이산시간 특이시스템의 비약성 제어기 설계

김 종 해
선문대학교

Non-fragile controller design for discrete-time descriptor systems

Jong Hae Kim
SUNMOON University

요약 - 본 논문에서는 제어기에 승산형 섭동을 가지는 제어기와 이산시간 특이시스템을 안정화시키는 비약성 제어기 설계방법을 제시한다. 강인 비약성 제어기가 존재할 조건과 제어기 설계방법을 볼록최적화가 가능한 선형행렬부등식 접근방법으로 제안한다. 또한, 제어기의 약성 정도를 표시하는 비약성 척도를 동시에 계산함으로 승산형 섭동의 제어기 최대 변동정도를 제시한다. 제안한 비약성 제어기는 제어기의 이득 변동에도 불구하고 이산시간 특이시스템의 강인 안정성을 보장한다.

1. 서 론

기존의 상태공간 모델을 가지고는 해결하기 어려운 특이시스템에 대한 해석과 설계방법은 특이시스템의 특별한 성질들로 인하여 대규모 시스템, 특이 섭동이론, 제약적 기계시스템 등에 광범위하게 적용되어지기 때문에 특이시스템에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 또한, 연속시간 특이시스템에 대한 연구결과 뿐만 아니라 이산시간 특이시스템에 대한 안정화 문제와 제어기 설계방법에 대한 연구가 최근까지 관심사가 되고 있다. 연속시간 시스템의 강인 안정화(robust stabilization) 문제와 더불어 이산시간에서의 강인 안정화 문제는 최근까지도 많은 관심을 가지고 연구되어져 왔다. 하지만, 플랜트의 변수에 대하여 강인성을 가지도록 설계하거나 성능지수를 최적화하도록 설계하는 궤환시스템은 매우 정확한 제어기의 구현이 요구된다. 일반적인 제어기 설계방법은 제어기가 정확하게 구현할 수 있다는 가정하에서 이루어진다. 현장에서의 제어기의 구현문제는 A/D 또는 D/A 컨버터, 마무리오차(round-off error), 제한 워드 길이(finite word length) 등의 제어기 이득의 변동이 되는 요인이 발생한다. 따라서, 제작하는 제어기의 이득변동과 같은 불확실성에도 성능과 안정성을 유지하는 제어기를 설계해야 한다. 또한, 정확한 제어기의 구현이 가능하다 하더라도 제어기의 이득조정(gain tuning)이 필요하므로 제어기 약성(fragility)에 대한 연구가 시작된 이래로 최근까지 많은 연구들이 이루어져 왔다. 하지만 결과가 대부분 연속시간 시스템에 대한 결과이고 이산시간에 대한 비약성(non-fragile) 제어기 설계에 대한 연구결과는 미비한 상태이다. 또한, 이산시간 특이시스템에 대한 안정화를 만족하는 강인 비약성 제어기 설계 알고리듬에 대한 결과는 없는 실정이다.

본 논문은 이산시간 특이시스템과 승산형 섭동형태의 약성을 가지는 제어기 문제에 대한 안정화를 보장하는 비약성 제어기의 존재조건과 설계방법을 제안한다. 또한, 기존의 결과들이 최종 제어기를 설계하기 위해서는 몇 가지 변수들을 미리 선정하여야 하는 단점이 있으나 본 논문에서는 구하고자 하는 모든 변수의 견지에서 선형행렬부등식으로 제어기 존재조건과 설계방법을 표현하므로 최적화가 가능하다. 또한, 제어기의 비약성 척도를 제어기 설계와 동시에 계산하여 안정화를 만족하는 제어기의 최대 이득변동을 알 수 있도록 한다.

