

중곡선의 정밀식과 완화곡선에 관한 연구

A Study for Precision Equation and Transition curve of Vertical Curve

신순호* 김용을**

Shin, Soon-Ho Kim, Yong-Eul

ABSTRACT

The vertical curve of railway is installed in changing point where the gradient is more than a certain degree to ensure safe operation of train and comfort of passengers. As a result of CAD work with 3D coordination by using the existing equation, it was found that the simple equation about vertical curve installation suggested in the surveying engineering or railway regulations did not reflect theoretical curvature of circular curve in a case of steep grade and large vertical radius.

In this study, for derive precision equation and transition curve about vertical curve, gradient parameters, equation of circles and transition curve equation were used, and it was verified by CAD that the derived equation is exactly satisfied with parameters of geometrical circular and transition curve.

This equation could be used to provide more smoothing operation of train and comfort of passengers on vertical curves, especially in case that railway requires precision vertical alignment of track such as super high-speed railway, LRT or Maglev system.

1. 서론

철도의 중곡선은 일정 기울기 이상의 차이가 나는 기울기 변경점 구간에 일정 이상의 곡선반경을 설치하여 열차의 안전운행과 승객의 승차감을 보장하는 곡선으로서 지금까지 사용해온 식을 사용하여 3차원 좌표로 CAD화 작업 중 기존의 측량학이나 노선관련규정에 제시된 중곡선 설치에 관한 식이 간략식으로 되어있어 기울기가 크고 중곡선 반경이 큰 경우 원곡선의 이론적 곡률을 정밀하게 반영하지 못하고 있음을 발견하였다.

따라서, 이 논문에서는 기울기 요소와 원의공식, 완화곡선식을 사용하여 중곡선에 관한 정밀식과 완화곡선 설치 방법을 연구하였으며 유도된 식이 기존의 식에 비하여 기하학적 원곡선과 완화곡선이 갖는 요소에 정확하게 만족하고 있음을 CAD상으로도 확인하였다.

이 식은 기울기가 크고 중곡선 반경이 큰 경우의 중곡선 계산에 유효하게 사용될 수 있으며 초고속 철도나 LRT 또는 자기부상철도와 같은 정밀한 궤도선형을 요구하는 중곡선의 경우에는 좀 더 원활한 열차운행과 편안한 승차감을 제공할 것으로 기대한다.

* (주)한국철도기술공사, 궤도설계부, 정회원

E-mail : shin1913@empal.com

TEL : (02)2186-1913 FAX : (02)2186-1994

** (주)한국철도기술공사, 궤도설계부

2. 종곡선의 종류와 기호정의

2.1 종곡선의 종류

종곡선의 종류로는 그림1.에서 보는 바와 같이 볼록형(Crest Type)과 오목형(Sag Type)으로 나눌 수 있다. 상향기울기와 하향 기울기가 서로 같을 경우에는 VBC에서 VPI까지의 현길이와 VPI에서 VEC까지의 현의 길이 L_1, L_2 가 동일하나 좌우 기울기가 서로 틀릴 경우에는 L_1, L_2 의 길이가 틀린 경우로서 대부분의 종곡선은 이러한 형태로 구성되어 있다.

