

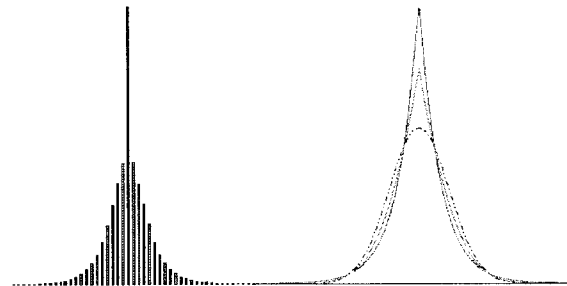
웨이블릿 영역에서 혼합 모델을 사용한 영상 잡음 제거

배병석, 강문기
연세대학교 공과대학 전기전자공학과 TMS 사업단

Mixture Distributions for Image Denoising in Wavelet Domain

Byoung Suk Bae and Moon Gi Kang
Yonsei University Institute of TMS Information Technology

Abstract - AWGN(Additive white gaussian noise)에 의해 영상은 자주 훼손되곤 한다. 최근 이를 복원하기 위해 웨이블릿(Wavelet) 영역에서의 베이시안(Bayesian) 추정법이 연구되고 있다. 웨이블릿 변환된 영상 신호의 밀도 함수(pdf)는 표족한 첨두와 긴 꼬리(long-tail)를 갖는 경향이 있다. 이러한 사전 밀도 함수(a priori probability density function)를 상황에 적합하게 추정한다면 좋은 성능의 복원 결과를 얻을 수 있다. 빈번이 제안되는 밀도 함수로 가우시안(Gaussian) 분포 함수와 라플라스(Laplace) 분포 함수가 있다. 이들 각각의 모델은 훌륭히 변환 계수들을 모델링하며 나름대로의 장점을 나타낸다. 본 연구에서는 가우시안 분포와 라플라스(Laplace) 분포의 혼합 분포 모델을 밀도 함수로 제안하여, 이 둘의 장점을 종합하였다. 이를 MAP(Maximum a Posteriori) 추정 방법에 적용하여 잡음을 제거하였다. 그 결과 기존의 알고리즘에 비해 시각적인 면(Visual aspect), 수치적인 면(PSNR), 그리고 연산량(Complexity) 측면에서 향상된 결과를 얻었다.



<그림 1> 웨이블릿 계수의 히스토그램과 다양한 확률밀도함수 비교

1. 서 론

2차원 영상은 그 목적과 여건에 따라 다양한 잡음을 통하여 획득되고 전송되어 진다. 이때 원치 않는 신호에 의해 원 영상 신호는 훼손되어지곤 한다. 이 원치 않는 신호는 잡음(noise)이라 불리 우며, 최근 이를 제거하는 기술(denoising)은 주요한 연구 분야가 되었다. 왜냐 하면 잡음은 차후에 계속될 영상처리(컬러 보간 및 영상 압축 등)에 계속 영향을 주어, 이를 효과적으로 제거하지 않으면 누적 오류를 발생시키기 때문이다.

최근 변환 영역에서의 영상 처리 연구가 활발히 진행 중이다. 특히 웨이블릿(Wavelet) 변환이 JPEG 2000의 표준으로 사용되는 등 많은 분야에서 각광을 받고 있다. 이는 훌륭한 압축능력(변환 계수의 대부분이 아주 적은 크기를 가짐) 등 다양한 성질을 웨이블릿 변환이 지니기 때문이다. 이 압축 능력과 더불어 웨이블릿은 클러스터링(Clustering) 특성을 가지므로, 잡음 제거에 유용하게 사용된다. 즉, 대부분은 적은 크기의 계수이므로 이들을 잡음으로 간주하여 제거하여도 큰 손실이 생기지 않으며, 또한 인접 계수들끼리 상당히 높은 상관관계를 지니기 때문에 주변 값들을 이용하여 효과적인 영상 복원이 가능한 것이다.

