

학습기능을 사용한 Z. Cao의 퍼지추론방식

박진현* · 이태환*

*진주산업대학교

Z. Cao's Fuzzy Reasoning Method using Learning Ability

Jin-Hyun Park* · Tae-Hwan Lee**

Korea Maritime University

E-mail : uabut@jinju.ac.kr, thlee@jinju.ac.kr

요 약

과거 Z. Cao는 Relation matrix를 사용한 정밀한 추론이 가능한 NFRM(New fuzzy reasoning method)을 제안하였다. 이는 추론의 규칙 수가 적음에도 불구하고 Mamdani의 퍼지추론방식에 비하여 좋은 성능을 보였다. 그러나 정밀한 추론을 위하여 relation matrix는 시행착오법을 사용하여 구하고, 이는 많은 시간과 노력이 필요하다. 본 연구에서는 이러한 relation matrix를 구하기 위하여 시행착오법에 의해 소요되는 많은 시간과 노력을 줄이고, 더욱 정밀한 추론 성능의 개선을 위하여 경사감소학습법을 사용한 학습기능을 갖는 Z. Cao의 퍼지추론 방식을 제안하고자 한다.

ABSTRACT

Z. Cao had proposed NFRM(new fuzzy reasoning method) which infers in detail using relation matrix. In spite of the small inference rules, it shows good performance than mamdani's fuzzy inference method. In this paper, we propose Z. Cao's fuzzy inference method using learning ability witch is used a gradient descent method in order to improve the performances. Because it is difficult to determine the relation matrix elements by trial and error method which is needed many hours and effort. Simulation results are applied linear and nonlinear system show that the proposed inference method has good performances.

키워드

Z. Cao's fuzzy inference method, mamdani's fuzzy inference method, 경사감소학습(gradient descent learning)

1. 서 론

퍼지이론은 1965년 미국의 L. A. Zadeh에 의하여 퍼지집합이 제안되었고, 인간의 인식, 사고, 판단 및 언어(자연 언어) 등에서 볼 수 있는 애매성을 정량적이며, 합리적으로 처리하는 수학적 이론이다[1]. 그후, 80년대에 급격한 발전을 거쳐 현재에 여러 응용분야에 다양하게 적용되고 있다. 이와 같이 퍼지제어는 시스템 특성이 복잡하고, 기존의 정량적인 방법으로 해석할 수 없거나, 얻어지는 정보가 정성적이고 부정확하고 불확실한 경우에 기존의 시스템보다 우수한 특성을 나타내고 있다[2, 3]. 그러나 이러한 우수한 특성과 많은 연구에도 불구하고, 멤버십 함수의 형태와 크기의 결정이 시스템의 성능에 크게 영향을 미치며, 추론이 복잡하고 계산 시간이 비교적 많이 걸려 실시간 처리에 어려움이 뒤따른다.

이러한 문제들을 피하기 위하여 퍼지추론의 소속 함수 형태나 크기를 적용적으로 조정하는 방법, 기존의 퍼지추론과는 다른 간접 추론법 등이 연구되어 이러한 문제점을 상당히 해결하였다. 그러나 이러한 간접 추론법은 멤버십의 형태나 크기 등 조정해야할 파라미터 등이 많으며, 그 형태와 크기가 시스템에 크게 영향을 미친다. 따라서 간접 추론법과는 다른 추론방법의 하나로 Z. Cao 등이 새로운 퍼지추론방법(New Fuzzy Reasoning Method)을 제안하였다[4, 5]. 이는 퍼지 relation matrix를 사용하여 퍼지 규칙을 중복적으로 나타내고, 추론이 간단하며, 일반적인 Mamdani의 추론방법에 비하여 성능이 뛰어나다. 그러나 이것 역시 인간의 지식에 의존하여 relation matrix를 설계하여야 하며, 정밀한 추론을 행하기 위해서는 시행착오법(trial and error method)을 사용하여 많은 시간과 노력이 요구되어진다[5].

따라서 본 연구에서는 추론이 간단하고, 성능이 뛰어난 Z. Cao의 추론방식을 인간의 지식에만 의존하여 relation matrix를 구성하지 않고, 경사 감소 학습법(gradient descent method)를 사용한 학습 기능을 갖는 추론 방식을 제안하고자 한다.

