

# 베어링으로 지지된 회전축의 스펙트럴요소 모델링

## Spectral Element Modeling of the Rotating Shafts on Bearing Supports

이재상\*                      이우식\*\*  
Lee, Jaesng                  Lee, Usik

---

### ABSTRACT

In this paper, the vibration of a rotating shaft with a thin rigid disk on bearing supports is considered. It is assumed that the shaft has uniform, circular cross-section. Based on the Timoshenko-beam theory, the transverse displacements and slopes in two lateral directions, the axial displacement, and the torsional deformation are considered. And flexible supports are used to analyse the bearings. A spectral element model is developed for the vibration analysis of the rotating shaft with a thin rigid disk, which is modeled by two shaft elements and a thin rigid disk element. The result of vibration analysis by finite element method is compared to the result of this research.

---

### 1. 서 론

회전축은 컴퓨터 하드디스크, 항공기의 가스터빈 엔진, 연마기 및 차량의 동력전달 축 등 현대산업에서 많이 사용된다. 회전축의 주축과 기하학적 축이 서로 떨어져 있을 때 발생하게 되는 질량의 불균형은 진동을 야기하는 일반적인 요소이다. 또한 축의 고속회전은 더욱 큰 불균형 힘의 원인이 되고 최근 고속철도 등의 발달로 동력전달에 이용되는 회전축은 고속회전을 요구하고 있다. 그러므로 진동해석은 베어링의 수명과 고속회전이 요구되는 동력 전달 축 등에서는 필수적이다.

Jeffcott[1]은 1919년에 처음으로 평면운동 회전체 모델(planar rotor model)을 소개하였다. Jeffcott의 모델은 고정된 강체 베어링에 물려있는 회전체를 질량이 없는 탄성축에 의해 지지된 강체 디스크였다. 좀 더 복잡한 회전체로 유연한 회전체 모델이 개발되었는데 이는 회전하는 동안 회전체의 탄성변형이 고려된 모델로 강체 회전체 모델보다 더욱 정확한 모델이다.

회전체를 해석하는 방법에는 크게 두 가지 방법이 사용되었다. 이는 유한요소법과 전달행렬법이다. 1972년 Ruhl과 Booker[2]는 회전체의 동역학적 특성 연구에 유한요소방법을 사용하였다. 이 연구에서는 탄성 굽힘과 병진운동에너지는 포함하였지만 회전관성효과, 회전효과(gyroscopic effect), 축방향 토크, 축방향력, 그리고 내부 감쇠는 무시하였다. Dimaragonas[3]는 1975년에 회전관성과 회전효과 그리고 내부 감쇠가 고려된 좀 더 일반적인 모델을 제시하였고, Gasch[4]는 1976년에 Dimaragonas의 모델에 편심효과를 고려한 모델을 제시하였다. 같은 해에 Nelson과 McVaugh[5]은 회전관성과 회전모멘트(gyroscopic moments)와 축방향력이 포함된 모델을 제시하였고 Zorzi와 Nelson[6]이 내부 감쇠를 포함하여 일반화하였다. 또한 Nelson[7]은 1980년에 전단변형효과가 추가된 모델을 제시하였다. 유한요소방법은 많은 요소를 사용할수록 해가 정확해지지만 이를 계산하는 데 많은 시간이 필요하다는 단점을 가지고 있다. Lund와 Orcutt[8]는 1967년에 처음으로 회전체 동역학에 전달행렬법을 적용하였다. 이 방법은 사용하는 행렬의 사이즈가 유한요소법에 비해 작다는 장점이 있다. 하지만 Kumar와 Sankar[9]는 1984년에 시간영역에서와 비선형문제의 해석에 어려움이 있다는 단점을 제시하였다.

---

\* 인하대학교 기계공학과 석사과정

\*\* 교신저자, 정회원, 인하대학교 기계공학과 교수

본 연구에서는 위 두 방법의 단점을 보완할 수 있는 스펙트럴요소방법에 대하여 모델링을 수행하였다.

