# 이산 시간 시스템에서 채터링 감소를 위한 연속 슬라이딩 모드 제어

최승옥, 유관호
성균관대학교, 전자전기컴퓨터공학과

# Continuous Sliding Mode Control for Chattering Reduction in Discrete Time System

Seung-Ok Choi, Kwan-Ho You
Sungkyunkwan University, School of Electronic and Electrical Engineering

**Abstract** - 고전적인 슬라이딩 모드 제어는 시스템의 동특성에 관계없이 시스템의 상태를 설계자의 의도대로 목적에 맞게 제어할 수 있지만 시스템의 본질적인 한계로 인해 제어입력에서 채터링이라는 불가피한 요소를 포함하게 된다. 본 논문에서는 이산 시간 시스템에서 고주파 성분으로 인한 스위칭 입력의 부정적인 영향인 채터링을 감소시키기 위해 연속 슬라이딩 모드 제어기법을 제안한다. 제안된 기법은 PZT 나노 스테이지에서 슬라이딩 모드의 강인성과 만족스러운 시스템 제어성능을 보여준다.

## 1. 서 론

비선형 제어 기법 중 하나인 슬라이딩 모드 제어기법은 파라미터 변동과 외란, 그리고 모델링 되지 않은 시스템의 동특성에 대한 강인성으로 인해 가장 널리 연구되어 지고 있는 현대 제어 이론이다. 슬라이딩 모드 제어기법은 시스템의 동특성과는 별개로 설계자가 슬라이딩 평면을 지정할 수 있으며 시스템의 상태가 슬라이딩 평면에 유지될 수 있다면 시스템은 설계자의 의도대로 제어목적에 부합한 성능을 보여준다[1][2].

하지만 슬라이딩 모드 제어기법은 그 특성에 의해 근본적으로 도달 기간(reaching phase)문제와 채터링(chattering)문제를 가지고 있다. 도달 기간 감소를 위해 움직이는 슬라이딩 면을 도입하여 도달 부분에서의 불안정성을 감소[3]시키는 연구와 실질적으로 시스템에 치명적인 피해를 줄 수 있는 채터링 문제가 가장 활발히 연구되어 지는 부분으로서 슬라이딩 평면에 경계층(boundary layer)을 도입하여 불연속적인(switching)요소를 부분적으로 선형화 하는 방법이 가장 널리 이용되는 방법이다[4]. 이러한 연구와 더불어 Lyapunov함수를 이용한 도달법칙(reaching law)과 Lyapunov 안정 조건을 이용하여 연속 슬라이딩 모드를 유도하는 연구가 진행되어 오고 있다[5][6].

시스템에 채터링이 발생하면 시스템의 성능이 저하되고 수명을 단축시키는 원인이 된다. 본 논문에서는 PZT나노 시스템의 상태를 Kalman Filter를 이용하여 추정하고 불필요한 채터링을 없애기 위해 추정된 상태를 Lyapunov 함수 및 안정조건을 이용하여 구한 연속 슬라이딩 모드 제어기법에 적용한다. 기본적으로 시스템은 이산 시간 시스템에서 구현되므로 Kalman Filter 및 연속 슬라이딩 모드 제어기법은 이산시간시스템에서 적용 가능하도록 변형되어 적용되고 실험을 통해 그 성능을 입증하였다.

## 2. 본 론

### 2.1 이산 시간 칼만 필터

일반적으로 칼만 필터는 과거의 데이터를 이용하여 가우시안 잡음을 가지는 선형 시스템의 상태변수를 추정하는 방법으로서 1960년대에 칼만에 의해 처음 소개된 이후 많은 발전을 거듭해 오고 있다. 필터의 수렴성, 강인성 및 디지털 컴퓨터에서의 실시간 처리능력으로 인해 가장 대표적인 상태 추정 기법 중 하나이다.

선형 시스템의 이산 차분 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Gw_k, \qquad w_k \sim (0,Q),\ Q \geq 0 \\ z_k &= Hx_k + \nu_k, \qquad\qquad \nu_k \sim (0,R),\ R > 0 \end{aligned} \tag{1}$$

프로세스 잡음($w_k$)과 측정 잡음($\nu_k$)은 서로 상관관계가 없는 가우시안 노이즈로서 분산 Q와 R을 가진다.

