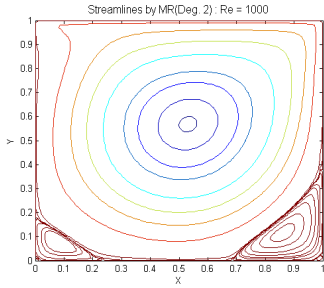
유동 해석의 새로운 기법들은 대체로 Ghia 등[6]의 공동(cavity) 유동에 대한 수치 결과들과 비교하여 종종 검증하는 관계로 본 연구에서도 이 문제에 대하여 살펴보기로 하였다. 비교할 레이놀즈(Re) 수는 1000으로 하고, 요소의 수는 32 x 32의 균일 요소로 하였다. 그리고 현재의 hermite 쌍 3차 함수에 의한 무발산 요소법(HBC)의 계산 결과를 이차 요소를 이용한 수정 잔여치법(MR(2))[7]과 hermite serendipity 3차 함수에 의한 무발산 요소법(HSC)[9]의 결과들과 비교 검토하기로 한다.

수정 잔여치법은 본 학회지[8]에 다단계 부분구조법과 함께 소개된 바가 있으며, 이는 비압축성 유동 방정식의 유한 요소 계산에서 잔여치(residual)의 섭동을 이용하여 무발산 혹은 연속 방정식의 구속 조건을 완화하고자 하는 방법이다. 이 알고리즘은 잘 알려진 Hughes와 Brooks[9]의 Streamline Upwind Petrov Galerkin(SUPG)과 일맥상통하며 Illinca 등은 이를 토대로 압력 방정식의 좌변 행렬을 유도하여 비압축성 유동 계산에 적용한 바 있다.

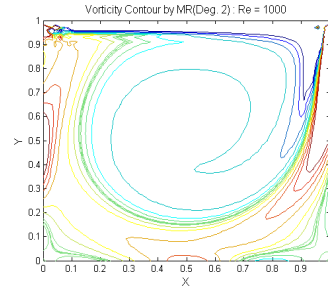
현재의 연구에서는 1) 유선 분포, 2) 와도 분포, 3) 압력 분포를 통하여 무발산 요소법의 수행을 보기로 한다.

1) 유선 분포 : Fig. 1(a), (b), (c)에 수정 잔여치법(MR(2)), 무발산 요소법 HSC 및 HBC에 의한 결과들을 각각 나타내었다. 좌측 상단의 이차 유동의 시작, 아래쪽 좌우의 이차 유동의 형태는 Ghia 등이 제시한 결과들과 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 그러나 중심에 위치한 와류(vortex)의 크기가 수정 잔여치법과 무발산 요소법(HSC와 HBC) 사이에 차이가 있음을 볼 수 있다. 수정 잔여치법의 경우, Ghia 등에서 보여주는 크기와 비슷하나 등고선이 다소 완만함을 볼 수 있으며, 실제로 등고선의 개수가 하나 모자람을 알 수 있었다. 따라서 이 기법은 속도 값들을 너무 smoothing하고 있지 않는가하는 의심이 든다.

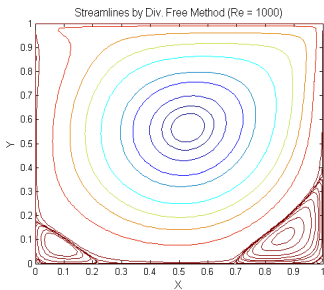
2) 와도 분포 : Fig. 2(a), (b), (c)에 수정 잔여치법(MR(2))과 무발산 요소법들(HSC 및 HBC)에 의한 와도의 등고선



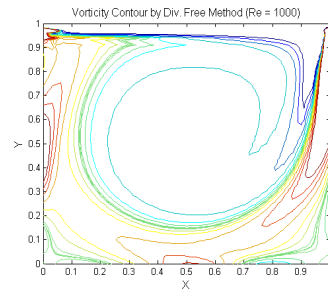
(a)



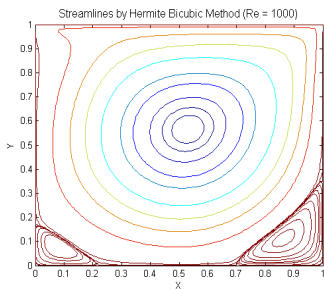
(a)



