

## 시간 지연을 갖는 Lipschitz 비선형 시스템의 강인 상태 관측기

이 성 렬  
 군산대학교 전자정보공학부

### Robust State Observer for Lipschitz Nonlinear Systems with Time Delay

Sungryul Lee

School of Electronic & Information Engineering, Kunsan University

**Abstract** - This paper presents a robust state observer design for a class of Lipschitz nonlinear systems with time delay and external disturbance. A sufficient conditions on the existence of the proposed observer are characterized by linear matrix inequalities. It is also shown that the proposed observer design can reduce the effect on the estimation error of external disturbance up to the prescribed level in spite of the existence of time delay. Finally, a numerical example is provided to verify the proposed design method.

#### 1. 서 론

최근에 Lipschitz 비선형 시스템의 관측기 설계 문제가 여러 논문에서 많은 관심을 끌고 있다. Lipschitz 비선형 시스템은 선형부분시스템과 Lipschitz 특성을 갖는 비선형 부분시스템으로 구성된 시스템을 말한다. Thau[1]는 최초로 Lipschitz 비선형 시스템의 관측기 연구를 수행하였다. [1]에서 관측기의 안정도를 보장하는 충분조건을 유도하였다. 그러나 이 조건은 선정된 설계 변수가 안정도를 만족시키는지 분석하는데 유용하지만 안정도를 만족시키는 설계 변수를 체계적으로 유도하는 방법을 제공하지는 못한다. Raghavan은 [2]에서 어떤 대수적 리카티 방정식의 해를 이용하여 관측기를 설계하는 방법을 제안하였다. 그러나 선형부분시스템이 관측 가능한 경우에도 그의 알고리즘이 실패하는 단점이 있다. 또한, 관측기의 이득행렬과 안정도 사이의 관계가 분명하지 않은 단점이 있다. 이런 문제점은 Rajamani에 의하여 해결되었다. [3]에서 점근적 안정도를 보장하는 관측기 이득에 관한 분명한 충분조건을 제공하였으며 이득행렬을 체계적으로 계산하는 알고리즘을 제공하였다. 또,  $H_\infty$  제어 이론의 관점에서 해석을 제공하였다. [3]의 결과는 [4]에서 지차관측기 설계에 응용되었다. Pertew는 Rajamani의  $H_\infty$ 관점의 아이디어를 이용하여 Lipschitz 비선형 시스템의 관측기 설계 문제를 선형  $H_\infty$  제어기 설계 문제로 변환하는 방법을 제안하였고 이를 이용하여  $H_\infty$  관측기를 제안하였다.[5] Pertew가 제안한 관측기는 동적 상태 관측기이다. 기존의 관측기에 안정한 동역학을 첨가함으로써 설계의 자유도를 증가시킬 수 있다. 한편, [6]에서는 Thau가 제안한 조건을 선형행렬부등식을 이용하여 표현함으로써 안정도를 만족하는 이득행렬을 수치적으로 쉽게 계산하는 방법을 제시하였다. 또한 추정오차에 대한 외란의 영향을 최소화 하는 강인 관측기를 제안하였다.

본 논문에서는 시간 지연을 갖는 Lipschitz 비선형 시스템의 강인 상태 관측기 설계 방법을 제안하고자 한다. 출력 및 플랜트에서 존재하는 시간 지연과 미지의 외란을 동시에 고려한다. 또한 선형행렬 부등식을 이용하여 시간지연이 존재함에도 불구하고 추정오차에 대한 외란의 영향을 최소화 할 수 있는 설계 방법을 제안한다. 마지막으로 제안한 설계 방법의 유효성을 증명하기 위하여 수치 예제를 제공한다.