## 2. 변분법에 의한 회전축의 스펙트럴요소 행렬 유도

회전축에 대한 축방향 변위, 비틀림 변위, 그리고 티모셴코 보이론에 따르는 횡방향 변위와 기울기에 대한 각각의 지배방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \rho A \ddot{u} - EAu'' &= p_x(x,t) \\
 \rho J \ddot{\theta} - GJ\theta'' &= \tau_x(x,t) \\
 \rho A \ddot{v} - \kappa GA(v'' - \psi') &= p_y(x,t) \\
 \rho A \ddot{w} - \kappa GA(w'' + \phi') &= p_z(x,t) \\
 \rho I \ddot{\psi} - \Omega \rho J \dot{\phi} - EI\psi'' - \kappa GA(v' - \psi) &= \tau_z(x,t) \\
 \rho I \ddot{\phi} + \Omega \rho J \dot{\psi} - EI\phi'' + \kappa GA(w' + \phi) &= \tau_y(x,t)
 \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 E는 탄성계수, ρ는 질량 밀도, A는 축의 단면적, J는 축의 극 관성모멘트이며 I는 관성모멘트이다. 이 때 위 식 (1)의 해를 조화해로 가정하고 여기에 weak form을 취하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 \int_0^L (EAU'' + \omega^2 \rho AU + P_x) \delta U dx &= 0 \\
 \int_0^L (GJ\Theta'' + \omega^2 \rho J\Theta + T_x) \delta \Theta dx &= 0 \\
 \int_0^L \{ \kappa GA(V'' - \Psi') + \rho A \omega^2 V + P_y \} \delta V \\
 + \{ EI\Psi'' + i\Omega \rho J \omega \Phi + \kappa GA(V' - \Psi) + \rho I \omega^2 \Psi + T_z \} \delta \Psi \\
 + \{ \kappa GA(W'' + \Phi') + \rho A \omega^2 W + P_z \} \delta W \\
 + \{ EI\Phi'' - i\Omega \rho J \omega \Psi - \kappa GA(W' + \Phi) + \rho I \omega^2 \Phi + T_y \} \delta \Phi dx &= 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

위 식 (2)을 가지고 스펙트럴요소행렬식을 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 S_L(\omega) d_L &= f_L \\
 S_T(\omega) d_T &= f_T \\
 S_B(\omega) d_B &= f_B
 \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 아래첨자 L은 축방향, T는 비틀림, B는 굽힘에 대한 것이다.

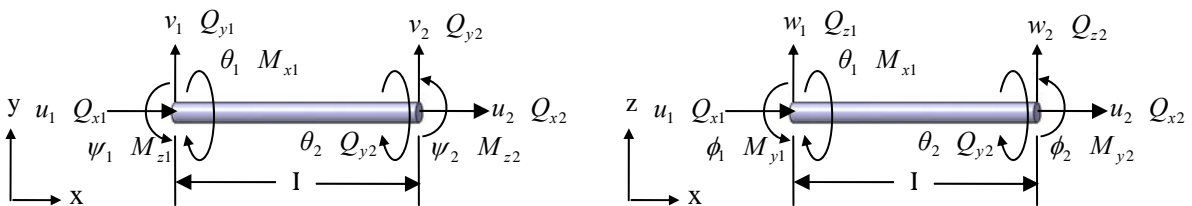


그림 1. 회전축에 대한 자유도와 외력

## 3. 디스크에 대한 스펙트럴요소 행렬

축의 회전속도인 ω가 상수일 경우의 디스크에 대한 스펙트럴요소 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m_D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 J_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 m_D & 0 & 0 & -i\omega\Omega_D \\ 0 & 0 & 0 & -\omega^2 I_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega^2 m_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\omega\Omega_D & 0 & -\omega^2 I_D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \Theta \\ V \\ \Psi \\ W \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ M_x \\ Q_y + F_{ey} \\ M_z \\ Q_z + F_{ez} \\ M_y \end{Bmatrix} \quad (4)$$

#### 4. 베어링에 대한 스펙트럴요소 행렬

베어링을 간단히 스프링과 댐핑의 효과로 고려하면 다음의 스펙트럴요소 행렬을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{yy} + i\omega C_{yy} & 0 & K_{yz} + i\omega C_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{zy} + i\omega C_{zy} & 0 & K_{zz} + i\omega C_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \Theta \\ V \\ \Psi \\ W \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

