韓國數學敎育學會
<全國數學敎育硏究大會 프로시딩>
제 40회. 2008. 5. 11-15

Korea Soc. Math. Ed.
Proceedings of National Meeting of Math. Ed.
The 40th. May. 2008. 11-15

종이접기를 통한 패턴 탐구 활동

윤 대 원 (경상대학교)
김 동 근 (대구청구고등학교)

다각형에서 가장 기본이 되는 삼각형과 사각형의 종이를 접을 때 마다 다양한 규칙성들이 발견될 수 있다. 따라서 본 연구에서는 이런 종이접기를 통한 패턴 탐구를 통해 문제를 형식화거나 일반화 하는 능력과 수학적으로 사고하는 능력 즉, 귀납적 추론력을 길러주고자 함에 목적을 두고 있다.

I. 서 론

NCTM(2007)에서는 규칙성을 파악하기 위해 패턴과 구조를 조사하고 관찰된 규칙성을 일반화하고 추측하는 등 이와 같은 활동을 통하여 다양한 수학적 추론 경험을 가져야 한다고 제시하고 있다. 이와 같은 수학적 경험을 통하여 패턴이나 규칙성을 인식하고 비교, 분석하는 것은 여러 가지 문제 상황을 수식으로 표현하고, 그들 사이의 관계를 탐구함으로써 문제를 형식화하거나 일반화 하는 능력을 기를 수 있도록 한다.

지금까지의 선행연구를 종이접기와 관련하여 살펴보았다. 종이접기에 관한 연구에서 신현용 · 한인기 · 서봉건 · 최선희(2002)의 연구에서는 종이접기의 대수학적인 의미를 작도 가능성의 문제와 관련지어 살펴보고 있으며, 한인기 · 신현용(2002)의 연구는 종이접기 활동을 소개하고 엄밀한 논증의 연계 가능성에 대해 탐구하였고, 권영인 · 서보억(2006)의 연구에서는 수학적 사실을 탐구하고 피타고라스 정리를 창의적인 방법으로 증명하여 보았다.

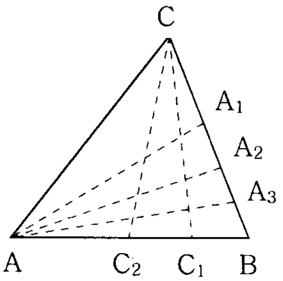
이상에서 살펴본 선행연구는 종이를 접고 다시 펼친 다음 그 흔적을 통해 수학적 사실의 탐구나 논증에 중점을 둔 연구가 대부분이었고 일반화하는 과정도 교과서를 중심으로 한 패턴 탐구에 그치고 있어 종이접기를 통한 패턴 탐구는 미흡한 실정이다. 따라서 본 연구에서는 다각형의 가장 기본이 되는 삼각형과 직사각형 종이를 접어서 생긴 흔적들을 관찰하여 그 속에 숨겨진 다양한 규칙성을 찾는 등의 패턴 탐구를 통하여 귀납적 추론력을 길러주고자 함에 목적을 두고 있다.

II. 종이접기를 통한 패턴 탐구

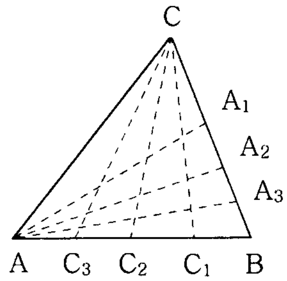
1) 삼각형 종이

임의의 직사각형 종이에서 삼각형을 접을 수 있다. 점 C에서 선분 AB에 m번 접은 다음 점 A에서 선분 BC에 n번 접는다면 즉 m번 접은 다음 n번 접으면 어떤 규칙성이 있는지 알아보자.

우선 아래 <그림 1>에서처럼, 점 C에서 선분 AB에 종이를 두 번 접고, 점 A에서 선분 BC에 종이를 세 번 접었을 때, 즉 $p=2$, $q=3$라 하면, 점 C에서 선분 AB에 두 번 접은 뒤 점 A에서 선분 BC에 한 번 접으면 즉 AA1을 접으면 이 선분은 CC1과 CC2에 의해서 선분이 세 부분으로 나누어져서 세 개의 영역이 생긴다. 다시 AA2를 접으면 역시 이 선분은 CC1과 CC2에 의해서 세 부분으로 나누어져서 세 개의 영역이 생긴다. 이렇게 해서 총 세 개짜리 영역이 네 개가 있어서 총 12개의 영역이 생긴다. 즉, $p=2$, $q=3$일 때 생기는 영역의 총 개수는 $3\times 4=4\times 3=12$이고 이것은 $3\times 4=(q+1)(p+1)$이다. 또한 $p=3$, $q=3$일 때 보면 나눠지는 영역의 총 개수는 $4\times 4=(p+1)(q+1)=(q+1)(p+1)$임을 쉽게 추측할 수 있다.