#### 2. 본 론

##### 2.1 문제 정의

본 논문에서는 다음 식 (1)과 같은 형태의 비선형 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t-d) + \Phi(x(t), u(t)) + Bw(t) \\ y(t) &= Cx(t) + C_d x(t-d) + Dw(t) \end{aligned} \quad (1)$$

위 식에서  $x(t) \in R^n$ 는 시스템의 상태 벡터,  $y(t) \in R^p$ 는 시스템의 출력,  $u(t) \in R^m$ 는 시스템의 입력,  $A, A_d \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times q}$ ,  $C, C_d \in R^{p \times n}$ ,  $D \in R^{p \times q}$ 는 모두 상수 행렬,  $\Phi: R^n \times R^m \rightarrow R^n$ 는 비선형 함수를 나타낸다.  $d > 0$ 는 시간 지연을 나타내고 그 값이 알려져 있지 않다고 가정한다. 그리고 알려진 함수  $\phi(t)$ 을 이용하여 상태 변수의 초기 조건은 다음처럼 가정한다.

$$x(t) = \phi(t), t \in [-d, 0]$$

$\omega(t) \in R^r$ 는 유한한 크기를 갖는 미지의 외란 입력을 나타낸다. 앞으로, 외란  $\omega(t)$ 과 시간 지연  $d$ 를 제외한 식 (1)에 대한 모든 정보를 알고 있다고 가정한다. 본 논문에서는 식 (1)의 형태를 가지는 시스템 중에서 다

음 가정을 만족하는 시스템을 고려한다.

가정 1: 시스템 (1)의 비선형 함수  $\Phi$ 는  $\Phi(0, u) = 0$ 를 만족시키고 모든  $x_1, x_2 \in R^n$ 와 모든  $u \in R^m$ 에 대하여 다음 식 (2)를 만족시키는 어떤 상수  $\alpha > 0$ 가 존재한다.

$$\|\Phi(x_1, u) - \Phi(x_2, u)\| \leq \alpha \|x_1 - x_2\| \quad (2)$$

가정 1은 식 (1)의 비선형 함수가 Lipschitz 조건을 만족함을 의미한다.  $\alpha$ 를 Lipschitz 상수라고 부른다. 다음에서 앞으로 제안할 강인 상태 관측기의 정의를 제공하겠다. 먼저 다음과 같은 시스템을 고려해 보자.

$$\dot{\hat{x}}(t) = f_o(\hat{x}(t), u(t), y(t)), \hat{x}(t) \in R^n \quad (3)$$

정의 1: 만약 식 (3)이 식 (1)의 외란이  $\omega = 0$ 인 경우 추정오차의 점근적 안정도를 보장하는 상태 관측기이고 외란이  $\omega \neq 0$ 인 경우 다음 식 (4)을 만족시키는 상수  $0 < \gamma < 1$ 가 존재할 때 식 (3)을 식(1)의 강인 상태 관측기라고 정의한다.

$$\int_0^t e^T(s)e(s)ds \leq \gamma^2 \int_0^t \omega^T(s)\omega(s)ds + \beta, \forall t \geq 0 \quad (4)$$

여기서  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ 이고  $\beta$ 는 클래스  $K$ 함수이다.

보조정리 1[9]: 선형행렬 부등식 (5)는 식 (6)과 동가이다.

$$\begin{pmatrix} Q(z) & S(z) \\ S^T(z) & R(z) \end{pmatrix} < 0 \quad (5)$$

$$R(z) < 0, Q(z) - S(z)R^{-1}(z)S^T(z) < 0 \quad (6)$$

위 식에서  $Q(z) = Q^T(z), R(z) = R^T(z), S(z)$ 는 변수  $z$ 에 대한 아핀(affine)함수이다.

증명: [9]를 참조할 것. ■

본 논문에서 다룰 문제는 식 (1)과 같은 비선형 시스템에 대하여 제시한 가정을 이용하여 식 (4)의 특성을 만족시키는 식 (3)과 같은 상태 관측기를 설계하는 문제이다.