2. 본 론

2.1 문제설정

변수 불확실성을 가지는 이산 특이시스템

$$Ex(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{1}$$

을 다룬다. 여기서, $x(k) \in R^n$는 상태변수, $u(k) \in R^m$는 제어 입력변수, E는 $rank(E) = r \le n$을 만족하는특이행렬(singular matrix), 그리고 모든 시스템 행렬은 적절한 차원을 가진다. 비록 설계할 제어기의 형태가

$$u(k) = Gx(k) \tag{2}$$

와 같을지라도 구현하는 제어기의 형태를 승산형 섭동(multiplicative uncertainty)을 가지는

$$u(k) = [I + \alpha\Phi(k)]Gx(k) \tag{3}$$

의 형태로 가정한다. 여기서, G는 제어기 이득(controller gain), α는 양의 실수, 그리고 $\alpha\Phi(k)G$는 제어기 이득의 변동을 나타낸다. 그리고, $\Phi(k)$는 유계(bound)를 가지는

$$\Phi(k)^T\Phi(k) \le I \tag{4}$$

과 같이 정의한다. 또한, α는 제어기 이득의 변동에 대한 비약성척도(the measure of non-fragility)를 나타낸다. 변수 불확실성을 가지는이산 특이시스템 (1)과 약성을 포함하는 제어기 (3)으로 구성되는 폐루프시스템은

$$Ex(k+1) = [A + BG + \alpha B\Phi(k)G]x(k) \tag{5}$$

와 같이 주어진다. 따라서, 제어기 설계의 목적은 이산시간 특이시스템의 제어기 이득의 변동에도 불구하고 비약성 척도인 α의 범위이내에서 안정성을 보장하는 강인 비약성 제어기를 설계하는 것이다.

정의 1[6]. $Ex(k+1) = Ax(k)$의 이산시간 특이시스템에 대하여,

(i) $\det(zE - A) \ne 0$이면 $Ex(k+1) = Ax(k)$는 정규적(regular)이고,
(ii) $rank(E) = \deg[\det(zE - A)]$이고 정규적이면 코잘(causal)이고,
(iii) 정규적이고 $\det(zE - A)$의 모든 근이 단위원 내에 존재하면 안정하다.

다음은 논문의 수식전개를 위하여 사용하는 보조정리들을 소개한다.

보조정리 1[6]. $Ex(k+1) = Ax(k)$이 허용가능하기 위한 필요충분조건은

$$A^T(P - Y^TSY)A - E^TPE < 0 \tag{6}$$

을 만족하는 양의 정부호 행렬(positive-definite matrix) $P \in R^{n\times n}$와 대칭행렬(symmetric matrix) $S \in R^{(n-r)\times(n-r)}$가 존재하는 것이다. 여기서, $Y^T \in R^{n\times(n-r)}$는 $E^TY^T = 0$과 $rank(Y^T) = n - r$을 만족하는 행렬이다.

보조정리 2[7]. 대칭행렬 X의 역행렬이 존재하고, $\epsilon I - X > 0$을 만족하는 양의 상수 ϵ이 존재하면, 아래의 조건

$$\begin{aligned}&[A + \Delta A(k)]^TX[A + \Delta A(k)] \\ &\le A^T[X + X(\epsilon I - X)^{-1}X]A + \epsilon\Delta A(k)^T\Delta A(k)\end{aligned} \tag{7}$$

이 성립한다.

2.2 비약성 제어기 설계

본 절에서는 변수 불확실성을 가지는 이산 특이시스템과 제어기 이득의 변동에도 강인 안정화를 보장하는 강인 비약성 제어기 설계방법을 제시한다. 일반적으로 기존의 논문에서 많이 사용하는 시스템 행렬의 분해(decompositions)를 사용하지 않고 구하려는 모든 변

수의 측면에서 볼록최적화가 가능한 선형행렬부등식 접근방법으로 강인 안정화를 보장하는 존재조건과 제어기 설계방법을 제안한다.