II. 학습기능을 갖는 MIMO 퍼지추론

2.1 Z. Cao의 퍼지추론

Z. Cao의 퍼지추론방법은 퍼지화, relation matrix, 추론 및 비퍼지화 부분으로 되어 있다[4]. 일반적인 퍼지추론에서 사용하는 규칙 대신 relation matrix를 사용하여 퍼지추론을 행한다. 일반적인 퍼지추론규칙 k개를 구성하면 식 (1)과 같다.

$$\begin{aligned} \text{If } X \text{ is } A_1 \text{ then } Y \text{ is } B_1 \\ \text{If } X \text{ is } A_2 \text{ then } Y \text{ is } B_2 \\ \vdots \\ \text{If } X \text{ is } A_k \text{ then } Y \text{ is } B_k \end{aligned} \quad (1)$$

단, A_1, A_2, \dots, A_k 입력변수 X 의 소속함수이고, B_1, B_2, \dots, B_k 는 출력변수 Y 의 모든 소속함수집합의 부분집합을 나타낸다.

출력의 소속함수를 m 개로 가정하고, m 개의 소속함수를 Y_1, Y_2, \dots, Y_m 로 나타내면, 식 (1)은 식 (2)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} \text{If } X \text{ is } A_1 \text{ then } Y \text{ is } b_{1,1}/Y_1 \\ \quad \quad \quad + b_{2,1}/Y_2 + \dots + b_{m,1}/Y_m \\ \text{If } X \text{ is } A_2 \text{ then } Y \text{ is } b_{1,2}/Y_1 \\ \quad \quad \quad + b_{2,2}/Y_2 + \dots + b_{m,2}/Y_m \\ \dots \\ \text{If } X \text{ is } A_k \text{ then } Y \text{ is } b_{1,k}/Y_1 \\ \quad \quad \quad + b_{2,k}/Y_2 + \dots + b_{m,k}/Y_m \end{aligned} \quad (2)$$

단, $b_{1,1}, \dots, b_{m,1}, \dots, b_{1,2}, \dots, b_{m,2}, \dots, b_{1,k}, \dots, b_{m,k}$ 는 실수

Relation matrix는 입력 X 와 출력의 소속함수들 사이의 관계를 나타내며, 식 (3)과 같이 구해진다. 따라서 퍼지 relation matrix의 $b_{j,i}$ 는 입력의 i 번째 멤버십(membership)과 출력의 j 번째 멤버십 사이의 관계 정도를 나타낸다.

$$\begin{matrix} & & & Y & & \\ & & & Y_1 & Y_2 & \dots & Y_m \\ X & & & & & & \\ A_1 & & & \left(\begin{matrix} b_{1,1} & b_{2,1} & \dots & b_{k,1} \\ b_{1,2} & b_{2,2} & \dots & b_{k,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1,m} & b_{2,m} & \dots & b_{k,m} \end{matrix} \right)^T & & & \end{matrix} \quad (3)$$

입력변수 X 에 대하여 k 개의 멤버십 함수에 대하여 $X=a$ 에 대한 새로운 벡터 a 를 다음과 같이 정의하였다.

$$a = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}^T \quad (4)$$

단, a_i 는 실제값 a 가 멤버십 함수 A_i 에 속하는 멤버십 정도를 나타내며, $i=1,2,\dots,k$ 이다.

정의된 벡터 a 와 relation matrix 간에 식 (5)과 같이 matrix곱을 행한 후, 식 (6)과 같이 moment method에 의하여 실제 출력 y 값을 구한다.

$$c_j(k) = \sum_{i=1}^k b_{j,i}(k) \times a_i(k) \quad (5)$$

단, $i=1,2,\dots,k$ 이고 $j=1,2,\dots,m$ 이다.

$$y(k) = \frac{\sum_{j=1}^m (f_j \times c_j(k))}{\sum_{j=1}^m c_j(k)} \quad (6)$$

단, f_j 는 Y 의 멤버십 함수들의 최대값의 대(support)값이며, $j=1,2,\dots,m$ 이다.

2.2 학습기능을 갖는 Z. Cao의 퍼지추론

본 절에서는 Z. Cao의 퍼지추론방식의 relation matrix를 경사 감소 학습법을 사용한 학습 기능을 갖는 추론 방식을 제안하고자 한다. 식 (3)의 relation matrix의 요소인 $b_{1,1}, \dots, b_{m,1}, \dots, b_{1,2}, \dots, b_{m,2}, \dots, b_{1,k}, \dots, b_{m,k}$ 를 본 연구에서 학습하고자 하는 파라미터들이다. 학습을 위해 오차 함수를 구성하였다. 이러한 오차가 최소화되도록 relation matrix를 수정하도록 하였다. 오차 함수 $E_p(k)$ 를 식 (7)과 같이 구성하였다.

$$\begin{aligned} E_p(k) &= \frac{1}{2} (r(k) - y(k))^2 \\ &= \frac{1}{2} e(k)^2 \end{aligned} \quad (7)$$

단, $r(k), y(k), e(k)$ 는 샘플링 시간 k 에서의 기준 출력과, 퍼지추론 출력, 오차를 나타낸다.