##### 2.2 강인 상태 관측기 설계

이번 장에서는 앞 장에서 제시한 비선형 시스템에 대하여 강인 상태 관측기 설계 방법을 제안한다. 다음과 같은 기존의 루엔버거 타입의 관측기를 고려해보자

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \Phi(\hat{x}(t), u(t)) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (7)$$

정리 1: 만약 비선형 시스템 (1)이 가정 1을 만족시키고 다음 비선형 행렬부등식 (8)을 만족시키는 양한정 대칭 행렬  $P_1, P_2, Q$ , 관측기 이득 행렬  $L$ , 상수  $0 < \gamma < 1$ 이 존재한다면 시스템 (7)는 시스템 (1)의 강인 상태 관측기이다.

$$\begin{pmatrix} \Delta_{11} & 0 & P_1(A_d - LC_d) & P_1(B - LD) \\ * & \Delta_{22} & P_2A_d & P_2B \\ * & * & -Q & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I_q \end{pmatrix} < 0 \quad (8)$$

위 식 (8)에서 행렬  $\Delta_{11}, \Delta_{22}$ 를 다음처럼 정의한다.

$$\Delta_{11} = (A - LC)^T P_1 + P_1(A - LC) + \alpha^2 P_1 P_1 + 2I_n$$

$$\Delta_{22} = A^T P_2 + P_2 A + \alpha^2 P_2 P_2 + I_n + Q$$

증명: 먼저 추정오차를  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ 으로 정의하고 식 (1)과 (7)을 고려하면 오차동역학을 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= Ax(t) + A_d x(t-d) + \Phi(x(t), u(t)) + Bw(t) \\ &\quad - A\hat{x}(t) - \Phi(\hat{x}(t), u(t)) - L(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ &= (A - LC)e(t) + (A_d - LC_d)x(t-d) \\ &\quad + \Phi(x(t), u(t)) - \Phi(\hat{x}(t), u(t)) \\ &\quad + (B - LD)w(t) \end{aligned} \quad (9)$$

오차 동역학 (9)에 대한 다음과 같은 리아푸노프 후보함수를 정의한다.

$$\begin{aligned}
V &= V_1 + V_2 + V_3 \\
V_1 &= e^T(t)P_1e(t), \\
V_2 &= x^T(t)P_2x(t), \\
V_3 &= \int_{t-d}^t x^T(s)Qx(s)ds
\end{aligned} \tag{10}$$

먼저  $V_1$ 의 시간 도함수를 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= \dot{e}^T P_1 e + e^T P_1 \dot{e} \\
&= e^T [(A-LC)^T P_1 + P_1 (A-LC)] e \\
&\quad + 2e^T P_1 [\Phi(x, u) - \Phi(x-e, u)] \\
&\quad + 2e^T P_1 (A_d - LC_d)x(t-d) \\
&\quad + 2e^T P_1 (B-LD)\omega \\
&\leq e^T [(A-LC)^T P_1 + P_1 (A-LC)] e \\
&\quad + 2\alpha \|e^T P_1\| \|e\| \\
&\quad + 2e^T P_1 (A_d - LC_d)x(t-d) \\
&\quad + 2e^T P_1 (B-LD)\omega \\
&\leq e^T [(A-LC)^T P_1 + P_1 (A-LC)] e \\
&\quad + \alpha^2 e^T P_1 P_1 e + e^T e \\
&\quad + 2e^T P_1 (A_d - LC_d)x(t-d) \\
&\quad + 2e^T P_1 (B-LD)\omega
\end{aligned} \tag{11}$$