정리 1. 변수 불확실성과 제어기 약성을 가지는 이산 시간 폐루프 특이시스템 (5)에 대하여, 아래의 행렬부등식

$$\begin{bmatrix} A_G^T X A_G^T + \epsilon\alpha^2\beta G^T G - E^T PE & (A+BG)^T X \\ * & X-\epsilon I \end{bmatrix} < 0 \tag{8}$$

을 만족하는 양의 정부호 행렬 P, 대칭행렬 S, 양의 상수 ϵ, α와 제어기 이득 G가 존재하면, 제어기 (2)는 안정화를 만족하는 비약성 제어기이다. 여기서, 몇 가지 변수는 아래와 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} &X = P - Y^T SY \\ &A_G = A + BG \\ &\beta = \|B^T B\|. \end{aligned} \tag{10}$$

증명: 변수 불확실성을 가지는 이산 특이시스템과 곱셈형 섭동을 가지는 제어기로 구성된 폐루프 시스템 (5)에 대하여 보조정리 1을 이용하면

$$(A_G + \alpha B\Phi(k)G)^T X(A_G + \alpha B\Phi(k)G) - E^T PE < 0 \tag{11}$$

의 관계를 가진다. 행렬부등식 (11)에서 왼쪽수식의 첫 번째 항은 보조정리 2를 이용하면 행렬부등식 (11)은

$$A_G^T[X + X(\epsilon I - X)^{-1}X]A_G - E^T PE + \epsilon(\alpha B\Phi(k)G)^T(\alpha B\Phi(k)G) < 0 \tag{12}$$

가 된다. 식 (12)에서, 좌변의 세 번째 항은 식 (4)와 (10), 및 보조정리 3의 관계에 의하여

$$\epsilon(\alpha B\Phi(k)G)^T(\alpha B\Phi(k)G) \le \epsilon\alpha^2\beta G^T G \tag{13}$$

이 된다. 따라서, 식 (12)와 (13)으로부터 슈어 여수(Schur complement) 정리를 이용하면 식 (8)을 얻는다. ■

정리 1은 구하고자 하는 변수(P, S, ϵ, α, G)의 측면에서 비선형성을 포함하는 요소가 존재하므로 볼록최적화가 불가능하여 해를 구하기 쉽지 않다. 따라서, 본 논문의 목적인 제어기 존재조건과 비약성 제어기 설계방법을 변수치환과 슈어 여수정리를 이용하여 모든 변수의 견지에서 선형행렬부등식으로 정리 2에서 제안한다.

정리 2. 이산시간 특이시스템 (1)과 제어기의 승산형 섭동을 가지는 제어기 (3)으로 구성되는 폐루프 이산 특이시스템 (5)에 대하여, 구하려는 변수(P, S, ϵ, μ)에 대하여 아래와 같은 선형행렬부등식으로 표현되는 최적화문제

Maximize μ *subjects to*

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & A^T P - A^T Y^T SY & A^T PB - A^T Y^T SYB & 0 \\ * & P - Y^T SY - \epsilon I & 0 & PB - Y^T SYB \\ * & * & \Omega_2 & 0 \\ * & * & * & \Omega_2 \end{bmatrix} < 0 \tag{14}$$

을 만족하는 양의 정부호 행렬 P, 대칭행렬 S, 양의 상수 ϵ, μ가 존재하면, 폐루프 시스템 (5)에 대하여 이산 특이시스템과 제어기 약성에 대하여 강인 안정성을 보장하는 제어기 이득은

$$G = -(2\eta\beta I + B^T XB)^{-1}B^T(P - Y^T SY)A \tag{15}$$

이고, 비약성 척도인 α는

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \tag{16}$$

으로부터 구할 수 있다. 여기서, 몇 가지 변수들은 아래와 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} &\Omega_1 = A^T PA - A^T Y^T SYA - E^T PE \\ &\Omega_2 = -\beta\mu I - B^T PB + B^T Y^T SYB \\ &\mu = \alpha^2\epsilon. \end{aligned}$$

