재귀원형군과 토러스에서 쌍형 다대다 서로소인 경로 커버*

김 유상⁰ 박정흠
가톨릭대학교 컴퓨터공학과
eusankun@naver.com, j.h.park@catholic.ac.kr

Paired Many-to-Many Disjoint Path Covers in Recursive Circulants and Tori

Eusang Kim⁰ Jung-Heum Park
Department of Computer Science and Engineering, The Catholic University of Korea

노드들 사이의 라우팅(routing)이나 선형 배열(linear arrays)의 임베딩(embedding) 등과 관련하여 여러 상호연결망에서 다루는 중요한 문제 중의 하나는 노드가 서로소인 경로(node-disjoint paths)를 찾는 것이다. 노드가 서로소인 경로는 노드들 사이에 효율적인 데이터 라우팅을 위한 병렬 경로로 사용될 수 있다. 서로소인 경로는 다음과 같이 세 가지로 분류할 수 있다: *일대일(one-to-one)*, *일대다(one-to-many)*, 그리고 *다대다(many-to-many)*. Menger의 정리에 따르면 연결도(connectivity)가 k 이상인 그래프 G의 서로 다른 두 정점 사이에 k개의 서로소인 경로가 존재하는데[1], 이들은 일대일 서로소인 경로를 이룬다. Menger의 정리를 확장한 소위 Fan Lemma는 G의 한 정점에서 서로 다른 k개의 정점 사이에 k개의 서로소인 경로가 존재함을 말하고 있고[1], 이 경로들은 일대다 부류가 된다. 마찬가지의 방식으로 확장하여 G의 정점 수가 $2k$ 이상이면 임의의 k개의 정점으로부터 다른 k개의 정점 사이에 다대다 부류에 속하는 k개의 서로소인 경로가 존재함이 알려져 있다[2].

세 유형의 서로소인 경로가 그래프 G에 있는 모든 정점을 지나는 경우를 생각해 볼 수 있다. *서로소인 경로 커버(disjoint path cover; DPC)*는 그래프의 모든 정점을 지나는 서로소인 경로들의 집합을 말한다. 서로소인 경로 커버에 대한 문제는 모든 노드를 완전히 활용(utilization)하는 것이 중요한 응용과 관련된다. 선형 배열의 임베딩에서 커버는 모든 노드가 파이프라인 계산에 참여한다는 것을 의미한다. 일반적인 그래프에서 임의의 고정된(fixed) k에 대하여 일대일, 일대다, 다대다 k-DPC가 존재하는지를 판별하는 문제는 NP-complete이다[3]. 다대다 서로소인 경로 커버를 찾는 문제가 가장 일반화된 문제이며, 이 논문에서는 주로 다대다 서로소인 경로 커버를 다룬다.

그래프 G에서 $S \cap T = \varnothing$를 만족하는 k개의 소스(source) $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$와 k개의 싱크(sink) $T = \{t_1, t_2, \cdots, t_k\}$가 주어져 있을 때, 소스와 싱크를 잇는 경로 $P_i (1 \le i \le k)$들의 집합이 서로소이면서 그래프의 모든 정점을 커버하면, 즉 모든 $i \ne j$에 대하여 $V(P_i) \cap V(P_j) = \varnothing$이고 $\cup_{1 \le i \le k} V(P_i) = V(G)$이면 이들 경로들의 집합을 *다대다 k-서로소인 경로 커버(many-to-many k-disjoint path cover)*라고 부른다. 여기서 $V(P_i)$는 경로 P_i에 속한 정점들의 집합이고, $V(G)$는 그래프 G의 정점 집합이다. 이때 소스 s_i가 항상 싱크 t_i와 짝지어지면 *쌍형 다대다 DPC(paired many-to-many DPC)*라고 부르고, 하나의 소스가 임의의 한 싱크와 짝지어질 수 있으면 *비쌍형 다대다 DPC(unpaired many-to-many DPC)*라고 한다. 고장 요소(정점이나 에지) 집합 F를 가진 그래프에서도 다대다 서로소인 경로 커버를 정의할 수 있다.

서로소인 경로 커버에 대하여 연구된 것들로는, 일대일 경로 커버에 대하여 정점이나 에지에 고장이 없는 재귀원형군(recursive circulant)[4-5], 에지 고장이 있는 하이퍼큐브(hypercubes)[6]에 대한 연구가 있고, 하이퍼큐브형 상호 연결망에 대한 일대다 서로소인 경로 커버[7]와 다대다 서로소인 경로 커버[3,8]가 발표되어 있다. f개 이하의 고장 요소를 가진 모든 m-차원 제한된 HL-graph[9]와 재귀원형군 $G(2^m,4)$에는 $f+2k \le m-1$을 만족하는 임의의 f, $k \ge 1$에 대하여 f-고장 쌍형 다대다 k-DPC가 존재함이 밝혀져 있고[3], $f+k \le m-2$를 만족하는 임의의 f, $k \ge 1$에 대하여 f-고장 비쌍형 다대다 k-DPC가 존재함이 밝혀져 있다[8]. k개의 경로로 이루어진 일대일 서로소인 경로 커버는 k^**-container*라고도 알려져 있다[5-6].

* 본 연구는 2007년도 가톨릭대학교 교비연구비의 지원으로 이루어졌음.