위 식에서  $I_n$ 은  $n$ 차 단위행렬이다. 그리고,  $V_2$ 의 시간 도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 &= \dot{x}^T(t)P_2x(t) + x^T(t)P_2\dot{x}(t) \\
&= x^T(t)[A^T P_2 + P_2 A]x(t) + 2x^T(t)P_2 A_d x(t-d) \\
&\quad + 2x^T(t)P_2 \Phi(x(t), u(t)) + 2x^T(t)P_2 B \omega(t) \\
&\leq x^T(t)[A^T P_2 + P_2 A]x(t) + 2x^T(t)P_2 A_d x(t-d) \\
&\quad + 2\alpha \|x^T(t)P_2\| \|x(t)\| + 2x^T(t)P_2 B \omega(t) \\
&\leq x^T(t)[A^T P_2 + P_2 A]x(t) + 2x^T(t)P_2 A_d x(t-d) \\
&\quad + \alpha^2 x^T(t)P_2 P_2 x(t) + x^T(t)x(t) \\
&\quad + 2x^T(t)P_2 B \omega(t) \\
&\leq x^T(t)[A^T P_2 + P_2 A + \alpha^2 P_2 P_2 + I_n]x(t) \\
&\quad + 2x^T(t)P_2 A_d x(t-d) + 2x^T(t)P_2 B \omega(t)
\end{aligned} \tag{12}$$

마지막으로,  $V_3$ 의 시간 도함수는 다음과 같다.

$$\dot{V}_3 = x^T(t)Qx(t) - x^T(t-d)Qx(t-d) \tag{13}$$

식 (11), (12), (13)을 이용하면  $V$ 의 시간 도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 \\
&\leq e^T [(A-LC)^T P_1 + P_1 (A-LC) + \alpha^2 P_1 P_1 + 2I_n] e \\
&\quad + 2e^T P_1 (A_d - LC_d)x(t-d) \\
&\quad + 2e^T P_1 (B-LD)\omega \\
&\quad + x^T(t)[A^T P_2 + P_2 A + \alpha^2 P_2 P_2 + I_n + Q]x(t) \\
&\quad + 2x^T(t)P_2 A_d x(t-d) + 2x^T(t)P_2 B \omega(t) \\
&\quad - x^T(t-d)Qx(t-d) \\
&\quad - e^T(t)e(t) + \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t) \\
&= \begin{pmatrix} e(t) \\ x(t) \\ x(t-d) \\ \omega(t) \end{pmatrix}^T \Delta \begin{pmatrix} e(t) \\ x(t) \\ x(t-d) \\ \omega(t) \end{pmatrix} - e^T(t)e(t) + \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t)
\end{aligned} \tag{14}$$

위 식에서 행렬  $\Delta$ 를 다음처럼 정의한다.

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & 0 & P_1(A_d - LC_d) & P_1(B-LD) \\ * & \Delta_{22} & P_2 A_d & P_2 B \\ * & * & -Q & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I_n \end{pmatrix}$$

위 식에서 행렬  $\Delta_{11}, \Delta_{22}$ 를 다음처럼 정의한다.

$$\Delta_{11} = (A-LC)^T P_1 + P_1 (A-LC) + \alpha^2 P_1 P_1 + 2I_n$$

$$\Delta_{22} = A^T P_2 + P_2 A + \alpha^2 P_2 P_2 + I_n + Q$$

식 (8)에 의하여 식 (14)는 다음과 같다.

$$\dot{V} \leq -e^T(t)e(t) + \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t) \tag{15}$$

$\omega(t) = 0$ 인 경우 식 (15)으로부터 관측기의 추정오차는 지수 함수적으로

0으로 수렴한다.  $\omega(t) \neq 0$ 인 경우 식 (15)의 양변을 시간 구간  $[0, t]$ 에서 적분하면 다음과 같다.

$$\int_0^t \dot{V} ds = V(t) - V(0) \leq \int_0^t [-e^T e + \gamma^2 \omega^T \omega] ds \tag{16}$$

$V$ 는 양한정 함수이므로 식 (16)으로부터 다음을 쉽게 유도할 수 있다.

$$\int_0^t e^T(s)e(s)ds \leq \gamma^2 \int_0^t \omega^T(s)\omega(s)ds + V(0) \tag{17}$$

따라서, 식 (17)으로부터 식 (7)은 식(1)의 강인 상태 관측기이다. ■

정리 1의 식 (8)은 비선형 행렬 부등식이므로 그것의 해를 구하는 것은 매우 어렵다. 그러나, 보조정리 1을 이용하여 식 (8)을 선형행렬 부등식으로 변환할 수 있다.