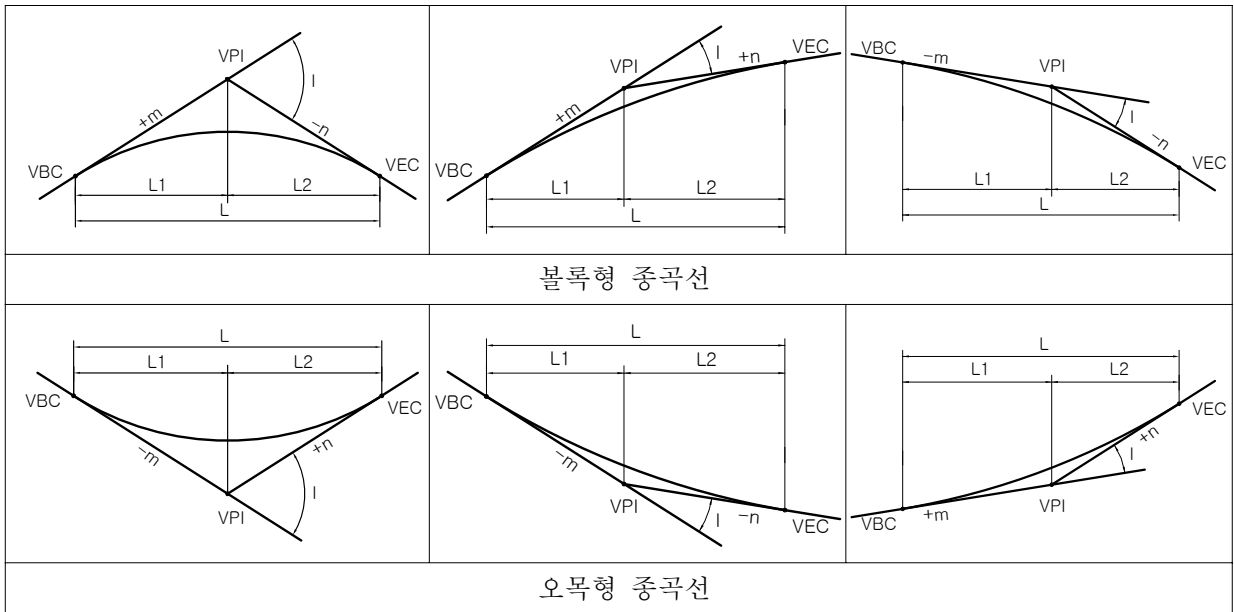


그림1. 종곡선의 종류

2.2 종곡선의 기호정의

기울기구간과 종곡선구간에서 고저(elevation)를 구하기 위한 이정거리(station)는 평면에서의 직선이 나 곡선과 달리 X축을 기준으로 이루어지며 종곡선의 기호에 대한 정의는 그림2.와 같다.

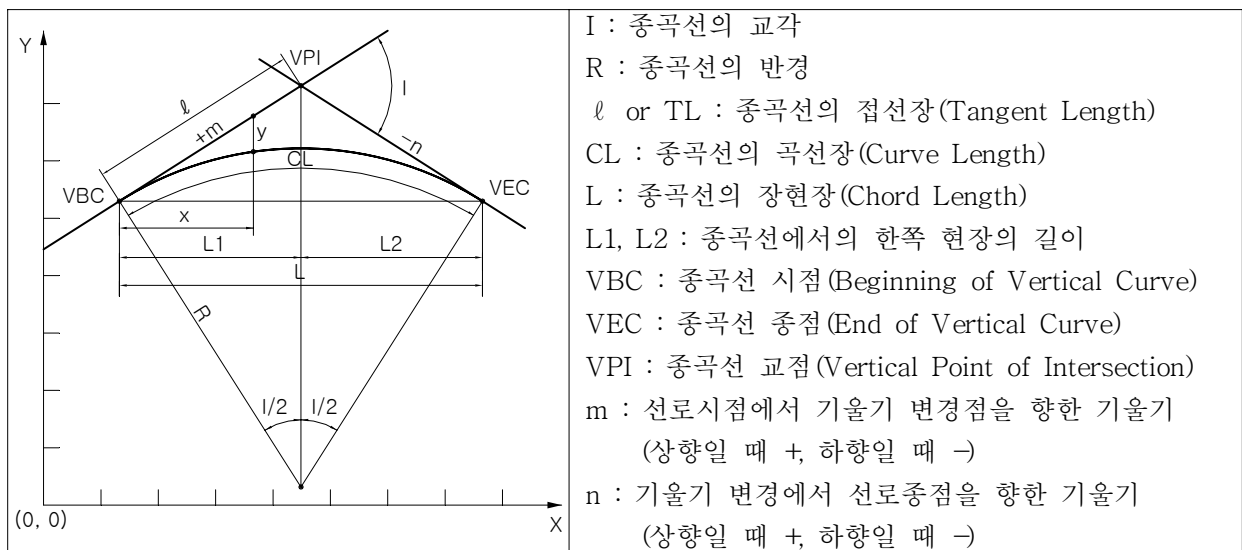


그림2. 종곡선의 기호 정의

3. 기존 종곡선 계산식의 유도과정과 간략화 내용

기존 종곡선 계산식의 유도과정과 간략화의 내용을 살펴 보면 다음과 같다.