또한, relation matrix의 파라미터 $b_{j,i}$ 의 업데이트를 위한 $\Delta b_{j,i}(k)$ 는 경사 감소법에 의하여 아래와 같이 정의하고, 이를 연쇄법(chain-rule)을 사용하면 식 (8)과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta b_{j,i}(k) &= -\eta \frac{\partial E_p(k)}{\partial b_{j,i}(k)} \\ &= -\eta \frac{\partial E_p(k)}{\partial y(k)} \frac{\partial y(k)}{\partial c_j(k)} \frac{\partial c_j(k)}{\partial b_{j,i}(k)} \end{aligned} \quad (8)$$

단, η 는 학습율을 나타낸다.

식 (8)의 각 항들을 정리하면, 식(5)~식(7)로부터 다음 식 (9)~(11)들로 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial E_p(k)}{\partial y(k)} = -(r(k) - y(k)) = -e(k) \quad (9)$$

$$\frac{\partial y(k)}{\partial c_j(k)} = \frac{f_j \sum_{j=1}^m c_j(k) - \sum_{j=1}^m f_j c_j(k)}{(\sum_{j=1}^m c_j(k))^2} \quad (10)$$

$$\frac{\partial c_j(k)}{\partial b_{j,i}(k)} = a_i(k)^T \quad (11)$$

따라서 relation matrix 파라미터 $b_{j,i}$ 의 자동 동조를 위한 업데이트 식은 모멘텀 항을 갖는 경사 감소법에 의하여 식 (12)과 같이 구하여 진다.

$$b_{j,i}(k+1) = b_{j,i}(k) + \Delta b_{j,i}(k) + \alpha \Delta b_{j,i}(k-1) \quad (12)$$

단, α 는 모멘텀 상수, [0 1] 값으로 선정.

III. 제안된 퍼지추론법과 Mamdani 퍼지 추론법의 성능 비교

제안된 퍼지추론방법과 Mamdani의 퍼지추론 방법의 비교를 위하여 비선형 시스템을 근사하는 모의실험을 하였다.

3.1 단순한 비선형 시스템의 경우

단순한 비선형 시스템 : $y = \cos(t) : 0 \leq t \leq 2\pi$
 $\cos(t)$ 함수를 근사하는 퍼지 추론을 통하여 성능을 비교하였다. 또한 공정한 비교를 위하여 입출력 소속함수는 각각 같은 소속함수를 사용하며, 입력은 5개의 소속함수로 구성하고, 출력에 대해서는 3개로 구성하였다.

Mamdani의 추론은 max-min 추론법을 사용하고, 비퍼지화는 COG(center of gravity) 방법을 사용하였다. 퍼지규칙은 식 (13)과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{If } t \text{ is VS then } y \text{ is P} \\ & \text{If } t \text{ is S then } y \text{ is Z} \\ & \text{If } t \text{ is M then } y \text{ is N} \\ & \text{If } t \text{ is L then } y \text{ is Z} \\ & \text{If } t \text{ is VL then } y \text{ is P} \end{aligned} \quad (13)$$

Z. Cao의 퍼지추론방식은 $3 \times 5 = 15$ 개의 matrix로 구성되며, 각 matrix의 요소는 Mamdani의 추론규칙을 참고로 적절히 구성하였다. 식 (14)는 relation matrix를 나타낸다.

$$\begin{matrix} Y & & & & & t \\ & VS & S & M & L & VL \\ N & (0 & 0 & 1 & 0 & 0)^T \\ Z & (0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0)^T \\ P & (1 & 0 & 0 & 0 & 1) \end{matrix} \quad (14)$$

제안된 추론 방식은 학습을 위한 학습률(η)와 모멘텀 계수(α)는 각각 0.08, 0.8로 두고 사용하였으며, 100회 학습 후의 relation matrix는 식 (15)과 같이 구하였다.

$$\begin{matrix} Y & & & & & t \\ & VS & S & M & L & VL \\ N & (0.0151 & 0.1295 & 1.3341 & 0.0357 & 0.0000)^T \\ Z & (0.0076 & 0.1845 & 0.0091 & 0.3038 & 0.0000)^T \\ P & (1.3274 & 0.1265 & 0.0180 & 0.0588 & 0.9862) \end{matrix} \quad (15)$$