정점의 수가 n으로 같은 두 그래프 G_0와 G_1이 있을 때, G_0에 속한 정점과 G_1에 속한 정점을 이으면서 서로 인접하지 않도록 n개의 에지를 추가하여 두 그래프를 하나로 묶을 수 있다. 이때 얻어지는 임의의 한 그래프를 $G_0 \oplus G_1$이라고 나타낸다. 각각 n개의 정점을 가진 $d(\geq 3)$ 개의 그래프 G_0, G_1, ..., G_{d-1}이 있다고 할 때, $0 \leq i < d$인 모든 i에 대하여 G_i와 $G_{i+1 \bmod d}$의 모든 쌍에 대해 $\oplus$연산을 적용하면, nd개의 정점을 가진 그래프를 얻게 된다. 이것을 *사이클 기반 설계(cycle-based construction)*라고 부르고, 이때 생성되는 임의의 그래프를 $\oplus_{0 \leq i < d} G_i$로 나타낸다. 그래프 $\oplus_{0 \leq i < d} G_i$에서 G_i들을 *요소 그래프(component)*라고 부른다. 재귀원형군 $G(cd^m, d)$과 토러스 $C_{k_1} \times C_{k_2} \times \cdots \times C_{k_m}$는 한 단계 낮은 차원의 연결망에 사이클 기반 설계를 적용하여 얻을 수 있음을 관찰할 수 있다.

이 논문에서는 요소 그래프 G_0, G_1, ..., G_{d-1}의 쌍형 다대다 서로소 경로 커버와 고장 해밀톤 성질을 이용하여 $\oplus_{0 \leq i < d} G_i$의 쌍형 다대다 서로소 경로 커버를 설계할 수 있음을 보인다. 즉, 아래 정리 1을 증명한다. 설계를 간단히 하기 위하여 G_i는 충분히 많은 정점을 가진다고 가정하고 있다. $\delta(G)$는 그래프 G의 최소 분지수를 나타낸다. 그래프 G에 있는 f개 혹은 그 이하의 요소를 삭제하더라도 G가 해밀톤 사이클을 가지면, G를 *f-고장 해밀톤 그래프(f-fault hamiltonian)*라고 말한다.

정리 1. G_0, G_1, ..., G_{d-1}을 정점의 수가 모두 n인 그래프라고 하자. 또한 $\delta = \min_{0 \leq i < d} \delta(G_i) \geq 3$이며, δ가 홀수이면 $n \geq 2 \cdot 3^{(\delta-1)/2}$이고 짝수이면 $n \geq 3^{\delta/2}$라고 하자. 만약 각 요소 그래프 G_i가 $f+2k \leq \delta-1$을 만족하는 임의의 f, $k \geq 1$에 대하여 f-고장 쌍형 다대다 k-DPC를 가지고 $\delta-2$-고장 해밀톤 그래프이면, $\oplus_{0 \leq i < d} G_i$는 $f+2k \leq \delta(\oplus_{0 \leq i < d} G_i)-1$을 만족하는 임의의 f, $k \geq 2$에 대하여 f-고장 쌍형 다대다 k-DPC를 가진다.

위 정리를 증명하기 위한 k-DPC 설계의 개요는 다음과 같다: (a) 소스 s_p와 싱크 t_p가 같은 요소 그래프 G_i에 포함되면 s_p와 t_p를 잇는 s_p-t_p 경로는 G_i에 포함되도록 설계한다. (b) s_p는 G_i에 t_p는 $G_j (j \neq i)$에 포함되면 s_p-t_p 경로는 G_i, G_{i+1}, G_{i+2}, ..., G_j의 정점들을 순서로 지나거나 혹은 G_i, G_{i-1}, G_{i-2}, ..., G_j의 정점들을 순서로 지나도록 설계한다. 이때 인접한 요소 그래프간의 에지는 하나씩만 이용한다. (c) 만약 어떤 경로도 지나지 않는 요소 그래프가 있으면 이들 정점들을 모두 지나도록 이미 설계한 경로를 적절히 변형한다.

위 정리 1과 고장 해밀톤 성질을 재귀원형군과 토러스에 적용하면 다음을 얻을 수 있다.

정리 2. 이분 그래프가 아닌 재귀원형군 $G(cd^m, d)$, $d \geq 3$과 토러스는 분지수를 δ라고 할 때, $f+2k \leq \delta-1$을 만족하는 임의의 f, $k \geq 1$에 대하여 f-고장 쌍형 k-DPC를 가진다.

참고 문헌

[1] J.A. Bondy and U.S.R Murty, *Graph Theory*, Springer Verlag, 2007.

[2] D.B. West, *Introduction to Graph Theory (2nd edition)*, Prentice Hall, 2001.

[3] J.-H. Park, H.-C. Kim, and H.-S. Lim, “Many-to-many disjoint path covers in hypercube-like interconnection networks with faulty elements,” *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems* 17(3), pp. 227-240, Mar. 2006.

[4] J.-H. Park, “One-to-one disjoint path covers in recursive circulants,” *Journal of KISS* 30(12), pp. 691-698, 2003.

[5] C.-H. Tsai, J.J.M. Tan, and L.-H. Hsu, “The super-connected property of recursive circulant graphs,” *Inform. Proc. Lett.* 91(6), pp. 293-298, 2004.

[6] C.-H. Chang, C.-K. Lin, H.-M. Huang, and L.-H. Hsu, “The super laceability of the hypercubes,” *Inform. Proc. Lett.* 92(1), pp. 15-21, 2004.

[7] J.-H. Park, “One-to-many disjoint path covers in a graph with faulty elements,” in *Proc. of the International Computing and Combinatorics Conference COCOON 2004*, pp. 392-401, Aug. 2004.

[8] J.-H. Park, “Unpaired many-to-many disjoint path covers in hypercube-like interconnection networks,” *Journal of KISS* 33(10), pp. 789-796, 2006.

[9] J.-H. Park, H.-C. Kim, and H.-S. Lim, "Fault-hamiltonicity of hypercube-like interconnection networks," *IEEE International Parallel & Distributed Processing Symposium IPDPS 2005*, Apr. 2005.