곡선의 접선장을 구하는 식 $TL = R \cdot \tan \frac{I}{2}$ 이고,
 이때 종곡선의 교차각 $I = |\tan^{-1} \frac{m}{1000} - \tan^{-1} \frac{n}{1000}|$ 이다.
 I 값을 TL식에 대입하면

$$TL = R \cdot \tan \frac{I}{2} = |R \cdot \tan(\frac{\tan^{-1} \frac{m}{1000} - \tan^{-1} \frac{n}{1000}}{2})| \text{ 이}$$

고 이때, tangent 식을 간략화 하면 $TL = l \approx \frac{R}{2000}(m-n)$
 이 된다. 여기서, 접선장과 L/2의 길이가 비슷하다고 가정하
 면 $L \approx 2 \cdot l = \frac{R}{1000}(m-n)$(1) 로 된다.

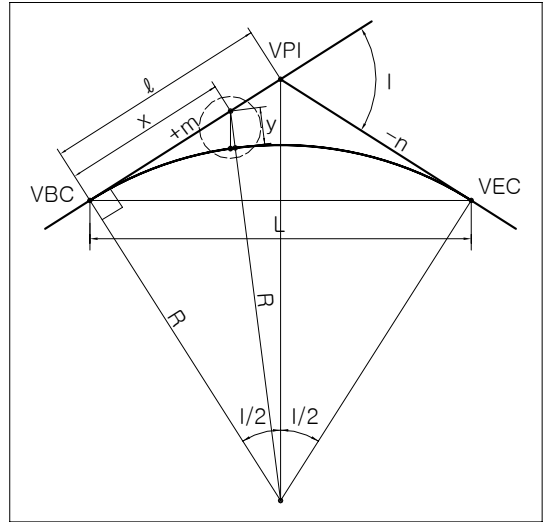


그림3. 종곡선 L과 y의 계산

곡선 외할의 길이 y를 구하는 식은 $R^2 + x^2 = (y + R)^2 = y^2 + 2yR + R^2$ 이고

여기서, y가 R에 비해 길이가 작다고 가정하고 $y^2 \approx 0$ 로 하면 $y = \frac{x^2}{2R}$ 로 된다.

곡선의 장현장 L을 이용하여 y를 구하는 또 다른 식은 $R = \frac{1000 \cdot L}{m-n}$ 일 때,

$$y = \frac{x^2}{2R} = \frac{m-n}{2000 \cdot L} x^2 \text{(2) 로 된다.}$$

이상 기존의 종곡선 계산식을 살펴본 바와 같이 ① 종곡선 장현의 길이, 외할의 길이를 구하는데 있어 간략식을 많이 채택하고 있고, 그림 3.에서 보는 바와 같이 ② x값의 경우 접선장의 길이와 장현의 길이 차이가 있고 ③ y값의 경우는 곡선 외할의 길이에서 사선의 길이와 직선의 길이에서 차이가 있게 된다. 또한, ④ 양쪽기울기의 차가 서로 틀릴 경우 L1, L2의 길이에서도 차이가 있게 된다.

4. 종곡선의 정밀식에 관한 검토

기존의 종곡선식은 좌우 대칭형을 가정으로 하고 식이 전개되었으나, 일반적인 종곡선 형태는 비대칭형이 대부분을 이루고 있다. 따라서, 이 연구에서는 비대칭이면서도 두개의 접선과 그 접선사이의 곡선반경에 대한 정밀한 곡률을 보장하기 위하여 원의 공식을 이용하는 데 착안하였다.

x축과 y축의 공간상에 +m 구배와, -n 구배의 사이에 들어가는 반경 R의 종곡선의 형태는 아래의 그림4.와 같고, 그 원의 공식은 (3)식과 같이 나타낼 수 있다.

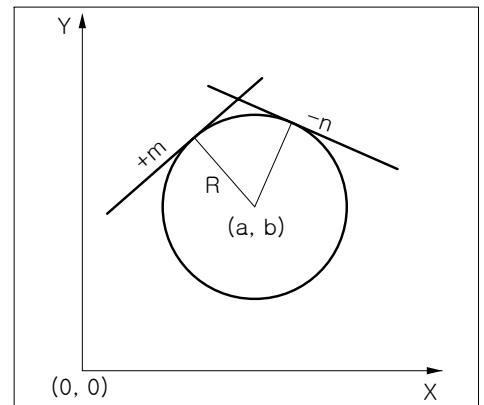


그림4. x축과 y축 공간상의 종곡선

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \text{(3)}$$

(3)식을 정리하면 다음과 같다.