그림 1은 식 (14)의 추론규칙에 의한 Mamdani의 추론결과를 나타내었다. 그림 2는 relation matrix에 의한 Z. Cao의 퍼지추론결과를 나타낸다. 그림 3, 4를 비교한 결과 relation matrix를 갖는 퍼지추론결과가 Mamdani의 추론결과에 비하여 뛰어난 추론 성능을 보인다. 이것은 일반적인 Mamdani의 퍼지추론에서는 한개의 규칙에 대하여 한개의 규칙이 적용되는 반면에 relation

matrix를 갖는 퍼지추론에서는 한개의 규칙에 여러개의 relation matrix의 요소들에 의해 추론되어 지므로, 여러개의 규칙이 적용되는 것과 같은 효과를 얻는다. 그러므로 적은 개수의 멤버십 만으로도 뛰어난 성능을 얻을 수 있다.

그림 3는 식 (12)의 모멘텀 항을 갖는 경사감소 학습법을 사용하여 relation matrix를 학습한 후 퍼지추론 결과를 도시하였다. 그림 3의 mamdani 추론 방식과 그림 4의 Z. Cao의 추론에 비하여 더 정밀한 함수 근사 능력을 갖고 있음을 보였다.

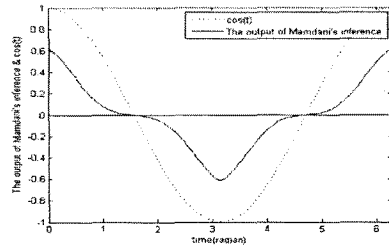


그림 1 Mamdani의 퍼지추론 결과
 Fig. 1 Mamdani's Fuzzy inference results

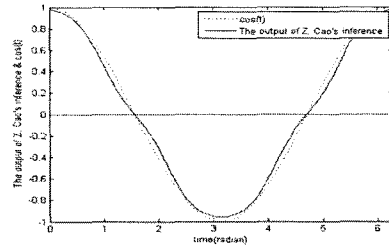


그림 2 Z. Cao의 퍼지추론 결과
 Fig. 2 Z. Cao's Fuzzy inference results

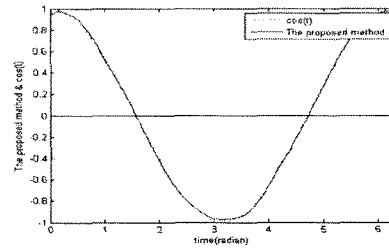


그림 3 학습후, Z. Cao의 퍼지추론 결과
 Fig. 3 Z. Cao's Fuzzy inference results after learning

3.2 복잡한 비선형 시스템의 경우

복잡한 비선형시스템 :

$$y = 2.4e^{-2t} \sin(2\pi t) \cos(2\pi t) : 0 \leq t \leq 1$$

복잡한 비선형 시스템 역시 추론의 공정한 비교를 위하여 입출력 소속함수는 각각 같이 구성하였다. 입력의 멤버십 함수의 개수는 7개로 구성하고, 출력에 대해서는 3개로 구성하였다.

Mamdani의 추론규칙은 비선형 함수를 도시하여 식(16)과 같이 구성하였다.

$$\begin{aligned}
 & \text{If } t \text{ is } VVS \text{ then } y \text{ is } Z \\
 & \text{If } t \text{ is } VS \text{ then } y \text{ is } P \\
 & \text{If } t \text{ is } S \text{ then } y \text{ is } N \\
 & \text{If } t \text{ is } M \text{ then } y \text{ is } Z \\
 & \text{If } t \text{ is } L \text{ then } y \text{ is } P \\
 & \text{If } t \text{ is } VL \text{ then } y \text{ is } N \\
 & \text{If } t \text{ is } VVL \text{ then } y \text{ is } Z
 \end{aligned} \tag{16}$$

Z. Cao의 퍼지추론방식은 $3 \times 7 = 21$ 의 matrix로 구성되며, Mamdani의 추론 규칙을 토대로 적절히 구성하였다. 식 (17)은 비선형 시스템에 대한 relation matrix를 나타낸다.

$$\begin{matrix}
 y & VVS & VS & S & M & L & VL & VVL \\
 N & (0.01 & 0.00 & 0.30 & 0.00 & 0.10 & 0.10 & 0.00) \\
 Z & (0.05 & 0.10 & 0.00 & 0.10 & 0.00 & 0.05 & 0.10) \\
 P & (0.02 & 0.30 & 0.10 & 0.00 & 1.20 & 0.05 & 0.00)
 \end{matrix}^T \tag{17}$$

