

다항식 Interval Type-2 TSK FLS 설계와 비선형 시스템으로의 응용

김길성, 오성권  
수원대학교 전기공학과

Design of Polynomial Interval Type-2 TSK FLS and Its Application to Nonlinear System

Gil-Sung Kim, Sung-Kwun Oh  
Dept. of Electrical Engineering, The University of Suwon.

**Abstract** - Type-2 퍼지 집합은 언어의 불확실성을 다루기 위하여 고안된 Type-1 퍼지 집합의 확장이다. TSK 퍼지 로직 시스템(TSK Fuzzy Logic Systems; TSK FLS)은 Mamdani FLS과 함께 가장 널리 사용되는 퍼지 로직 시스템 모델이다. 본 논문에서는 Type-2 퍼지 집합을 이용하여 전반부 멤버십 함수를 구성하고 후반부 다항식 함수를 상수와 1차식, 2차식으로 확장한 다항식 Type-2 TSK FLS 설계한다. 다항식 Type-2 TSK FLS의 파라미터를 동정하기 위해 Back-propagation 방법을 사용한다. 제안된 다항식 Type-2 TSK FLS을 노이즈 섞인 비선형 시스템의 모델링에 적용하여 그 성능을 비교 분석한다.

1. 서론

최근 Mendel과 Karnik은 Type-2 FLS에 대한 완벽한 이론을 정립하였다 [1]. General Type-2 퍼지 집합은 특정한 주 소속 정도(primary membership grade)에 해당하는 두 번째 소속 정도(secondary membership grade)가 0과 1사이의 소속 정도를 갖는 퍼지 집합이다. 이에 반하여 Interval Type-2 퍼지 집합은 secondary 소속 정도가 모두 1의 값을 갖는다. General Type-2 퍼지 집합을 사용하여 FLS을 설계할 경우는 아래와 같은 문제점을 갖는다[2].

- Type-reduction이 과정이 매우 어렵다.
- t-norm연산(특히 product t-norm)을 수행 할 때 계산 량이 매우 많아 응용이 힘들다.
- 알맞은 secondary 멤버십 함수를 선택하기 어렵다.

이와 같은 어려움들로 인하여 Interval Type-2 퍼지 집합을 이용한 Interval Type-2 FLS이 많이 연구되고 있다. 본 연구에서는 Interval Type-2 퍼지 집합을 이용한 Interval Type-2 TSK FLS을 구현하고 이를 확장한 다항식 Interval Type-2 TSK FLS을 설계하고 노이즈 섞인 비선형 시스템의 모델링에 적용한다.

2. Interval Type-2 TSK FLS

2.1 규칙

Mendel은 Interval Type-2 TSK FLS의 3가지 모델을 제시 하였다 [2]. 본 연구에서는 모든 불확실성이 전반부에서 발생하고 후반부는 1차식으로 표현되는 Interval Type-2 TSK FLS-Model II를 다루고 이는 아래의 퍼지 규칙으로 표현 된다

$$R^l: \text{If } x_1 \text{ is } \bar{F}_1^l \text{ and } \dots \text{ and } x_p \text{ is } \bar{F}_p^l \text{ THEN } y^l = c_0^l + c_1^l x_1 + c_p^l x_p \quad (1)$$

여기서  $\bar{F}_i^l (i=1, \dots, p)$ 는 Type-2 퍼지 집합이다. Interval Type-2 TSK FLS의 최종 출력은 아래의 식(2)과 같다.

$$Y_{TSK,2}(x) = [y_l, y_r] = \int_{f^l \in [\underline{L}, \bar{f}^l]} \dots \int_{f^M \in [\underline{L}^M, \bar{f}^M]} 1 / \frac{\sum_{i=1}^M f^i y^i}{\sum_{i=1}^M f^i} \quad (2)$$

비 퍼지화한 출력은 아래의 식(3)와 같다.

$$y_{TSK,2}(x) = \frac{y_l + y_r}{2} \quad (3)$$

2.2 전반부 연산

l번째 규칙의 전반부 적합도인  $f^l(x)$ 는 interval set이며 아래의 식 (4)로서 표현되고 식 (5), (6)으로 계산된다.

