

## PI 자동동조 알고리즘

오 승록  
단국대학교 전자전기공학부

### An Autotuning algorithm for PI controller

Seungrohk Oh  
Dept. of Electronics and Electrical Eng., Dankook University

**Abstract** - 플랜트의 정보를 알지 못 하는 경우 시험신호로 포화함수와 시간지연 요소를 이용하여 플랜트의 정보를 찾아내고 찾아낸 정보로 PI 제어를 설계하는 방법을 제시하였다. 시간 지연요소를 이용함으로써 PI 제어기의 I 요소로부터 발생하는 위상 감소로 인해 발생하는 불안정성이 발생하지 않도록 플랜트의 Nyquist 그림에서 3/4 분면에 있는 한 점의 정보를 찾아내는 것이 가능하였다. 제안된 방법은 포화함수의 이용으로 정확성이 높고 한 개의 포화함수만을 이용하여 구조가 간단하다. 또한 모의시험을 통해 제안된 방법의 타당성을 보였다.

#### 1. 서 론

PID(Proportional Integral Derivative) 제어기는 구조가 간단하고 현장 기술자들에게 익숙한 제어기로 산업체에서 사용되는 대부분의 제어기가 PID 제어기로 되어 있다. PID 제어기는 상수, 미분, 적분항으로 구성되어 있으며 각각의 계수들을 조정하여 사용하고 있다. PID 제어기의 계수들은 플랜트의 전달함수를 알고 있는 경우 분석적인 방법으로 결정이 가능하다[1]. 플랜트의 전달함수를 알지 못하는 경우 경험이 많은 현장 기술자에 의해 제어기의 계수 값을 결정하여 사용하여 왔다. 제어기의 계수 값을 결정하는 방법으로 시험신호를 이용하여 플랜트의 정보를 알아내고 알아낸 플랜트의 정보를 이용하여 제어기 값을 결정하는 방법을 자동동조(autotuning)라 하며 편리성 때문에 많은 연구 진행되었으며 상용화 된 제품들이 출시되어 사용되고 있다[2]. PID 자동 동조 시스템 중 시험신호로 릴레이를 이용한 방법[3]은 릴레이가 갖고 있는 비 선형성으로 인해 플랜트의 출력에 발생하는 극한 사이클(limit cycle)의 크기와 주기를 측정하여 플랜트의 주파수영역에서의 한 점인 교차점(crossover point)을 찾아내고 이 한 점의 정보로부터 제어기의 계수 값을 결정하는 방법이다. 릴레이를 이용한 자동 동조 방법이 제안된 이후 이와 관련된 연구[3,4,5,6,7,8]들이 이루어 졌다. [8]은 릴레이 사용으로 인한 고주파 발생으로 발생하는 교차점 정보의 오차를 줄이기 위해 포화함수를 사용하였다. 또한 [7]은 한 개의 릴레이 사용으로는 PI 제어기 설계가 불가능하여 크기가 다른 두개의 릴레이를 병렬로 연결한 시험신호를 사용하여 플랜트의 Nyquist 그림에서 3/4 분면의 한 점을 찾아내어 PI 제어를 설계하였다. 그러나 [7]의 방법은 두개의 릴레이의 사용으로 인한 구조가 복잡하고 릴레이 동작 시간이 동일해야 한다는 단점이 있다. 본 논문에서는 두개의 릴레이를 병렬로 연결하는 대신 시간 지연 요소를 포화함수와 적절로 연결하여 Nyquist 그림에서 3/4 분면의 한 점을 찾아내어 PI 제어를 설계하였다. 시간지연 요소는 [8]에서도 사용되었으나 플랜트 출력에 주기 신호가 발생하지 않는 경우 사용되었다. 제안된 방법은 포화함수와 시간지연요소 사용으로 자동동조 시스템의 구조가 간단하고 정확성이 높은 자동 동조 시스템을 제안하였다. 또한 모의시험을 통해 제안된 방법의 타당성을 보였다.

#### 2. 본 론

##### 2.1. 지연 요소를 이용한 자동 동조 시스템 분석...

지연시간이  $d$ 인 지연 요소를 그림 1과 같이 추가하고 포화함수를 시험신호로 하는 자동 동조 시스템에서 출력 신호의 크기가  $a_2$ 이고 주기가  $T_2$ 인 경우  $1 + e^{-j\omega T_2} G(j\omega_2) N_{sat}(a_2) = 0$  을 만족한다. 여기서  $\omega_2 = 2\pi/T_2$ 이며  $N_{sat}(\cdot)$ 는 시험신호인 포화함수의 묘사함수이다. 지연요소  $d$ ,  $w_2$ ,  $a_2$ 는 알고 있는 값이므로

$$G(jw_2) = -\frac{1}{N_{sat}(a_2)} e^{jw_2 d} \quad (1)$$

를 이용하여 플랜트의 Nyquist 그림에서 3/4분면의 한 점의 좌표를 계산할 수 있다.