제안된 추론 방식은 단순한 비선형 시스템과 같이 학습률과 모멘텀을 사용하였으며, 100회 학습 후의 relation matrix는 식 (18)와 같이 구하였다.

$$\begin{matrix}
 y & VVS & VS & S & M & L & VL & VVL \\
 N & (0.122 & -0.381 & 2.339 & 0.013 & 0.027 & 1.211 & 0.320) \\
 Z & (0.174 & 0.484 & 0.430 & 0.626 & 0.776 & 0.537 & 0.020) \\
 P & (-0.186 & 1.634 & 0.238 & 0.246 & 0.613 & 0.594 & 0.409)
 \end{matrix}^T \tag{18}$$

그림 4, 5, 6은 각각 Mamdani의 추론결과, Z. Cao의 추론결과 그리고 제안된 방식에 의한 추론 결과를 도시하였다. 앞선 단순한 선형 시스템의 결과와 같이 복잡한 비선형 시스템의 경우에도 relation matrix를 갖는 퍼지추론들의 결과가 Mamdani의 추론결과에 비하여 뛰어난 추론 성능을 보인다. Relation matrix의 요소들에 의해 여러 개의 규칙이 적용되는 것과 같은 효과를 얻는 것을 확인할 수 있었다. 또한 제안된 방법의 추론 방식이 Z. Cao의 추론에 비하여 매우 정밀한 함수 근사 능력을 갖고 있으며, 단순히 인간의 인지에 의한 relation matrix의 수정보다 매우 효율적임을 보였다.

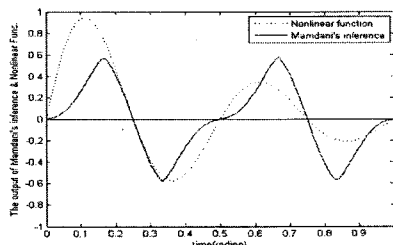


그림 4 Mamdani의 퍼지추론 결과
Fig. 4 Mamdani's Fuzzy inference results

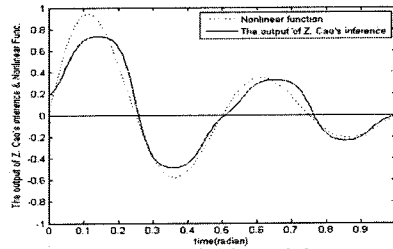


그림 5 Z. Cao의 퍼지추론 결과
Fig. 5 Z. Cao's Fuzzy inference results

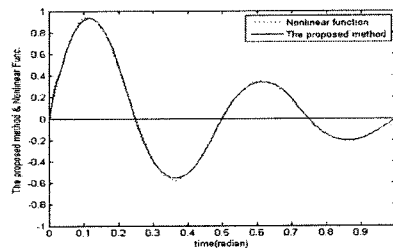


그림 6 학습후, Z. Cao의 퍼지추론 결과
Fig. 6 Z. Cao's Fuzzy inference results after learning

V. 결 론

본 연구에서는 Z. Cao의 퍼지추론방식을 인간의 지식에만 의존하여 relation matrix를 구성하지 않고, 경사 감소 학습법을 사용한 학습 기능을 갖는 추론 방식을 제안하였다. 제안된 학습 기능을 갖는 추론 방식은 Mamdani와 Z. Cao의 추론 방식에 비하여 함수 근사 능력이 우수하며, 매우 효율적임을 보였다.

참고문헌

- [1] L. A. Zadeh, "Fuzzy Sets," *Information and Control*, Vol. 8, pp. 338~358, 1965.
- [2] Y. F. Li, C. C. Lau, "Development of Fuzzy Algorithms for Servo Systems," *IEEE Control System Magazine*, pp. 65~72, 1989.
- [3] T. Takagi, M. Sugeno, "Fuzzy Identification of Systems and its Applications to Modeling and Control," *IEEE Trans. on Systems*, pp. 116~132, January, 1985.
- [4] Z. CAO, Abraham Kandel, and Lihong LI, "A New Model of Fuzzy Reasoning", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 36, pp. 311~325, 1990.
- [5] Daihee Park, Abraham Kandel, and Gideon Langholz, "Genetic-Based New Fuzzy Reasoning Models with Applications to Fuzzy Control", *IEEE Trans. on systems, man, and cybernetics*, Vol. 24, No. 1, January, 1994.