칼만 필터는 직전 단계에서 사전 예측과정을 거쳐 현시점에서 실제 측정된 값을 이용하여 업데이트 하는 과정으로 이루어져있다. 이러한 과정을 반복적으로 수행해 시스템의 상태를 추정하게 되는 것이다. 상태 오차 분산을 $P_k$라고 하고 초기 값을 $\hat{x}_0 = \overline{x}_0$, $P_0 = P_{x_0}$로 가정하면 칼만 필터의 추정과정은 다음과 같다.

사전 예측 과정:

$$\begin{aligned} P_k^- &= A_{k-1}P_{k-1}A_{k-1}^T + G_{k-1}Q_{k-1}G_{k-1}^T \\ \hat{x}_k^- &= A_{k-1}\hat{x}_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} \end{aligned} \tag{2}$$

측정 업데이트 과정:

$$\begin{aligned} P_k &= P_k^- - P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} H_k P_k^- \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H_k\hat{x}_k^-) \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 $K_k = P_k H_k^T R_k^{-1}$는 칼만 이득 값이다. 수렴성을 보장받는 칼만 필터는 모델링의 정확도, P의 초기치나 Q와 R의 값에 따라 성능이 변하므로 필터 설계 시 주의해야 할 부분이다.[7]

### 2.2 연속 슬라이딩 모드 컨트롤

Lyapunov 함수를 이용한 도달법칙과 안정조건을 이용해 채터링 없는 연속 슬라이딩 모드 제어기법을 유도한다. 먼저 이산 시간에서의 선형 시스템을 고려한다.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{4}$$

여기서, $x \in R^n$은 $n$차 상태 벡터이고 $u \in R^m$은 $m$차 제어 입력이다. 시스템의 상태를 제약해 제어 목적을 달성하는 슬라이딩 면은 $n$차 다항식의 형태로 표현된다.

$$s(k) = P_1x_1(k) + P_2x_2(k) + \ldots + P_nx_n(k) = P^Tx(k) \tag{5}$$

정의 된 슬라이딩 면을 통해 슬라이딩 모드가 발생하기 위해선 Lyapunov 함수의 2차 곱의 도함수가 음의 한정(negative definite)함수가 되도록 해야 한다.

슬라이딩 조건:

$$s(k) \cdot \Delta s(k) = s(k)\{s(k+1) - s(k)\} < 0 \tag{6}$$

$\Delta s(k) = P^Tx(k+1) - P^Tx(k)$이므로 슬라이딩 조건은 다음과 같다.

$$s(k) \cdot \Delta s(k) = P^Tx(k)\{P^Tx(k+1) - P^Tx(k)\} \tag{7}$$

$u = -Kx(k) < \delta\,(\delta > 0)$라 하고, 위 식을 정리하면 아래 식이 유도된다.

$$\begin{aligned} & P^Tx(k)P^T\{Ax(k) - BKx(k) - x(k)\} \\ &= P^Tx(k)P^T\{(A-I) - BK\}x(k) \\ &= P^Tx(k)(P^TB)\{(P^TB)^{-1}P^T(A-I) - K\}x(k) \\ &= P^Tx(k)(P^TB)(\alpha - K)x(k) < 0 \end{aligned}$$

슬라이딩 모드의 안정 조건을 만족시키기 위해 두 개의 제어입력을 교대로 사용한 기존의 방법대신 연속적인 형태의 제어 입력을 유도한다. 이를 통해 스위칭으로 인한 채터링을 제거 할 수 있다. 위의 조건을 항상 만족하기 위해서 연속 슬라이딩 모드 제어 입력 이득$K$는 다음과 같아야 한다.

$$K_i = \alpha_i + \delta_i\sigma_i(k) \qquad ,\delta_i > 0 \tag{8}$$

여기서,

$$\alpha = (P^T B)^{-1} P^T (A - \hat{A}) = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_3] \quad (9)$$

$$\sigma_i(k) = P^T x(k) P^T x_i(k) = s(k) P^T B x_i(k) \quad (10)$$

따라서 위식을 만족하게 되면 슬라이딩 모드 제어에서 채터링은 발생하지 않으며 안정적인 시스템 제어를 할 수 있게 된다.