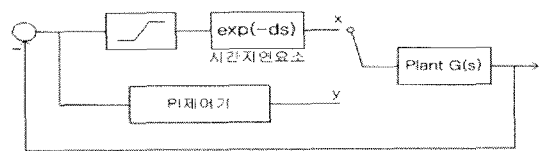


그림 1 시간지연 요소를 포함한 자동 동조시스템의 구조  
Fig. 1 Structure of autotuning system with time delay element

즉 그림1에서 지연시간이 0인 경우는 플랜트 출력신호의 크기와 주기를 이용하여 그림 2의 A점의 좌표값을 구하는 것이며 지연 시간이  $d$ 인 경우 그림 4의 B점의 좌표값을 구할 수 있다. 지연 시간이 0인 경우 A점에서 PI제어기를 설계할 경우 PI 제어기의 I 요소로 인해 발생하는 위상 마진 감소부분에 해당 여유마진이 없어 PI 제어기 설계가 불가능한 반면 지연요소를 이용한 자동동조 시스템에서는 B 점의 정보를 시험 신호를 이용하여 찾아내고 B점에서 PI 제어를 설계하는 경우 B점은 위상마진의 여유가 있어 I 요소에 의한 위상 마진 감소분이 있는 경우에도 PI 제어기 설계가 가능하다.

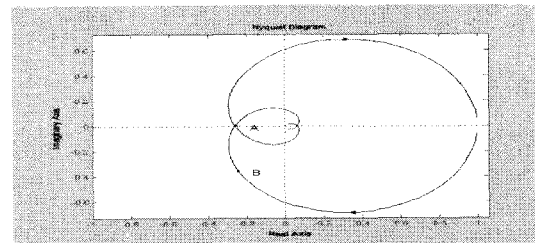


그림 2  $G(s)$ 의 Nyquist 그림  
Fig. 2 The Nyquist plot of  $G(s)$

또한 지연 시간이  $d$ 인 지연 요소에 의한 위상 변화는  $w_2 d$ 이므로  $d$ 를 크게 하면 위상변화를 크게 할 수 있어 위상 마진으로 주어진 사양을 만족하는 PI 제어기 설계가 가능하다.

##### 2.2. 지연 시간 결정 및 PI 제어기 설계

지연요소의 지연시간 값 결정방법을 유도하기 위해 플랜트의 전달함수가  $G(s)$ , 사양으로 주어진 위상마진이  $\theta_m$ 인 경우를 고려하였다. 주어진 위상 마진을 만족하는 PI 제어기의 설계가 가능하려면 플랜트의 위상이  $\pi + \theta_m$  보다 큰 위상을 갖는 플랜트의 한 점을 찾아야 하며 이를 위해 지연시간이 0인 경우에 대해 포화함수를 시험신호로 이용하여 플랜트의 출력의 크기( $a_1$ )와 주기( $T_1$ )를 구하여 그림 4의 A 점의 값과 해당 주파수를 구한다. 즉 교차점 A의 값은 식(1)으로부터  $(-\frac{1}{N_{sat}(a_1)}, 0)$ 이며 해당 주파수  $w_1 = 2\pi/T_1$ 이 된다. 점 A의 위상이  $\pi$  이므로 시간지연이  $d$ 인 지연요소를 추가하는 경우 시간지연 요소로부터 추가되는 위상은 식(1)으로부터  $w_1 d$ 된다. 따라서 제어기의 I 요소로부터 감소하는 위상 감소분을 고려하여

$$d > \theta_m / w_1 \quad (2)$$

가 되는  $d$ 로 선택하면 된다. 시간 지연이  $d$ 인 지연요소의 추가 후 시험 신호

인 포화함수를 이용하여 플랜트의 출력의 크기 및 주기를 이용하여 그림 2에서 3/4 분면에 있는  $G(s)$ 의 한점의 주파수영역 정보를 식(1)와 같이 구할 수 있다.  $G(s)$ 의 한점의 주파수 영역 정보로부터 위상마진을 만족하는 PI 제어기 설계는 다음 식을 만족하는  $k, T_i$  값을 구하면 된다.

$$C(jw_2)G(jw_2) = e^{i(\pi + \theta_m)} \quad (3)$$

여기서  $w_2 = 2\pi/T_2$ 이고  $T_2$ 는 시간지연 요소가 있는 경우의 출력의 주기이다. 플랜트 출력으로부터 관측된 출력의 크기와 주기가  $a_2, T_2$ 인 경우 식(1)으로부터

$$G(jw_2) = \frac{1}{N_{sat}(a_2)} e^{-jw_2 d} = \frac{1}{N_{sat}(a_2)} e^{j(\pi + \theta_m d)} \quad (4)$$

$$C(jw_2) = k \left( 1 + \frac{1}{jw_2 T_i} \right)$$

$$= k \frac{\sqrt{(w_2 T_i)^2 + 1}}{w_2 T_i} e^{-j \tan^{-1} \left( \frac{1}{w_2 T_i} \right)}$$

가 된다.