증명: 행렬부등식 (8)은

$$\begin{bmatrix} A^T XA - E^T PE & A^T X \\ * & X - \epsilon I \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} G^T \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T XB \\ XB \end{bmatrix} V^{-1} \right\} V \left\{ \begin{bmatrix} G^T \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T XB \\ XB \end{bmatrix} V^{-1} \right\}^T - \begin{bmatrix} A^T XB \\ XB \end{bmatrix} V^{-1} \begin{bmatrix} A^T XB \\ XB \end{bmatrix} < 0 \tag{16}$$

과 같이 되고, 식 (16)은

$$\begin{bmatrix} A^T XA - E^T PE & A^T X \\ * & X - \epsilon I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma & G^T B^T X + A^T XBV^{-1}B^T X \\ * & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ XB \end{bmatrix} V^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ XB \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^T XB \\ XB \end{bmatrix} V^{-1} \begin{bmatrix} A^T XB \\ XB \end{bmatrix} < 0. \tag{17}$$

의 등가의 식으로 변형된다. 여기서, 몇 가지 변수들은 아래와 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} &\Gamma = G^T VG + G^T B^T XA + A^T XBG + A^T XBV^{-1}B^T XA \\ &V = \beta\mu I + B^T XB. \end{aligned}$$

식 (17)에서 좌변의 두 번째 행렬표현은 식 (15)의 제어기 형태에 의하여 영행렬이 된다. 따라서, 식 (17)은

$$\begin{bmatrix} A^T XA - E^T PE & A^T X \\ * & X - \epsilon I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ XB \end{bmatrix} V^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ XB \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^T XB \\ XB \end{bmatrix} V^{-1} \begin{bmatrix} A^T XB \\ XB \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$\le \begin{bmatrix} A^T XA - E^T PE & A^T X \\ * & X - \epsilon I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T XB & 0 \\ 0 & XB \end{bmatrix} V^{-1} \begin{bmatrix} A^T XB & 0 \\ 0 & XB \end{bmatrix} < 0 \tag{19}$$

의 관계를 가진다. 따라서, 식 (19)는 슈어 여수정리와 $\mu = \alpha^2\epsilon$으로부터 식 (14)를 얻을 수 있다. ■

3. 결 론

본 논문에서는 이산시간 특이시스템과 승산형 섭동의 제어기 약성을 가지는 시스템에 대한 강인 안정성을 보장하는 비약성 제어기 설계 알고리듬을 제시한다. 제안한 제어기의 존재조건과 제어기 설계방법은 변수치환과 슈어 여수정리를 이용하여 모든 변수의 측면에서 최적화가 가능한 선형행렬부등식으로 변형하였다. 따라서, 제어기의 비약성 척도와 제어기 이득을 포함하는 모든 변수는 동시에 구해질 수 있다.

[참 고 문 헌]

[1] I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara, and N. Suda, "H_∞ control for descriptor systems: A matrix inequalities approach", *Automatica*, vol. 33, pp. 669-673, 1997.

[2] L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya, "Robust, fragile, or optimal", *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 42, pp. 1098-1105, 1997.

[3] G. H. Yang and J. L. Wang, "Non-fragile H_∞ control for linear systems with multiplicative controller gain variations", Automatica, vol. 37, pp. 727-737, 2001.

[4] C. H. Fang and F. R. Chang, "Analysis of stability robustness for generalized state-space systems with structured perturbations," *Systems and Control Letters*, vol. 22, pp. 109-114, 1993.

[5] S. Xu and C. Yang, "An algebraic approach to the robust stability analysis and robust stabilization of uncertain singular systems", *International Journal of Systems Science*, vol. 31, pp. 55-61, 2000.

[6] G. Zhang and Y. Jia, "New results on discrete-time bounded real lemma for singular systems: strict matrix inequality conditions", *Proc. of ACC*, pp. 634-638, 2002.

[7] S. Wo, Y. Zou, M. Sheng, and S. Xu, "Robust control for discrete-time singular large-scale systems with parameter uncertainty", *Journal of the Franklin Institute*, vol. 334, pp. 97-106, 2007.