## 3. 시뮬레이션 및 고찰

### 3.1 시스템 모델링

연속 슬라이딩 모드 제어를 통한 시뮬레이션을 수행하기 위해 PZT스테이지는 다음과 같이 구성되었다. PI사의 PZT 액츄에이터(PI: P-621.CL)를 방진 테이블 위에 얹고 변위를 측정하기 위해 정전용량 센서(PI: D-100)를 사용하였다. 스테이지를 구동하기 위해 LVPZT-amplifier와 PZT-servo controller를 설치하였고 dSPACE 장비를 이용하여 컴퓨터와의 인터페이스를 하였다.

실제로 PZT시스템을 수학적으로 모델링하기란 쉽지가 않다. 따라서 이와 같은 비선형 시스템을 모델링하기 위한 방법 중 하나인 시스템 식별법(System Identification method)을 이용하여 이산 시간에서의 전달함수를 구할 수 있다.

$$G(k) = \frac{0.00287z^2 + 0.00138z + 0.00303}{z^3 - 2.236z^2 + 1.59s - 0.3466} \quad (11)$$

여기서 샘플링 시간은 $T = 0.002$sec로 설정되었다.
전달함수 식(11)을 이산 시간 상태 방정식으로 표현하면 아래와 같다.

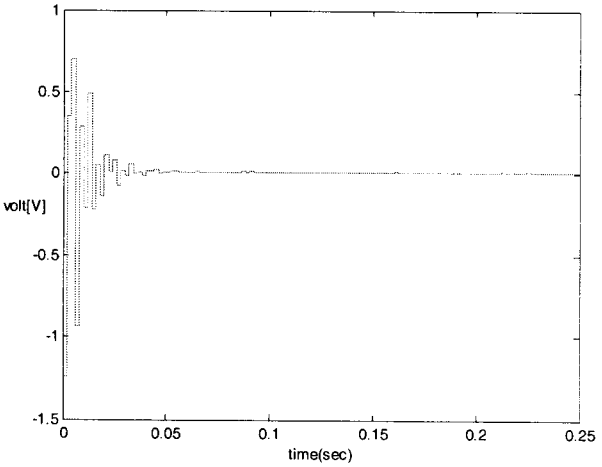
$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + v$$
$$y(k) = Cx(k) + w \quad (12)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2.236 & -1.59 & 0.3466 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0.0029 \quad 0.0014 \quad 0.0030]$$

### 3.2 시뮬레이션

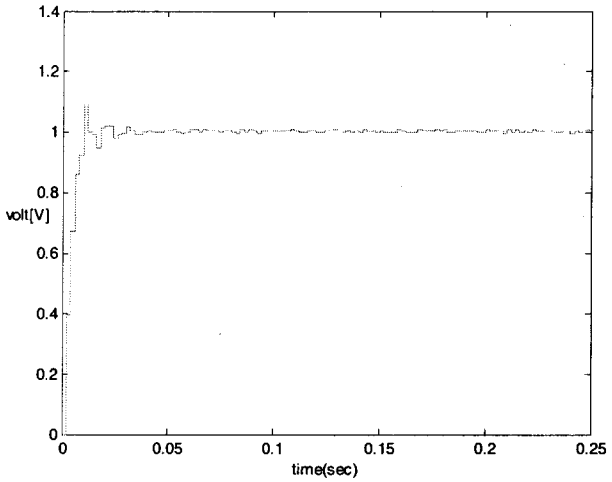
시뮬레이션은 PZT 시스템의 SI방법을 통한 상태 공간 방정식에 연속 슬라이딩 모드 제어 입력을 인가한다. 또한 슬라이딩 모드 제어의 중요한 특징인 강인성을 확인하기 위해 실제 시스템과 모델링 사이에 존재하는 불확실성과 외란을 인가하여 그 결과를 관찰하였다.