웨이블릿의 이러한 특성 때문에 Bayesian 추정을 통하여 좋은 결과를 얻을 수 있다. 웨이블릿 변환 신호의 사전 확률밀도함수(a priori probability density function, pdf)는 실험적으로 표족한 첨두와 긴 꼬리(long-tail)를 갖고 있음이 알려져 있다. 이들은 다양한 함수로 모델링이 되어 사용된다.

예를 들어 라플라스 분포를 이용한 결과는 soft-threshold와 동일한 shrinkage 식으로 유도된다[1]. [2]에서는 일반화된 가우시안 분포를 사용하여 원 신호의 웨이블릿 계수를 모델링 하였다. 하지만 이는 파라미터 추정에 따른 부하 증가의 단점이 존재한다. 정규 가우시안 분포를 사용한 LMMSE(Linear minimum mean square error) estimator는 단순하면서도 좋은 결과를 보여준다[3]. 그 외에도 Bessel K-form 밀도함수[4], alpha-stable 밀도 함수[5]의 다양한 모델링을 적용한 사례 등이 있다.

잡음이 없는 원 신호의 특성을 효과적으로 모델링 하고자 혼합 모델(Mixture model)의 활용이 제안 되고 있다[6][7]. [6]에선 가우시안 혼합 분포와 hidden Markov model(HMM)을 사용하였다. 라플라스 혼합 모델링 또한 양호한 결과를 보이고 있다[7]. 라플라스 분포는 표족한 첨두와 긴 꼬리를 갖는 웨이블릿의 성향을 잘 반영하며, 가우시안 분포 또한 주변 계수들의 유사성을 잘 표현해 준다.

본 연구에서는 이 둘 분포, 즉 가우시안과 라플라스 분포를 모두 이용한 혼합 모델(그림 1)을 제안하여, 각각의 장점을 모두 이용하려고 한다. 첨가된 잡음은 신호 독립적인(signal-independent) AWGN으로 간주할 것이다. 이런 신호 상황에 따른 혼합 모델을 제안할 것이며, Bayesian 추정을 위한 MAP estimator 유도과정을 서술한다. 그리고 혼합된 분포의 가중치를 결정하기 위해 통계 상수 중 Kurtosis(첨도)를 사용하여[8] 최종 결과를 산출한다. 기존의 알고리즘과의 효율성 검증을 위해, 시각적인 면, 수치적인 면, 그리고 연산량 측면에서의 비교를 수행한다

2. 본 론

2.1 통계적 모델링(Statistical modeling)

AWGN에 훼손된 영상 웨이블릿 변환 신호는 다음과 같다.

$$x = m + n \quad (1)$$

여기서 x 는 훼손된 웨이블릿 계수, m 는 원 신호의 웨이블릿 신호, n 은 분산이 σ_n^2 인 AWGN의 웨이블릿 변환량이다. 잡음 없는 원 신호의 밀도 함수를 다음과 같은 혼합 분포를 사용하여 나타낼 수 있다.

$$P_m(m(d)) = a(d)P_G(m(d)) + (1 - a(d))P_L(m(d)) \quad (2)$$

여기서, $d(= [x, y])$ 는 계수의 위치, $a(0 \leq a \leq 1)$ 는 가중치, $P_G(= Gauss(m, \sigma))$ 는 분산이 σ^2 인 가우시안 분포, $P_L(= \mathcal{L}(y, \sigma))$ 은 표준편차가 σ 인 라플라스 분포를 나타낸다.

한편, 확률 변수의 합은 밀도 함수의 컨볼루션(convolution) 관계와 연결되므로,

$$P_x(x) = P_m(x) * P_n(x) \quad (3)$$

$$= aG_1(x, \sigma, \sigma_n) + (1 - a)G_2(x, \sigma, \sigma_n)$$

위 식의 G_1 은 $Gauss(x, \sigma) * Gauss(x, \sigma_n)$ 을, G_2 는 $\mathcal{L}(x, \sigma) * Gauss(x, \sigma_n)$ 을 의미한다.