$p=2,\ q=3$



$p=3,\ q=3$

<그림 1>

$p=m$이고 $q=n$일 때 영역의 개수를 정리하여 보면 다음 표와 같다.

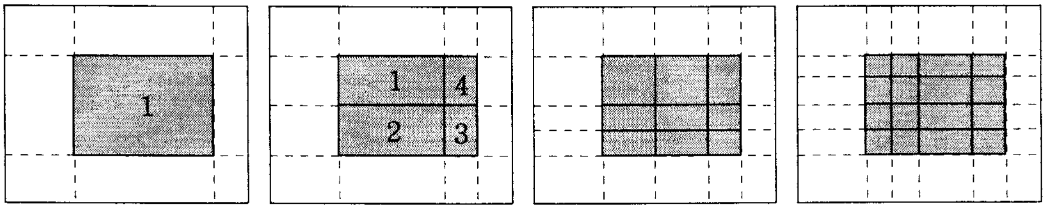
	$q=0$	$q=1$	$q=2$	$q=3$	$\cdots$	$q=n$
$p=0$	**1**	2	3	4	$\cdots$	$n+1$
$p=1$	2	**4**	6	8	$\cdots$	$2(n+1)$
$p=2$	3	6	**9**	12	$\cdots$	$3(n+1)$
$p=3$	4	8	12	**14**	$\cdots$	$4(n+1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p=m$	$m+1$	$2(m+1)$	$3(m+1)$	$4(m+1)$	$\cdots$	$(n+1)(m+1)$

2) 직사각형(혹은 정사각형) 종이

다음은 직사각형의 종이를 접는 방법에 따라 즉, 종이를 접은 후 펼친 다음 접을 것인지, 접힌 상태에서 그대로 다시 접을 것인가에 따라 다른 패턴이 나타난다. 직사각형의 종이를 가로, 세로로 각각 n번씩 수직이 되도록 접으면 직사각형의 모서리가 포함된 영역의 개수는 어떤 패턴으로 나타나는지 살펴보자. (단, 직사각형의 모서리 부분이 포함되지 않은 영역의 개수는 제외한다.)

여기서 직사각형 종이를 가로, 세로가 수직이 되도록 접는 횟수를 k라 하고, 우선 $k=1$일 때 즉,

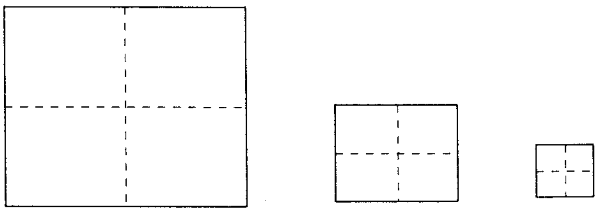
종이를 한 번 씩 접은 후 펼친 다음 다시 종이를 접을 때 생기는 직사각형의 모서리가 포함된 영역의 개수는 어떤 규칙이 있는지 살펴보자. 모서리가 포함된 영역의 개수는 전체 영역의 개수에서 모서리가 포함되지 않은 영역의 개수를 뺀 것이 구하고자 하는 영역의 개수가 되므로 우선 전체 영역의 개수를 구하여 보면 $k=1$일 때 즉, 가로, 세로로 각각 한 번씩 접으면 나누어지는 영역의 개수는 4가 됨을 쉽게 구할 수 있고 $k=2$일 때는 아래 <그림 2>에서처럼 9개가 됨을 알 수 있다. 이것은 각각에 1을 더해서 제곱한 수, 즉 $(1+1)^2=4$와 $(2+1)^2=9$가 됨을 추측할 수 있다. 그렇다면 $k=3$일 때는 $(3+1)^2=16$이 됨을 쉽게 추측할 수 있으므로 $k=n$일 때 전체 영역의 개수는 $(n+1)^2$가 된다. 다음은 직사각형의 모서리가 포함되지 않은 부분의 영역의 개수를 구하여 보자. 모서리가 포함되지 않는 부분을 나타내어 보면 아래 <그림 2>와 같다. $k=1$일 때는 내부에 생기는 영역은 존재하지 않는다. $k=2$일 때는 1개의 영역이 생기고 $k=3$일 때는 4개의 영역이 생긴다. 그렇다면 이것은 각각 1을 빼서 제곱한 수, 즉 $(2-1)^2=1$과 $(3-1)^2=4$가 됨을 추측할 수 있고 $k=n$일 때 내부에 생기는 영역의 개수는 $(n-1)^2$가 된다. 따라서 모서리가 포함된 영역의 개수는 전체 영역의 개수에서 내부에 생기는 영역의 개수를 뺀 것이므로 $(n+1)^2-(n-1)^2=4n$이 됨을 알 수 있다.