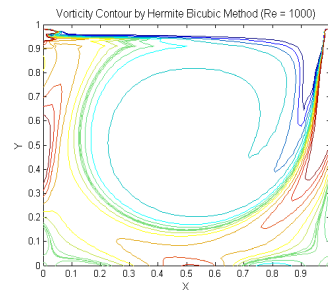
(b)



(b)



(c)



(c)

Fig. 1 Streamline contours by (a) MR(Deg. 2), (b) HSC, (c) HBC

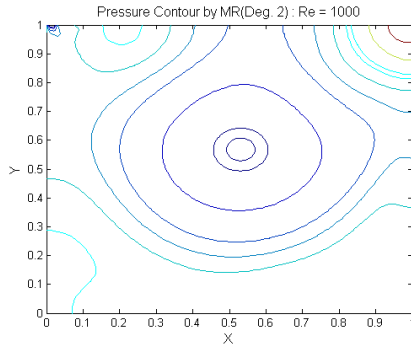
Fig. 2 Vorticity contours by (a) MR(Deg. 2), (b) HSC, (c) HBC

도를 각각 나타내었다. 좌측 상단에는 약간의 위글(wiggle)을 보이고 있으며, 그 정도는 MR(2)의 경우가 가장 심하다. 특히 MR(2)의 경우는 우측 상단에도 약간의 위글을 보여주고 있다. HSC와 HBC의 와도 분포는 구별할 수 없을 정도로 서로 일치하며 보고된 결과와도 잘 일치하고 있다. Table 1와 2에 각각 중심 수평선과 중심 수직선을 따라 Botella 등[12]이 제시한 값들과 비교하였다. 이를 보면 HSC와 HBC의 값들은 MR(2)의 값보다 Botella 등이 제시한 값들에 더 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

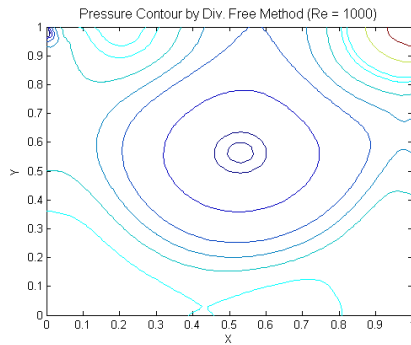
- 3) 압력 분포 : Fig. 3(a), (b), (c)에는 압력 등고선을 레이놀즈 수 1,000에 대하여 나타내었고, Table 3, 4에는 Botella 등[8]이 제시한 압력 값들과 더불어 MR(2), HSC

및 HBC에 의한 압력 값들을 나타내었다. Fig. 3의 (a)는 MR(2)에 의한 압력 분포로서 (b)와 (c)에 나타난 압력 분포와 상당한 차이를 보인다. MR(2)의 압력 형상은 무발산 요소들에 의한 형상보다 다소 완만한 곡선 형태를 보인다. HSC와 HBC에 의한 압력 분포는 하변 중앙의 조그마한 차이를 제외하고는 일치하고 있음을 볼 수 있다.

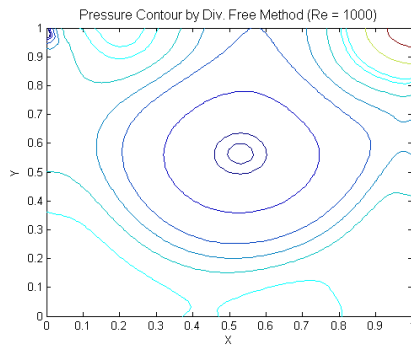
HBC에 의한 압력은 식 (27.1)~(27.4)에 의하여 구하며, 회전 및 비회전 기저 함수는 hermite serendipity cubic(HSC) 함수에 의한 것을 사용하였다. 이 경우, 데이터 즉 속도는 hermite bicubic(HBC)에 의한 회전 기저 함수에 의하여 구하였기에 현재의 압력 분포에는 아래 측에 HSC의 압력 분포와 그 차이를 보여주는 것으로 보인다. Hermite BiCubic(HBC) 함수를 이



(a)



(b)



(c)

Fig. 3 Pressure contours by (a) MR(Deg. 2), (b) HSC, (c) HBC

용하여 무발산 요소를 구성하더라도 압력 계산에서 비회전 기저 함수를 hermite serendipity 함수에 의한 기저 함수를 사용하는 이유에 대하여는 현재 밝혀진 것은 없으나, 압력 공간은 속도 혹은 데이터 공간보다 더 부드럽기 때문이 아닐까하고 추측해 본다.