#### 5. 수치 예제

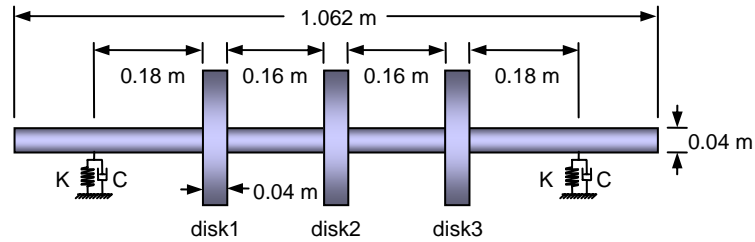


그림 2. 디스크가 있는 단순지지 된 회전축

본 연구에서 유도한 스펙트럴요소 식을 그림 2의 예제에 적용하여 유한요소법의 결과와 비교하여 보았다. 여기서 사용된 물성치는  $\rho=7750\text{kg/m}^3$ ,  $E=207\text{GPa}$ ,  $G=81\text{GPa}$ 이다. 또한 각 디스크의 무게는 13.47 kg이며  $K_{yy}$ ,  $K_{zz}$  는  $1.0 \times 10^7 \text{ N/m}$ ,  $K_{yz}$ ,  $K_{zy}$  는  $0.5 \times 10^7 \text{ N/m}$ ,  $C_{yy}$ ,  $C_{zz}$  는  $2.0 \times 10^3 \text{ N/m}$ 이다. 또한 회전속도에 대한 amplitude를 베어링의 댐핑 효과가 있을 때와 없을 때의 두 가지 경우의 그래프로 그려보았다. 베어링의 커플 된 스프링효과로 인해 위험속도가 2개의 값으로 갈라진 것을 알 수 있다. 또한 각각의 위험속도에서 그 amplitude는 최대치를 보이고 있다.

도표 1. Critical Speeds

	SEM	Ref.[10]
Peak 1	44.82Hz	44.83Hz
Peak 2	51.28Hz	51.52Hz

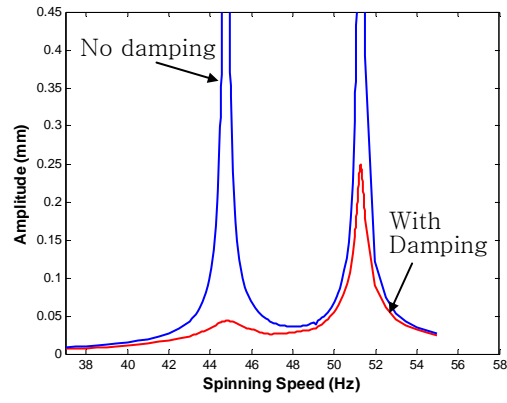


그림 3. Amplitude vs. Spinning Speed

## 5. 결 론

본 연구에서는 회전축에 대한 스펙트럴요소 모델링에 베어링의 스프링, 댐핑 효과를 적용하였고 이에 대한 예제를 풀어보았다. 예제를 참고문헌의 결과와 비교함으로써 스펙트럴요소 모델링의 결과를 검증하였다. 앞으로 좀 더 일반적인 경우인 회전속도의 변화에 따른 해석, 디스크의 두께에 대한 고려 등의 연구가 수행되어야 할 것이다.

## 후 기

본 연구는 2006년도 산학협력실 지원사업(2차년도)에 의해 지원되었습니다.

## 참고 문헌

1. Jeffcott, H. H. (1919) "Lateral Vibration of Loaded Shafts in the Neighborhood of a Whirling Speed-The Effect of Want of Balance," *Philosophical Magazine*, Vol. 37, 304-314.
2. Ruhl, R. L., and Booker, J. F. (1972) "A Finite Element Model for Distributed Parameter Turbo-rotor System," *Transactions of ASME, Journal of Engineering for Industry*, Vol. 94, 126-132.
3. Dimarogonas, A. D. (1975) "A General Method for Stability Analysis of Rotating Shafts," *Ingenieur-Archiv*, Vol. 44, 9-20.
4. Gasch, R. (1976) "Vibration of Large Turbo-Rotors in Fluid-Film Bearings on an Elastic Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 47, 53-73.
5. Nelson, H. D., and McVaugh, J. M. (1976) "The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements," *ASME Transactions, Journal of Engineering for Industry*, Vol. 98, 593-600.
6. Zorzi, E. S., and Nelson, H. D. (1977) "Finite Element Simulation of Rotor-Bearing Systems with Internal Damping," *Journal of Engineering for Power, Series A*, Vol. 99, No. 1, 71-76.
7. Nelson, H. D. (1980) "A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory," *ASME Transactions, Journal of Mechanical Design*, Vol. 102, 793-803.
8. Lund, J. W., and Orcutt, F. K. (1967) "Calculations and Experiments on the Unbalance Response of a Flexible Rotor," *ASME Transactions, Journal of Engineering for Industry*, Vol. 89, 785-796.
9. Kumar, A. S., and Sankar, T. S. (1984) "A New Transfer Matrix Method for Response Analysis of Large Dynamic Systems," *Computers and Structures*, Vol. 23, 545-552.
10. Lee, A. -C., and Kang, Y. and Liu, S. -L. (1984) "A Modified Transfer Matrix Method for Linear Rotor-Bearing Systems," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58, 776-783.