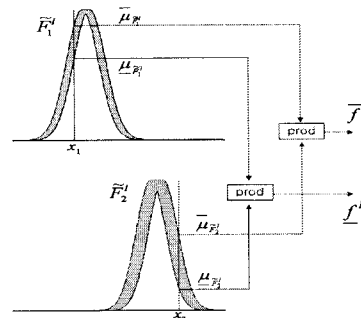
$$F^l(x) = [f^l(x), \bar{f}^l(x)] = [\underline{F}_1^l, \bar{F}_1^l] \quad (4)$$

$$f^l(x) = \mu_{\bar{F}_1^l}(x_1) \star \dots \star \mu_{\bar{F}_p^l}(x_p) \quad (5)$$

$$\bar{f}^l(x) = \mu_{\underline{F}_1^l}(x_1) \star \dots \star \mu_{\underline{F}_p^l}(x_p) \quad (6)$$

★ 는 t-norm 연산자이고 본 연구에서는 product t-norm을 사용한

다. 이를 그림으로 표현하면 그림1과 같다.



<그림 1> Interval Type-2 TSK FLS의 전반부 연산

2.3 후반부 연산

Interval Type-2 TSK FLS의 후반부 연산은 전반부 적합도인  $f^l(x)$ 을 이용하여 식 (2)을 이용하여 최종 출력인  $[y_l, y_r]$ 을 구하는 과정이다.  $y_r$ 은 M개의 규칙이 존재할 때, 2M개의 embedded 퍼지 집합 중에서 무게 중심이 가장 큰 embedded 퍼지 집합의 무게 중심 값이 되고  $y_l$ 은 가장 작은 무게 중심이다. Karnik과 Mendel은 2M번의 연산과정이 아닌 반복적인 연산을 통하여 무게 중심을 구하는 KM 알고리즘을 발표하였다[3]. 본 연구에서는 불확실성이 전반부에서만 발생하는 KM 알고리즘의 특수한 경우를 통하여  $[y_l, y_r]$ 을 계산 하였다.

3. Polynomial Interval Type-2 TSK FLS

3.1 구조

본 연구에서는 Interval Type-2 TSK FLS의 확장인 Polynomial Interval Type-2 TSK FLS을 설계한다. Polynomial Interval Type-2 TSK FLS은 아래의 퍼지 규칙으로 표현된다.

$$R^l: \text{If } x_1 \text{ is } \bar{F}_1^l \text{ and } \dots \text{ and } x_p \text{ is } \bar{F}_p^l \text{ THEN } y^l = g^l(x) \quad (7)$$

후반부 다항식인  $g^l(x)$ 는 상수항, 1차식, 2차식의 중의 한 가지 구조를 갖는다.

$$\text{Constant: } g^l(x) = a_0^l \quad (8)$$

$$\text{Linear: } g^l(x) = a_0^l + \sum_{j=1}^p a_j^l x_j \quad (9)$$

$$\text{Quadratic: } g^l(x) = a_0^l + \sum_{j=1}^p a_j^l x_j + \sum_{j=1}^p \sum_{k=j}^p a_{jk}^l x_j x_k \quad (10)$$

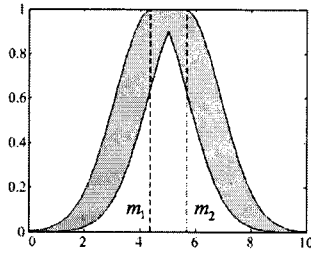
제안된 다항식 Type-2 TSK 모델의 최종 출력은 식 (11)와 같다.

$$Y_{P-TSK,2}(x) = [y_l, y_r] = \int_{f^l \in [\underline{L}, \bar{f}^l]} \dots \int_{f^M \in [\underline{L}^M, \bar{f}^M]} 1 / \frac{\sum_{i=1}^M f^i g^i}{\sum_{i=1}^M f^i} \quad (11)$$

3.2 파라미터 학습

본 연구에서의 멤버십 함수 형태는 가우시안 형태의 멤버십 함수를 사용하고 불확실한 중심을 갖는 Type-2 퍼지 집합을 사용한다. 이는 식 (12)과 그림 2로 표현된다.

$$\mu_A(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right] \quad m \in [m1, m2] \quad (12)$$



〈그림 2〉 uncertain mean을 갖는 가우시안 형태의 Type-2 퍼지 집합

### 3.2.1 전반부 파라미터 학습

본 연구에서는 전 반부 파라미터로  $m_1$ 과  $m_2$ 를 back-propagation 방법으로 학습한다. 학습은 모든 입력 벡터  $x$ 에 대하여 식 (13)의 오차를 최소화 하도록 진행된다.