Table 3과 4에는 MR(2), HSC 및 HBC에 의한 압력 값들을 Botella 등[12]의 값들과 비교하였다. HSC와 HBC의 값들은 서로 비슷하며 MR(2)의 값들보다 Botella 등의 값에 더 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

Table 1 Vorticity along horizontal centerline.

y-coord.	$\omega(0.5, y)$			
	MR(2)	HSC	HBC	Ref.[8]
1.0	-17.327	-16.278	-16.346	-14.753
0.96875	-8.7497	-8.9218	-8.8991	-9.4950
0.95313	-5.0738	-5.1937	-5.1966	-4.8575
0.73438	-2.0416	-2.0947	-2.0950	-2.0912
0.5	-2.0190	-2.0723	-2.0711	-2.0672
0.28125	-2.2425	-2.2755	-2.2788	-2.2677
0.10156	1.6611	1.6420	1.6351	1.6344
0.06250	2.1761	2.2801	2.2761	2.3179

Table 2 Vorticity along vertical centerline.

x-coord	$\omega(x, 0.5)$			
	MR(2)	HSC	HBC	Ref.[8]
0.07031	1.4810	1.5120	1.5153	1.5031
0.09375	0.7711	0.7785	0.7780	0.8240
0.22656	-1.9264	-2.0115	-2.0054	-2.0017
0.5	-2.0190	-2.0723	-2.0711	-2.0672
0.85938	-3.2973	-3.4317	-3.4270	-3.4302
0.94531	6.3904	6.4949	6.4769	6.5087
0.96094	7.8318	8.2261	8.2637	8.2462

Table 3 Pressure along horizontal centerline.

y-coord	$p(.5, y)$			
	MR(2)	HSC	HBC	Ref.[8]
1.0	0.049456	0.055153	0.055247	0.052987
0.96875	0.048342	0.053073	0.053145	0.051514
0.95313	0.047183	0.051878	0.051943	0.050329
0.73438	0.011035	0.012622	0.012675	0.012122
0.5	0.0	0.0	0.0	0.0
0.28125	0.039235	0.040511	0.040451	0.040377
0.10156	0.099639	0.104723	0.10441	0.104187
0.06250	0.104017	0.109791	0.10943	0.109200
0.00000	0.105290	0.111272	0.11093	0.110591

Table 4 Pressure along vertical centerline.

x-coord	$p(x, .5)$			
	MR(2)	HSC	HBC	Ref.[8]
0.0	0.086195	0.090264	0.090094	0.090477
0.07031	0.083376	0.087335	0.087140	0.087653
0.09375	0.080303	0.084068	0.083907	0.084386
0.22656	0.045141	0.046908	0.046926	0.047260
0.5	0.0	0.0	0.0	0.0
0.85938	0.048823	0.049263	0.049121	0.049029
0.94531	0.073477	0.077613	0.077373	0.077154
0.96094	0.074871	0.079336	0.079082	0.078685
1.0	0.074496	0.078061	0.077749	0.077455



4. 결 론

최근 Holdeman[2-4]은 hermite serendipity 함수에 의하여 보 간된 유동 함수로부터 회전 기저 함수를 쉽게 추출할 수 있었으며, 이를 토대로 일반적 회전 기저 함수를 구성할 수 있음을 보였다. 이 회전 기저 함수를 이용하여 속도 성분들을 구하면 요소 경계에서 접선 성분은 인접 요소의 접선 성분과 일반적으로 일치하지 않는다. 즉, 속도의 접선 성분은 연속성을 잃어버린다. 이 연구에서는 hermite 쌍 3차 함수를 이용하면 이러한 결점을 보완할 수 있음에 주목하여 hermite 쌍 3차 함수를 이용한 회전 및 비회전 기저 함수를 구성하여 잘 알려진 달개 움직임에 의한 공동(lid-driven cavity) 유동의 문제를 통하여 풀이하여 보았다. Hermite 쌍 3차함수에 의한 결과가 serendipity 3차 함수에 의한 결과보다 더 우수하리라고 기대하였으나, 해의 정확도는 거의 동일하였다. 그리고 압력장 해석에서 Hermite 쌍 3차 함수에 의한 비회전 기저 함수는 극심한 해의 진동을 유발하였으며, 이를 위하여 hermite serendipity 3차 함수에 의한 비회전 기저 함수를 사용하여 풀이하였다.