$$y^2 - 2by + [x^2 - 2ax + a^2 + b^2 - R^2] = 0$$

이 이차함수의 y값을 근의 공식을 이용하여 정리하면 임의의 x 위치점에서 종곡선까지의 거리 y값은 (4)와 같이 구할 수 있다.

$$y = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4[x^2 - 2ax + a^2 + b^2 - R^2]}}{2}$$

$$y = b \pm \sqrt{R^2 - x^2 + 2ax - a^2} \dots\dots\dots(4)$$

(4)식에서 원의 중심점인 a, b는 그림5.에서 보는 바와 같이 다음과 같이 구할 수 있다.

$$a = R \times \cos(90 - \theta_1) \dots\dots\dots(5)$$

$$b = -R \times \sin(90 - \theta_1) \dots\dots\dots(6)$$

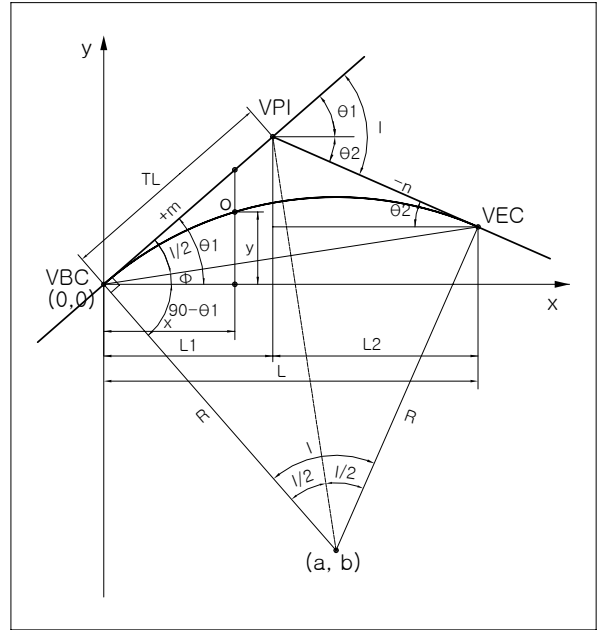


그림5. 종곡선 정밀식의 기하

따라서, 임의의 x위치인 종곡선상 O점에서의 수준고(elevation)는 (4), (5), (6)식을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$O_{elevation} = VBC_{elevation} + \{b + \sqrt{R^2 - x^2 + 2ax - a^2}\} \dots\dots\dots(7)$$

기울기 요소를 사용한 종곡선 교각의 계산은 다음과 같다.

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{m}{1000}, \quad \theta_2 = \tan^{-1} \frac{n}{1000}, \quad \text{즉 } I = |\theta_1 - \theta_2|$$

종곡선의 접선장 $TL = R \cdot \tan \frac{I}{2}$ 이고, 비대칭 기울기에 따라 기울어진 각 $\phi = \theta_1 - \frac{I}{2}$ 이다.

이상에서 구한값을 이용하여 아래와 같이 범용으로 사용 가능한 파라미터인 장현장 L, VBC와 VEC점의 이정(station) 값들을 구할 수 있다.

$$L1 = TL \cdot \cos\theta_1 \dots\dots\dots(8)$$

$$L2 = TL \cdot \cos\theta_2 \dots\dots\dots(9)$$

$$L = L1 + L2 \dots\dots\dots(10)$$

$$VBC_{station} = VPI_{station} - L1 \dots\dots\dots(11)$$

$$VEC_{station} = VPI_{station} + L2 \dots\dots\dots(12)$$

기존식과 정밀식의 차이를 검증하기 위하여 기울기 +30%, -15%, 종곡선 반경 R=10,000과 기울기 +60%, -30%, 종곡선 반경 R=10,000 으로 L값과 y값을 비교 계산해본 결과는 도표1., 도표2.와 같다.