$$e^{(t)} = \frac{1}{2} [D^{(t)} - Y_{TSK,2}^{(t)}(x)]^2 \quad (13)$$

여기서,  $D^{(t)}$ 는  $t$ 번째 입력의 목적값(Desired value)이고  $Y_{TSK,2}^{(t)}(x)$ 는  $t$ 번째 입력의 Type-2 TSK FLS의 출력이다. 학습은  $Y_{TSK,2}^{(t)}$ 이  $[y_1, y_r]$ 의 값을 갖는 interval set이기 때문에  $y_l$ 과  $y_r$ 에 대하여 각각 학습이 이루어지며 primary 멤버십 함수의 중심이 불확실성을 가지므로 구간에 따라 오차식이 다르다. 입력의 멤버십 함수의 첫 번째 중심  $m_{j1}^{(t)}$ 이 출력  $y_r$ 에 영향을 주었다면 오차에 따른  $m_{j1}^{(t)}$ 의 변화분(delta)은 식 (14)로 정의된다. 식 (14)에서  $\alpha$ 는 학습률을  $l(1, \dots, M)$ 은  $l$ 번째 규칙을 나타내며  $j(1, \dots, p)$ 는 입력벡터  $x$ 의  $j$ 번째 원소를 나타낸다.  $\bar{f}$ 은 KM알고리즘 내에서  $y_r$ 을 계산하는데 영향을 준  $\bar{f}^j$  또는  $\bar{f}^l$  중 하나를 나타낸다.

$$\Delta m_{j1}^{(t)} = -\alpha \frac{\partial e}{\partial m_{j1}^{(t)}} = \frac{1}{2} \alpha (D - Y_{TSK,2}) (g^l - y_r) \cdot \frac{(x_j - m_{j1}^{(t)})}{(\sigma_j^2)} \cdot \frac{\bar{f}^l g^l}{\sum_{l=1}^M \bar{f}^l} \quad (14)$$

본 연구에서는 입력공간을 균등하게 분할하고 분할된 공간의 중심에서 이웃하는 멤버십 함수가 만나도록  $\sigma$ 를 고정 시킨 후  $m_1$ 과  $m_2$ 를 학습하여 전반부 파라미터들을 동조하였다.

### 3.2.2 후반부 파라미터 학습

본 연구에서 제안한 다항식 Interval Type-2 TSK FLS는 후반부의 구조가 상수, 1차식, 2차식 3가지의 경우 중 한가지로 결정된다. 후반부 다항식의 계수(후반부 파라미터)들은 전반부와 마찬가지로 back-propagation 방법을 사용하여 식 (13)의 오차식을 최소화 하도록 학습된다. 후반부가 상수항, 1차식, 2차식인 경우의 후반부 다항식은 식 (8), (9), (10)로 표현되어 지는 다항식의 상수항, 1차항, 2차항의 각각의 변화분(delta)은 아래의 식 (15), (16), (17)로 표현되며 2차식인 경우는 상수와 1차식의 변화분에 대하여도 모두 학습해야 하며 마찬가지로 1차식인 경우 상수항에 대하여서도 학습을 진행하여야 한다.

$$\Delta a_0^l = -\alpha \frac{\partial e}{\partial a_0^l} = \alpha (D - Y_{TSK,2}) (y_l + y_r) / 2 \quad (15)$$

$$\Delta a_j^l = -\alpha \frac{\partial e}{\partial a_j^l} = \alpha (D - Y_{TSK,2}) (y_l + y_r) x_j / 2 \quad (16)$$

$$\Delta a_{jk}^l = -\alpha \frac{\partial e}{\partial a_{jk}^l} = \alpha (D - Y_{TSK,2}) (y_l + y_r) x_j x_k / 2 \quad (17)$$

## 4. 실험

본 연구에서는 다항식 Interval Type-2 TSK FLS를 구현하고 전·후반부 파라미터 들을 back-propagation방법을 사용하여 동조하였다. 제안된 다항식 Interval Type-2 TSK FLS를 기존의 Type-1 TSK FLS과 성능을 비교 분석하기 위하여 가스로 공정 모델링과 Sugeno가 사용한 식(18)의 비선형 시스템의 30개 데이터를 학습데이터로 20개를 테스트 데이터로 실험에 사용하였다.