2.2 MAP estimation

최종 추정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\hat{m}(y) = P_1(y)\hat{m}_1(y) + P_2(y)\hat{m}_2(y) \quad (4)$$

P_1 은 $m(y)$ 가 P_G 밀도 함수에 의해 발생할 확률을 말하며, 그 때의 추정값은 \hat{m}_1 이 된다. 유사하게 P_2 는 P_L 밀도 함수에 의한 발생 확률이며, \hat{m}_2 는 그에 따른 결과값이다.

MAP 추정식은 다음과 같다.

$$\hat{x} = \operatorname{argmax}_m P_{m|x}(m|x) \quad (5)$$

Bayesian 법칙을 적용하면,

$$\operatorname{argmax}_m P_{m|x}(m|x) = \operatorname{argmax}_m \left[\frac{P_{x|m}(x|m)P_m(m)}{P_x(x)} \right]$$

$$= \operatorname{argmax}_m [\ln P_n(x - m) + \ln P_m(m)] \quad (6)$$

각각 m_1, m_2 경우에 해당하는 결과를 얻기 위해 양변을 m_1, m_2 에 대하여 미분 후 값을 '0' 이라 두면,

$$\widehat{m}_1(x) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \sigma_n^2} y \quad (7)$$

$$\widehat{m}_2(x) = \text{sign}(x) \left(|x| - \frac{\sqrt{2}\sigma_n}{\sigma} \right)_+$$

인 결과를 얻는다. 이때

$$(\alpha)_+ = \max\{a, 0\} \quad (8)$$

이다.

최종식의 가중치(P_1, P_2)는 Bayesian 법칙에 의해, 그 합이 1이고 각각은

$$P_1(x) = P(P_G|x) = \frac{P(P_G \cap x)}{P(x)} = \frac{1}{1+R}, \quad (9)$$

$$P_2(x) = P(P_L|x) = \frac{P(P_L \cap x)}{P(x)} = \frac{R}{1+R}$$

이다. 이때, $R = \frac{1-a}{a} \frac{G_2}{G_1} \approx \frac{1-a}{a}$ 이 되므로, 최종가중치는 $P_1 = a, P_2 = 1-a$ 가 된다.

2.3 Kurtosis

가중치를 결정하기 위해 kurtosis(첨도, k) 를 사용한다. kurtosis는 다음과 같이 계산되어진다.

$$k_x = \frac{1}{\sigma_x^4} E[(x - m_x)^4] = \frac{1}{\sigma_x^4} E[(x)^4] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x}{\sigma_x} \right)^4 \quad (10)$$

위 관계를 이용하여 가중치 a 에 대한 식을 정리하면,

$$a = \begin{cases} i) 0 & (\text{if } a < 0) \\ ii) 1 & (\text{if } a > 1) \\ iii) \left(\frac{6\sigma^4 + 3\sigma_n^4 - \sigma_x^4 k_x}{2\sigma^4} \right) & (\text{else}) \end{cases} \quad (11)$$

이다. 최종 식을 쓰면 식(4)에 의하여,

$$\widehat{m}(x) = \left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \sigma_n^2} \right) ay + (1-a) \left[\text{sign}(y) \left(|y| - \frac{\sqrt{2}\sigma_n}{\sigma} \right)_+ \right] \quad (12)$$

이 된다.

3. 실험 결과

제안된 모델의 성능을 측정하기 위해 기존의 Bayesian 추정법을 사용한 대표적인 알고리즘들과 비교하였다. 사용된 알고리즘은 라플라스 분포를 가정한 BayesShrink[1], 가우시안 분포를 사용한 LAWML[3]이다. 이때 신호의 분산(σ^2)은 ML(Maximum Likelihood) 방법을 사용하여 구할 수 있다. $\widehat{\sigma}^2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sigma_n^2 \right)_+$. 이 때 N 은 주변 픽셀들의 수이다. 잡음의 분산은 HH_1 band 내부의 자료를 이용하여[9] 다음과 같이 추정할 수 있다. 즉, $\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{\text{median}(|x_i|)}{0.6745}$, $x_i \in HH_1$