도표1. 기존식과 정밀식의 현장(chord length)의 차이

단위:m

+ 30%, -15%, R=10,000의 경우				+ 60%, -30%, R=10,000의 경우			
구분	정밀식	기존식	차이	구분	정밀식	기존식	차이
L1	224.886	225	0.114	L1	449.091	450	0.909
L2	224.962	225	0.038	L2	449.697	450	0.303
L	449.848	450	0.152	L	898.788	900	1.212

도표2. 기존식과 정밀식의 외할 y 값의 차이

+ 30%, -15%, R=10,000의 경우				+ 60%, -30%, R=10,000의 경우			
x	y1	y2	y1-y2	x	y1	y2	y1-y2
20	0.020	0.020	0.000	20	0.020	0.020	0.000
40	0.080	0.080	0.000	40	0.080	0.080	0.000
60	0.180	0.180	0.000	60	0.181	0.180	-0.001
80	0.320	0.320	0.000	80	0.322	0.320	-0.002
100	0.501	0.500	-0.001	100	0.502	0.500	-0.002
.....						
224.924	2.532	2.530	-0.002	449.394	10.130	10.098	-0.032
449.848	10.123	10.118	-0.005	898.788	40.473	40.391	-0.082

단위:m

5. 종곡선의 완화곡선 설치에 관한 검토

종곡선 구간에 완화곡선을 설치하는 것은 평면에서 완화곡선을 구하는 방법 외에 x 축 방향으로의 임의의 이점거리에 대하여 수직거리 y를 구해야 하는 관계로 좀더 복잡한 형태를 띠고 있으며, 종곡선에서의 완화곡선에 대한 파라미터는 아래 그림6.과 같이 나타낼 수 있다.

이 연구에서는 특정한 완화곡선의 형태에 대하여는 검토를 생략하였으며, 어느 형태의 완화곡선이라도 범용으로 사용할 수 있는 식의 연구에 주안점을 두었다.