최근에는 무발산 구속 조건이 야기하는 부정형 행렬의 어려움을 극복하기 위하여 잔여치의 섭동을 이용한 안정화된 유한 요소법의 연구가 진행되고 있으며, 달개 움직임에 의한 공동 유동 문제를 통하여 안정화된 유한 요소법과 무발산 요소들(HSC 및 HBC)에 의한 결과들을 비교하여 보았다. 그 결과, 현재의 무발산 요소에 의한 방법(HSC 및 HBC)은 적당한 레이놀즈 수의 유동에서 이미 보고된 결과들과 잘 일치하고 있음을 보여주었다. 안정화 유한 요소법에 의한 결과와 비교한 결과, 현재의 무발산 요소(HSC 및 HBC)는 적어도 이차 요소 이상의 정확도를 가지고 있는 것으로 파악된다. 특히, 안정화 유한 요소법들은 모두 내재적 시간 변수라는 매개 변수 값의 결정을 요구하며 이는 결코 쉽지 않다.

이차원에서는 스칼라 유동 함수를 이용하여 속도를 구할 수 있으나 삼차원에서는 벡터 포텐셜을 이용하여 속도를 구하여야 한다. 따라서 이차원의 개념이 직접적으로 삼차원으로 확장되지 못하는 어려움이 있으며, 현재 이에 대한 연구가 진행 중에 있다.

부록(A) : 인접 요소 간의 속도의 연속성

Fig. A1에는 인접한 두 요소 (A)와 (B)를 보여주며, 요소 (A)의 점(0, -1)은 요소 (B)의 점(0, 1)과 일치한다.

Hermite Serendipity 3차 함수의 경우 :

요소 (A)의 점 $(\xi, \eta) = (0, -1)$ 에서 회전 보간 함수 $\hat{S}_i^{(A)}$

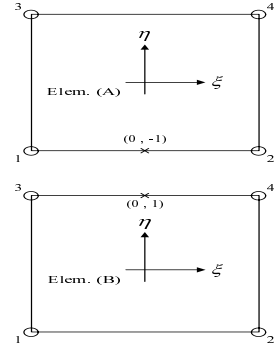


Fig. A1 Two adjacent elements (A) and (B)

는 다음과 같다.

$$\hat{S}_i^{(A)} = \begin{pmatrix} 0 & (1-\eta_i)/4 & \xi_i\eta_i/8 \\ -\xi_i/8(1-\eta_i)(2-\eta_i) & 0 & -1/8(1-\eta_i) \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

요소 절점 i 에서 자유도는 $(\Psi U V)_i$ 이며 속도 $(uv)^t$ 는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{(A)} = \begin{pmatrix} (V_1 - V_2 - V_3 + V_4)/8 + (U_1 + U_2)/2 \\ (3/4)(\Psi_1 - \Psi_2) - (V_1 + V_2)/4 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

요소 (B)의 점 $(\xi, \eta) = (0, -1)$ 에서 회전 보간 함수 $\hat{S}_i^{(B)}$ 는 다음과 같다.

$$\hat{S}_i^{(B)} = \begin{pmatrix} 0 & (1+\eta_i)/4 & \xi_i\eta_i/8 \\ -\xi_i/8(1+\eta_i)(2+\eta_i) & 0 & -1/8(1+\eta_i) \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

요소 절점 i 에서 자유도는 $(\Psi U V)_i$ 이며 속도 $(uv)^t$ 는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{(B)} = \begin{pmatrix} (V_1 - V_2 - V_3 + V_4)/8 + (U_3 + U_4)/2 \\ (3/4)(\Psi_3 - \Psi_4) - (V_3 + V_4)/4 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

식 (A.2)와 식 (A.4)를 살펴보면 수직성분 v 는 $v^{(A)} = v^{(B)}$ 이지만 수평성분 u 는 $u^{(A)} \neq u^{(B)}$ 이다. 따라서 인접 요소간의 경계에 수직하는 방향 성분은 연속적이거나 접하는 방향 성분은 연속적이지 않음을 알 수 있다.