표 1에서 알 수 있듯이 제안된 알고리즘이 가장 높은 PSNR 수치를 나타내었으며, Lena 영상의 경우 약 +1[db] 정도의 향상이 있었다. 시각적인 면에서도 제안된 알고리즘이 평탄영역에서 많은 잡음을 제거하는 등 우수한 결과를 보였다(그림 2). 연산량에서도 가우시안 혼합 모델[6]이나 라플라스 혼합모델[7]이 EM 알고리즘 등의 재귀적인(iterative) 방법을 사용하여 복잡도가 증가한 반면, 제안된 모델은 Closed-form으로 연산되어서 훨씬 복잡도가 감소하였다. 실험에 사용한 웨이블릿들은 Daubechies-9/7 웨이블릿이다.

<표 1> 각 알고리즘에 대한 PSNR [dB] 비교

Image	noise level	5X5LAWML	BayesShrink	Propose
lena	$\sigma_n^2=100$	34.13	33.32	34.72
	$\sigma_n^2=400$	30.46	30.17	31.26
babara	$\sigma_n^2=100$	32.54	30.86	32.67
	$\sigma_n^2=400$	28.43	27.13	28.59
boat	$\sigma_n^2=100$	32.24	32.24	32.38
	$\sigma_n^2=400$	28.50	28.14	28.90



(a) noisy image ($\sigma_n = 20$)



(b) 5X5LAWML (PSNR : 30.46)



(c) BayesShrink (PSNR : 30.17)



(d) Propose (PSNR : 31.26)

<그림 2> 여러 가지 알고리즘 비교 영상

4. 결 론

잡음이 첨가된 영상은 혼합 모델을 사용하여 효과적으로 복원할 수 있다. 위 실험에서와 같이 제안된 혼합 모델을 Bayesian 방법으로 추정된 결과는 기존의 알고리즘들에 비해 수치값, 시각 효과, 소요 연산량면에서 모두 우수하였다. 차후로는 제안 알고리즘을 다른 웨이블릿 변환(예를 들어, complex wavelet 등) 영역에서 적용하는 것, 또는 inter 영역에서의 적용 방법 등을 연구하는 것이 필요할 것이라 생각된다.

[Acknowledgement]

본 연구는 한국과학재단 지정 생체인식연구센터의 지원을 받아 이루어졌습니다.

[참 고 문 헌]

- [1] S.Chang, B.Yu, and M.Vetterli, "Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression", IEEE Trans. Image Processing, vol. 9, p.1532-1546, Sept. 2000.
- [2] S.Mallat, "A theory for multiresolution signal decomposition : The wavelet representation", IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol.11 no.7, pp. 674-693, Jul. 1989
- [3] M.K.Mihcak, I.Kozintsev, K.Ramchandran, and P.Moulin, "Low-complexity image denoising based on statistical modeling of wavelet coefficient", IEEE Signal Processing Lett., vol.6, pp.300-303, Dec.1999
- [4] A.Srivastava, A.B.Lee, E.P.Simoncelli, and S.C.Zhu, "On advances in statistical modeling of natural images", J. math. Imag. Vision, vol.18, pp.17-33, 2003
- [5] A.Achim, P.Tscakalides, and A.Bezerianos, "SAR image denoising via Bayesian wavelet shrinkage based on heavy-tailed modeling", IEEE Trans. Geosci. Remote Sens., vol.41 no.8, pp.1773-1784, Aug. 2003
- [6] M.S.Crouse, R.D.Nowak, and R.G.Baraniuk, "Wavelet-based signal processing using hidden Markov models", IEEE Trans. Signal Processing, vol.46, pp.886-902, Apr. 1998
- [7] H.Rabbani and M.Vafadoost, "Wavelet based image denoising based on a mixture of laplace distributions", IJST Trans. B. Engineering, vol.30 no.6, pp.711-733, 2006
- [8] M.Haas, S.Mitnik, and M.S.Paoletta, "Modeling and predicting market risk with laplace-gaussian mixture distributions", CFS working paper, No.2005/11, 2005
- [9] D.L.Donoho and I.M.Johnstone, "Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage", Biometrika, vol.81 no.3, pp.425-455, 1994