$$y = (1 + x_1^{-2} + x_2^{-1.5})^2, \quad 1 \leq x_1, x_2 \leq 5 \quad (18)$$

가스로 시계열 데이터의 입력  $u(t)$ 는 가스 흐름율이고 출력  $y(t)$ 는 이산화탄소 농도인 1입력 1출력의 데이터 296쌍으로부터  $u(t-3)$ ,  $u(t-2)$ ,  $u(t-1)$ ,  $y(t-3)$ ,  $y(t-2)$ ,  $y(t-1)$ 의 6개의 입력 변수와 한 개의 출력 변수  $y(t)$ 를 설정하고 학습 데이터로 145개 테스트 데이터로서 각각 145개의 데이터 쌍을 사용한다. 본 연구의 실험에서는  $[u(t-3), y(t-1), y(t)]$ 의 입력 데이터 쌍을 사용한다. 또한 테스트에 랜덤 화이트 가우시안 노이즈를 첨가하여 테스트 데이터 100개를 구축하고 100번을 실험 하여 평균과 표준편차를 구하였다. 실험에 사용된 파

라미터 들은 다음의 표 1과 같다. PI와 EPI는 Mean Square Error를 사용하였고 실험 결과는 표 2와 같다.

〈표 1〉 실험 파라미터

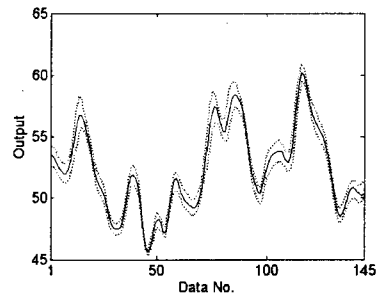
파라미터		값
Type-1 TSK FLS	멤버십함수 수	각 입력당 3(2)개 / 2개
	학습 횟수	300
	학습률	[0.001 0.01]
Polynomial Type-2 TSK FLS	멤버십함수 수	각 입력당 3(2)개 / 2개
	학습 횟수	300
	학습률	[0.0001 0.01]

학습 횟수 및 학습률은 Type-1 TSK FLS과 Interval Type-2 TSK FLS의 학습을 통해 동조되어야 하는 파라미터 수와 모델 구조가 틀리기 때문에 학습률과 학습 횟수는 서로 다르다.

〈표 2〉 실험 결과

Data	Type	Polynomial	PI	EPI
Jenkin	Type-1 TSK FLS	Constant	0.0521	0.870±0.08
		Linear	0.0187	0.724±0.08
		Quadratic	0.0189	0.743±0.08
	Type-2 TSK FLS	Constant	0.0290	0.753±0.07
		Linear	0.0190	0.722±0.07
		Quadratic	0.019	0.740±0.08
Sugeno	Type-1 TSK FLS	Constant	0.249	0.326±0.123
		Linear	0.0243	1.190±0.786
		Constant	0.206	0.302±0.096
	Type-2 TSK FLS	Constant	0.0235	1.129±0.816
		Linear		

표 2의 실험 결과로 Interval Type-2 TSK FLS이 PI에서는 비슷한 성능을 보였으나 노이즈 섞인 테스트 데이터 집합에 대한 실험에서는 더 좋은 성능을 보임을 알 수 있다. 아래의 그림 3은 Interval Type-2 TSK FLS의 출력을 보여준다. Type-2 TSK FLS 시스템의 출력은 그림과 같이 interval set으로서 upper 출력과 lower 출력이 존재한다.



〈그림 3〉 Polynomial Interval Type-2 TSK FLS의 출력

## 6. 결론

본 연구에서는 다항식 Interval Type-2 TSK FLS를 구현하고 비선형 공정 모델링에 응용하여 그 특성을 Type-1 TSK FLS과 비교 분석하였다. 제안된 다항식 Type-2 TSK FLS은 노이즈 섞인 데이터에 Type-1 TSK FLS 보다 우수한 성능을 보임을 알 수 있었다. 본 연구에서는 back-propagation방법으로 전·후반부 파라미터 들을 동정 하였으나 보다 효율적인 파라미터 동정방법이 차후 연구과제로 남아있다.

### 감사의 글

이 논문은 2007년도 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국과학기술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (KRF-2007-313-D00710)

### [참고 문헌]

- [1] N. Karnik, J. Mendel, and Q. Liang, "Type-2 Fuzzy Logic Systems," IEEE Trans. On Fuzzy Systems, Vol. 7, No. 6, pp. 643-658, 1999.
- [2] J. M. Mendel, "Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions," Prentice-Hall: NJ, 2001.
- [3] N. Karnik, J. Mendel, "Introduction to Type-2 Fuzzy Logic Systems," in Proc. IEEE Fuzzy Conf., pp.915-920, Anchorage, AK, May, Trans. On Fuzzy Systems, Vol. 7, No. 6, pp. 643-658, 1999.