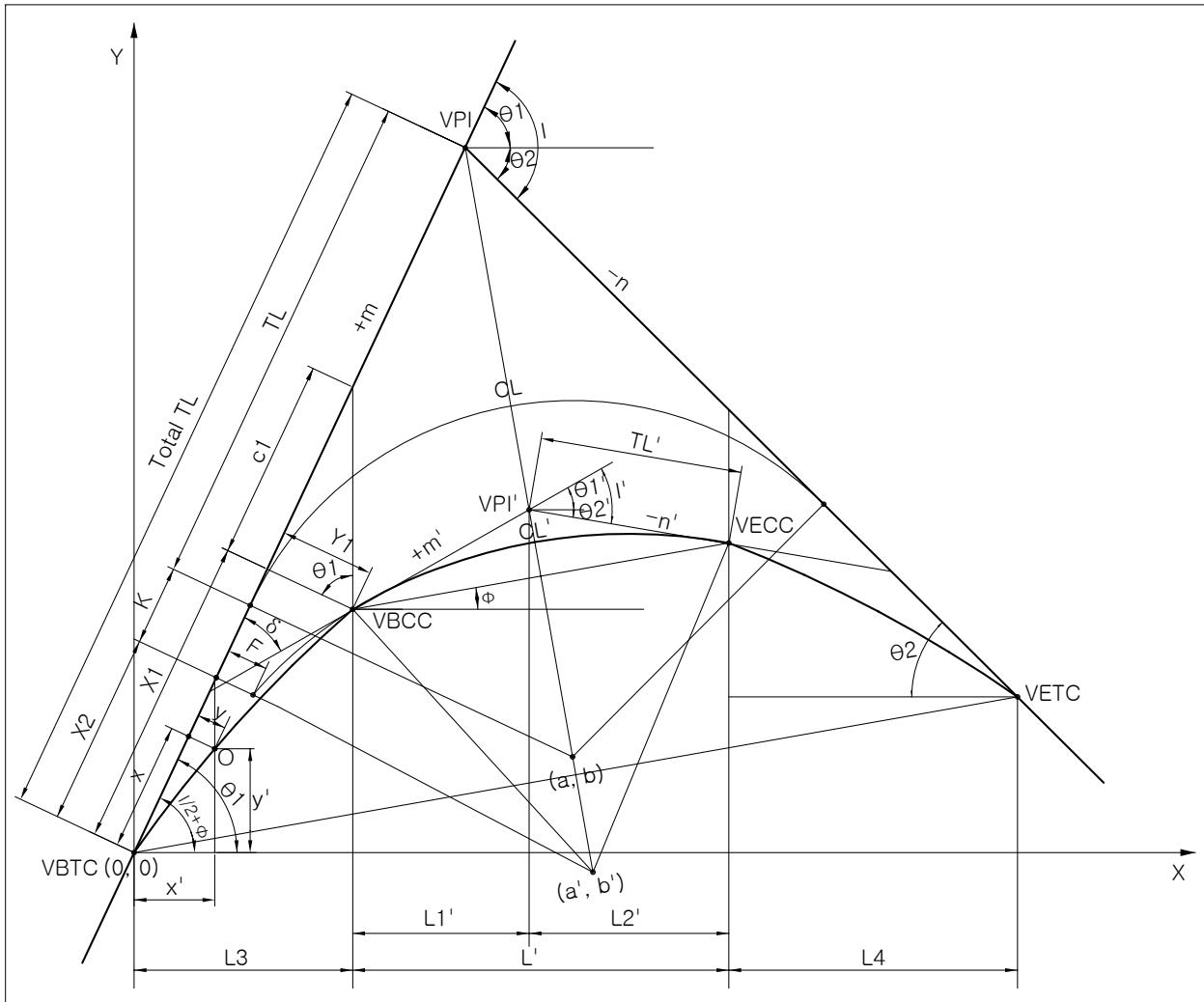


그림6. 종곡선의 완화곡선 기하

우선, 그림6.의 일반적인 완화곡선의 형태에서 X1과 Y1, 접선 임의의 x위치에서의 y값은 완화곡선의 종류에 따라 그 값이 정해지고, 보편적인 완화곡선의 파라미터인 δ, F, X2, K, θ'에 관한 식은 아래와 같다.

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{X1}{2R}\right) \qquad F = Y1 - R(1 - \cos\theta1)$$

$$X2 = X1 - R \cdot \sin\theta1 \qquad K = F \cdot \tan\frac{I}{2}$$

$$\theta1' = \theta1 - \tan^{-1}\left(\frac{X1}{2R}\right) \qquad \theta2' = \theta2 - \tan^{-1}\left(\frac{X1}{2R}\right)$$

위 식을 이용한 L1', L2', L3, L4, L' 값은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$L1' = TL' \cdot \cos\theta1' \dots\dots\dots(13) \qquad L2' = TL' \cdot \cos\theta2' \dots\dots\dots(14)$$

$$L' = L1' + L2' \dots\dots\dots(15) \qquad c1 = Y1 \cdot \tan\theta1, \quad c2 = Y1 \cdot \tan\theta2$$

$$L3 = (X1 + c1) \cdot \cos\theta1 \dots\dots\dots(16) \qquad L4 = (X1 + c2) \cdot \cos\theta2 \dots\dots\dots(17)$$

(13)~(17)식을 이용한 완화곡선 변곡점의 이점거리(station)와 고저(elevation)는 아래와 같이 구할 수 있다.

$$VBTC_{station} = VPI_{station} - Total TL \cdot \cos\theta1 \dots\dots\dots(18)$$

$$VBCC_{station} = VBTC_{station} + L3 \dots\dots\dots(19)$$

$$VECC_{station} = VBCC_{station} + L' \dots\dots\dots(20)$$

$$VETC_{station} = VECC_{station} + L4 \dots\dots\dots(21)$$

$$VBCC_{elevation} = VBTC_{elevation} + (X1 + c1) \cdot \sin\theta1 - (Y1/\cos\theta1) \dots\dots\dots(22)$$

$$VECC_{elevation} = VETC_{elevation} + (X1 + c2) \cdot \sin\theta2 - (Y1/\cos\theta2) \dots\dots\dots(23)$$

다음으로, 완화곡선 접선의 x축에 대한 투영거리 x' 위치에서 y'를 구하는 것인데 이것은 단일 공식으로는 구하기가 어렵다. 왜냐하면, 그림7.에서 보듯이 삼각방정식으로는 교차점의 해를 구할 수 없고, 완화곡선의 포물선형태와 직선이 만나는 형태로 교차점을 찾기 위하여는 교차방정식이 성립되어 근을 찾기가 어렵기 때문이다.

따라서, 어떤 종류의 완화곡선을 사용하든 모든 조건을 만족하는 y'를 구하는 식은 다음과 같이 x' 위치에서의 수직거리의 정확한 값과 접선의 x 위치에서의 y 값에 의한 수직거리를 반복적인 루프를 통하여 비교하여 가장 근접한 x와 y값을 찾는 것이 가장 쉽고 정확한 방법이다.