$k=2$ $k=3$ $k=4$ $k=5$

<그림 2>

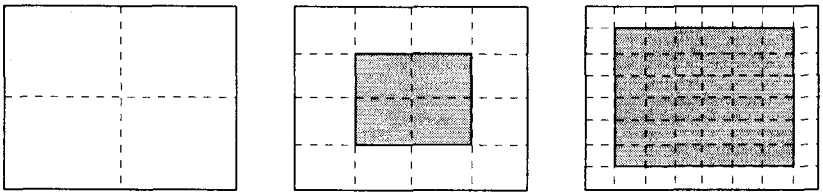
위의 문제에서 가로 세로로 1번 접고 펼친 후 다시 가로 세로로 접는 방법으로 규칙성을 찾아보았지만 이번에는 종이를 한 번 접은 후 펼치는 것이 아니라 다음 <그림 3>에서처럼 접힌 상태에서 계속 접어 간다면 어떤 규칙성이 생기는지 살펴보자.



$k=1$ $k=2$ $k=3$

<그림 3>

위와 같은 방법으로 접는다면 $k=1$일 때는 $4=2^2$개의 영역이 생기고 $k=2$일 때는 $16=2^4$개의 영역이 생기고, $k=3$일 때는 $64=2^6$의 영역이 생김을 알 수 있다. 따라서 $k=n$일 때는 2^{2n}개의 영역이 생긴다는 것을 쉽게 알 수 있다. 다음으로 모서리가 포함되지 않은 영역의 개수를 구하여 보자. 모서리가 포함되지 않은 영역의 개수는 <그림 4>와 같고 <그림 4>는 <그림 3>의 펼친 모양이다.



$k=1$ $k=2$ $k=3$

<그림 4>

위의 <그림 4>에서 모서리가 포함되지 않은 영역의 개수는 $k=2$일 때는 4개이고, $k=3$일 때는 36개 됨을 알 수 있다. 따라서 직사각형의 모서리가 포함된 영역의 개수는 $k=1$일 때는 $4=4\times1$개이고, $k=2$는 $12=4\times3$개 되고, $k=3$일 때는 $28=4\times7$개가 됨을 알 수 있다. 이상을 정리하면 다음과 같다.

직사각형의 모서리가 포함된 영역의 개수를 a_k라 할 때,

$$k=1\text{일 때, } a_1=4\times1=4\times(2\ -1)$$
$$k=2\text{일 때, } a_2=4\times3=4\times(2^2-1)$$
$$k=3\text{일 때, } a_3=4\times7=4\times(2^3-1)$$
$$\vdots$$
$$k=n\text{일 때, } a_n=4\times7=4\times(2^n-1)$$

Ⅲ. 결 론

본 연구는 기존의 종이접기를 통한 엄밀한 논증이나 도형의 성질 탐구에서 벗어나 학생들이 종이를 접고 난 뒤 생긴 흔적들을 관찰함으로써 그 속에 숨겨져 있는 규칙성이나 패턴을 탐구하는데 의미가 크다고 볼 수 있다.

다각형에서 가장 기본이 되는 삼각형이나 직사각형(혹은 정사각형) 종리를 접는 과정 속에서 규칙이나 패턴들을 살펴보았다. 우선 삼각형을 접을 때 변에 평행하게 접느냐 한 꼭지점을 지나도록 접느냐 두 꼭지점을 지나도록 접느냐에 따라 나눠지는 영역의 개수, 삼각형의 개수, 사다리꼴의 개수, 교점의 개수, 선분의 개수 등 다양한 규칙성이 있음을 알 수 있었다. 이것은 종이접기를 통해 주어진

문제의 조건이나 문제 자체를 바꿈으로 해서 새로운 문제를 설정할 수 있을 것이다. 다음으로 직사각형의 종이를 접는 방법에 따라 즉, 종이를 접은 후 펼친 다음 접을 것인지, 접힌 상태에서 그대로 다시 접을 것인가에 따라 다른 패턴이 나타난다.

이와 같은 종이접기의 활동은 단순히 주어진 문제만 해결하는 것에 그치는 것이 아니라 나타난 결과를 관찰하고, 분석하고, 종합하고 유추함으로써 새로운 사실을 발견한다든지 규칙이나 패턴을 찾아 이를 일반화하는데 도움을 줄 수 있다고 생각한다.

또한, 살펴본 문제들은 수열 문제와 관련이 있으며 이러한 내용은 기존의 강의식 수업에서 벗어나서 학생들 스스로 관찰하고 다양한 패턴을 발견할 수 있을 것이라고 보며, 수학교육에서 의미 있는 교수-학습자료로 제공하리라 기대되어진다.

참 고 문 헌

권영인 · 서보억 (2006). 종이학을 접고 펼친 흔적을 통한 수학탐구활동, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **제20권 제3호**, pp.469-482.

신현용 · 한인기 · 서봉건 · 최선희 (2002). 종이접기의 대수학적 의미와 교수학적 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **제13권 제2호**, pp.457-475.

한인기 · 신현용 (2002). 삼각형 접기 활동과 논증의 연계 가능성에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈A <수학교육> **제41권 제1호**, pp.79-90.

NCTM (2007). 학교수학을 위한 원리와 규준(류희찬 외 5명 옮김), 경문사.