Hermite 쌍 3차 함수의 경우 :

요소 (A)의 점 $(\xi, \eta) = (0, -1)$ 에서 회전 보간 함수 $\hat{S}_i^{(A)}$ 는 다음과 같다.

$$\hat{S}_i^{(A)} = \begin{pmatrix} 0 & (1 - \eta_i)/4 \\ -\frac{3\xi_i}{16}(\eta_i - 1)^2 \times (\eta_i + 2) & \frac{3\xi_i\eta_i}{16}(\eta_i - 1)^2 \times (\eta_i + 1) \\ 0 & -\xi_i(1 - \eta_i)/8 \\ \frac{-1}{16}(\eta_i - 1)^2 \times (\eta_i + 2) & \frac{-\eta_i}{16}(\eta_i - 1)^2 \times (\eta_i + 1) \end{pmatrix} \quad (A.5)$$

요소 절점 i 에서 자유도는 $(\Psi UVP)_i$ 이며 속도 $(u v)^t$ 는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{(A)} = \begin{pmatrix} (U_1 + U_2)/2 + (P_1 - P_2)/4 \\ (3/4)(\Psi_1 - \Psi_2) - (V_1 + V_2)/4 \end{pmatrix} \quad (A.6)$$

요소 (B)의 점 $(\xi, \eta) = (0, -1)$ 에서 회전 보간 함수 $\hat{S}_i^{(B)}$ 는 다음과 같다.

$$\hat{S}_i^{(B)} = \begin{pmatrix} 0 & (1 + \eta_i)/4 \\ \frac{3\xi_i}{16}(\eta_i + 1)^2 \times (\eta_i - 2) & \frac{-3\xi_i\eta_i}{16}(\eta_i + 1)^2 \times (\eta_i - 1) \\ 0 & -\xi_i(1 + \eta_i)/8 \\ \frac{1}{16}(\eta_i + 1)^2 \times (\eta_i - 2) & \frac{\eta_i}{16}(\eta_i + 1)^2 \times (\eta_i - 1) \end{pmatrix} \quad (A.7)$$

요소 절점 i 에서 자유도는 $(\Psi UVP)_i$ 이며 속도 $(u v)^t$ 는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{(B)} = \begin{pmatrix} (U_3 + U_4)/2 + (P_3 - P_4)/4 \\ (3/4)(\Psi_3 - \Psi_4) - (V_3 + V_4)/4 \end{pmatrix} \quad (A.8)$$

식 (A.6)과 식 (A.8)으로 수직성분 v 와 수평성분 u 는 각각 $v^{(A)} = v^{(B)}$ 및 $u^{(A)} = u^{(B)}$ 로 속도의 각 성분들이 연속적임을 알 수 있다.

참고문헌

- [1] 1977, Pozrikidis, C., *Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Oxford University Press.
- [2] 2002, Holdeman, J.T., "Recent Advances in the Finite Element Method for Incompressible Flow," *USNCTAM14 Conference*, Blacksburg, VA.
- [3] 2004, Holdeman, J.T., "I. Some Lagrange Interpolation functions for solenoidal and irrotational vector fields," manuscript, submitted to *Mathematics of Computation*.
- [4] 2004, Holdeman, J.T., "II. Some Hermite Interpolation functions for solenoidal and irrotational vector fields," manuscript, submitted to *Mathematics of Computation*.
- [5] 1982, Lapidus, L. and Pinder, G.F., *Numerical solution of Partial Differential Equations in Sciences and Engineering*, John Wiley & Sons, Inc.
- [6] 1982, Ghia, U., Ghia, K.N. and Shin, C.T., "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method," *J. of Comp. Physics*, Vol.48, pp.387-411.
- [7] 2000, Ilinca, F., Hetu, J.F. and Pelletier, D., "On stabilized finite element formulations for incompressible advective-diffusive transport and fluid flow problems," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.188, pp.235-255.
- [8] 2005, 김진환, "유동계산을 위한 다단계 부분 구조법에 대한 연구," *한국전산유체공학회*, 제10권, 제2호, pp.38-47.
- [9] 2007, 김진환, "Hermite 유동함수를 이용한 비압축성 유동 계산," *한국전산유체공학회*, 제12권, 제1호, pp.35-42.
- [10] 1979, Hughes, T.J.R. and Brooks, A.N., "A Multi-dimensional upwind scheme with no crosswind diffusion," Hughes, T.J.R. (Ed.), *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, Vol.34, ASME, New York, pp.19-35.
- [11] 1981, Griffiths, D.F., "An Approximately Divergence-Free 9-Node Velocity Element (With Variations) For Incompressible Flows," *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, Vol.1, pp.323-346.
- [12] 1998, Botella, O. and Peyret, R. "Benchmark Spectral Results on the Lid-driven Cavity Flow," *Computers & Fluids*, Vol.27, No.4, pp.421-433.