정리 2: 만약 비선형 시스템 (1)이 가정 1을 만족시키고 다음 선형행렬 부등식 (18)을 만족시키는 양한정 대칭 행렬  $P_1, P_2, Q$ , 행렬  $X$ , 상수  $0 < \gamma < 1$  이 존재한다면 시스템 (7)은 시스템 (1)의 강인 상태 관측기이다. 그리고, 관측기 이득 행렬은  $L = P_1^{-1}X$ 이다.

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{11} & 0 & P_1 A_d - X C_d & P_1 B - X D & P_1 & 0 \\ * & \Sigma_{22} & P_2 A_d & P_2 B & 0 & P_2 \\ * & * & -Q & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I_q & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\alpha^{-2} I_n & 0 \\ * & * & * & * & 0 & -\alpha^{-2} I_n \end{pmatrix} < 0 \tag{18}$$

위 식 (18)에서 행렬  $\Sigma_{11}, \Sigma_{22}$ 를 다음처럼 정의한다.

$$\Sigma_{11} = A^T P_1 - C^T X^T + P_1 A - X C + 2I_n$$

$$\Sigma_{22} = A^T P_2 + P_2 A + I_n + Q$$

증명: 증명은 보조 정리 1의 결과를 이용하여 식 (8)과 식 (18)이 등가임을 보이는 것으로 충분하다. 식 (14)의 행렬  $\Delta$ 는 다음처럼 분해할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & 0 & P_1(A_d - LC_d) & P_1(B-LD) \\ * & \Sigma_{22} & P_2 A_d & P_2 B \\ * & * & -Q & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I_q \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha^2} I_n & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha^2} I_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{19}$$

위 식에서 다음처럼 정의한다.

$$\Sigma_{11} = (A-LC)^T P_1 + P_1 (A-LC) + 2I_n$$

$$\Sigma_{22} = A^T P_2 + P_2 A + I_n + Q$$

식 (19)에서  $X = P_1 L$ 으로 정의하면 보조정리 1에 의하여 식 (8)과 식 (18)은 등가이다. ■

### 3. 결 론

본 논문에서 외란과 시간 지연이 존재하는 비선형 시스템의 강인 관측기 설계 방법을 제안하였다. 제안한 설계 방법은 시간 지연값에 영향을 받지 않는다. 또한, 추정 오차에 대한 외란의 영향을 최소화할 수 있다. 관측기의 이득 행렬은 상용 소프트웨어를 이용하여 쉽게 풀 수 있는 선형행렬 부등식을 이용하여 구할 수 있다. 마지막으로 수치 예제를 통하여 제안한 방법의 타당성을 입증하였다.

### [참 고 문 헌]

- [1] F. Thau, "Observing the state of nonlinear dynamic systems", *Int. J. of Contr.*, vol. 17, no. 3, pp. 471-479, 1973.
- [2] S. Raghavan and J. Hedrick, "Observer design for a class of nonlinear systems," *Int. J. of Contr.*, vol.59, pp.515-528, 1994.
- [3] R. Rajamani, "Observers for Lipschitz nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 43, no.3, pp.397-401, 1998.
- [4] F. Zhu, and Z. Han, "A note on observers for Lipschitz nonlinear systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 47, pp. 1751-1754, 2002.
- [5] A. M. Pertew, H. J. Marquez, and Q. Zhao, "H $\infty$  Observer Design for Lipschitz Nonlinear Systems", *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. 51, no. 7, pp. 1211-1216, 2006.
- [6] M. Abbaszadeh and H. Marquez, "A Robust Observer Design Method for Continuous-Time Lipschitz Nonlinear Systems", *Proc. of the 45th IEEE Conf. on Decision & Control*, pp. 3795-3800, 2006.
- [7] S. P. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnam, "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory," vol. 15, Philadelphia, PA: SIAM, 1994.