**<그림 1> 연속 슬라이딩 모드 제어 입력**

Lyapunov 함수의 조건을 이용해 구한 연속 슬라이딩 모드 제어 입력을 통해 <그림1>에서 실제 채터링이 발생하지 않는 것을 볼 수 있다. 반대로 고전 슬라이딩 모드 제어 입력에서는 연속적인 스위칭과 고주파 성분의 작용으로 인해 제어 입력에서 채터링을 피할 수가 없다. 이러한 연속적인 제어입력은 상대적으로 외란의 영향에 자유로운 슬라이딩 모드의 특성인 강인성을 유지하면서도 본래의 제어 목적에 부합하는 결과를 얻을 수 있다. 하지만 초기에 큰 제어 입력이 필요한 문제점이 있다.

<그림2>는 이러한 연속 슬라이딩 모드 제어 입력을 통해 나온 시스템의 결과를 나타낸다. 시뮬레이션에 사용한 실제 시스템은 제어 입력으로 전압을 인가하여 측정한 압전소자의 변위를 다시 전압으로 출력하는 커패시티브 센서를 이용해 측정한다. 결과에서 보여지듯 시스템과 모델링 사이에 존재하는 오차와 외란의 영향을 완전히 무시하지는 못하지만 정밀 스테이지에서 측정 단위는 매우 작으므로 작은 노이즈 성분에 의해서도 시스템은 진동할 수 있다. 하지만 본 연구에서는 출력 변위에 큰 변화 없이 안정적으로 시스템이 제어됨을 확인 할 수 있다.




**<그림 2> 출력 변위 그래프**

## 4. 결 론

컴퓨터의 급속한 발달로 처리속도가 증가하여 연속 시간에서의 시스템을 이산 시간에 적용하는 데에 따른 문제점이 점점 줄어들고는 있지만 디지털 시스템에 적용 가능한 제어기법을 연구하는 일은 여전히 중요하다고 할 수 있다. 따라서 본 논문에서는 이산 시간에서 적용 가능한 연속 슬라이딩 모드를 유도하기 위해 Lyapunov 안정 조건 및 도달 조건을 이용하였다. 유도된 제어 입력을 이용하여 PZT 나노 스테이지의 위치 제어에 관한 모의 실험을 하였으며 실험의 결과로부터 본 논문에서 유도한 결과의 타당성을 입증하였다. 모의 실험을 통해 알 수 있듯이, 슬라이딩 모드의 특성인 외란과 불확실성에 대한 강인성을 유지하면서 동시에 시스템에 치명적인 채터링을 감소시킬 수 있었다.

## [참 고 문 헌]


[1] K. D. Young, V. I. Utkin and U. Ozguner, "A Control Engineer's Guide to Sliding Mode Control", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 7, No. 3, pp.328-342, 1999

[2] C. Edwards and S. K. Spurgeon, "Sliding Mode Control: Theory and Applications", Taylor&Francis, 1998

[3] S. B. Choi, D. W. Park, and S. Jayasuriya, "A time-varying sliding surface for fast and robust tracking control of second-order uncertain systems", Automatica, Vol. 30, No. 5, pp.899-904, 1994

[4] j. -j. E. Slotine and J. A. Coetsee, "Adaptive sliding controller synthesis for non-linear systems", International Journal of Control, Vol. 43, No. 6, pp.1631-1651. 1986

[5] 이규준, 경태현, 김종식, "PD-슬라이딩 모드 복합 제어기를 이용한 로봇 매니퓰레이터의 제어", Journal of Control, Automation and Systems Engineering, Vol. 8, No. 2, pp.89-96, 2002

[6] F. Zhou and G. Fisher, "Continuous sliding mode control", International Journal of Control, Vol. 55, No. 2, pp.313-327. 1992

[7] 이장규, 이연석, "칼만 필터의 최근 동향 및 발전", 한국자동제어학술회의논문집, pp.464-469, 1987