구하고자 하는 x' 위치에서의 정확한 수직거리 y'+u'는

$$y' + u' = x' \cdot \tan\theta1 = x' \cdot \frac{m}{1000} \dots\dots\dots(24)$$

이다.

이제, x' 위치에 대응하는 정확한 x와 y 값을 구하기 위하여는 임의의 x=f(L)값을 완화곡선식인 y=f(x) 식에 대입하여 y를 구할 수 있다. 이때 구하려고 하는 x와 y값을 사용하여 임의의 x 축 위치에서의 접선까지의 수직거리 y'+u'를 구하는 식은 아래와 같다.

$$y = u' \cdot \cos\theta1, \quad u = y \cdot \tan\theta1$$

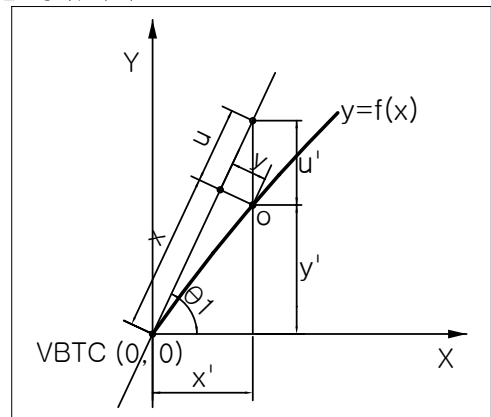


그림7. 완화곡선부의 상세

$$x + u = x + y \cdot \tan\theta_1$$

$$y' + u' = (x + u) \cdot \sin\theta_1 = (x + y \cdot \tan\theta_1) \cdot \sin\theta_1 \dots\dots\dots(25)$$

이때 식(24)에 의한 x' 위치에서의 정확한 수직거리 y'+u'의 거리와 식(25)를 이용한 접선에서의 x 위치에서의 수직거리 y'+u'의 결과값을 비교하여 적거나 클 경우 x값을 줄이거나 늘려 다시 식(25)를 이용하여 y'+u'를 구하고 이런 반복적인 루프를 통하여 정확한 y'+u'에 이를 때 까지 반복 한다.

반복의 결과 정확한 y'+u' 값에 mm미터 단위값까지 근접한 시점에서의 x와 y값을 구하고자 하는 x' 위치에서의 x와 y값으로 결정한다. 결국, 이때의 x와 y를 이용하여 아래의 식에 대입하면 x축 임의의 이점거리 x'에서의 완화곡선까지의 수직거리 y'값을 구할 수 있다.

$$\therefore y' = x' \cdot \frac{m}{1000} - u' = x' \cdot \frac{m}{1000} - \frac{y}{\cos\theta_1} \dots\dots\dots(26)$$

따라서, 임의의 x'위치인 O 점에서의 완화곡선의 고저(elevation)는 아래의 식과 같다.

$$O_{elevation} = VBTC_{elevation} + y' \dots\dots\dots(27)$$

또한, VBCC에서 VECC까지의 수직 y의 거리는 VBCC점의 고저(elevation)를 기준으로 앞서의 원곡선에서 제시한 정밀식과 동일한 방법으로 구할 수 있다.

6. 결론

이상의 연구 결과를 종합하면 기존의 종곡선식은 현재 일반적으로 일반철도와 고속철도에서는 큰 오차가 발생하지 않으나, 기울기가 커지고 곡선반경이 커지면 식의 간략화에 따른 오차가 발생하여 정밀한 곡율을 보장하지 못함을 알 수 있다. 따라서, 이 논문에서 연구된 식은 기울기가 크고 종곡선 반경이 큰 경우의 종곡선 계산에 유효하게 사용될 수 있으며, 초고속철도나 LRT 또는 자기부상철도와 같은 정밀한 궤도선형을 요구하는 종곡선의 경우에는 좀 더 원활한 열차운행과 편안한 승차감을 제공할 것으로 기대한다.

아울러, 종곡선에서 완화곡선을 적용할 경우에는 열차가 종곡선을 통과시 지금보다 더 부드러운 열차운행을 보장할 것으로 기대한다.

참고문헌

1. 건설교통부(2004년), “철도설계기준(노반편)”, 대한토목학회
2. 서사범(2002), “선로공학”, 열과알
3. 佐藤吉彦 외1인(1987), “선로공학”, 일본철도시설협회