식(3)과 식(4)로부터

$$w_2 d - \tan^{-1} \left( \frac{1}{w_2 T_i} \right) = \theta_m \quad (5)$$

$$\rightarrow T_i = \frac{1}{w_2 \tan(w_2 d - \theta_m)}$$

$$k \frac{\sqrt{(w_2 T_i)^2 + 1}}{w_2 T_i N_{sat}(a_2)} = 1 \quad (6)$$

$$\rightarrow k = \frac{w_2 T_i N_{sat}(a_2)}{\sqrt{(w_2 T_i)^2 + 1}}$$

로 구할 수 있다.

### 3. 모의시험

그림 1에서 플랜트 전달함수가  $G(s) = \frac{1}{4s+1} e^{-2s}$  인 경우 고려하였다. 그림 3은 본 논문에서 제안한 방법을 이용하여 지연 시간  $d=0$ , 포화함수의 기울기가 4인 경우의 플랜트 출력을 나타낸다. 그림에서 하단의 그림을 확대한 그림이다.

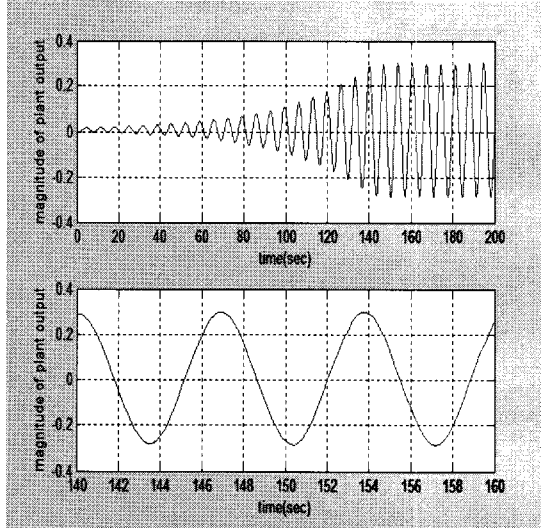


그림 3 지연 시간이 0인 경우의 플랜트 출력  
Fig. 3 The plot of plant output with delay time=0

그림 3로부터 플랜트 출력의 주기  $T_1=7(\text{sec})$ 임을 관찰할 수 있다. 부등식(2)을 만족하는 지연시간을  $d=1.07$ 로 선택하였다. 그림 4은 지연시간이  $d=1.07$ 인 경우 포화함수를 이용한 경우의 플랜트 출력값을 나타낸 것이다.

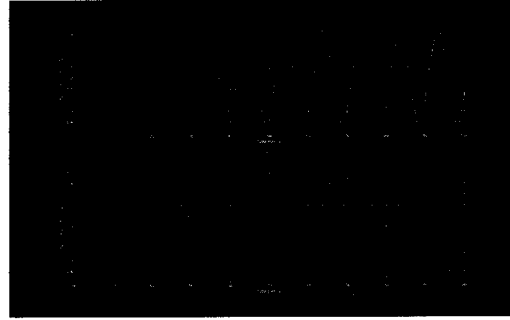


그림 4 지연 시간이 1.07인 경우의 플랜트 출력  
Fig. 4 The plot of plant output with delay time=1.07

그림 4에서 플랜트 출력값의 크기  $a_2=0.45$ , 주기  $T_2=9.6$ 이며 식(1)를 이용하여 Nyquist 선도에서 한점의 좌표값을 계산하면  $G(j0.65) = -0.28 - j0.24$ 임을 확인할 수 있다. 플랜트의 실제 좌표값은  $G_{real}(j0.65) = -0.28 - j0.21$ 임을 고려하면 본 논문에서 제안한 방법의 결과가 [7]의 방법을 이용한 결과보다 시험신호를 이용하여 찾아낸 플랜트의 좌표값에 대한 오차가 감소하였음을 확인할 수 있다. 이는 포화함수를 이용하여 릴레이에서 발생하는 고주파 성분을 감소 시켰기 때문이다. 식(5)와 식(6)을 이용하여 PI 제어기의 제어기 값을 구하면  $k=2.58, T_i=5.66$ 로 계산되며 PI 제어기가 포함된 폐루프의 위상 마진은  $24.6^\circ$ 로 계산된다. 위상마진의 결과 또한 [7]의 방법보다 정확함을 확인할 수 있다. 이러한 결과는 제안된 방법이 [7]의 방법 보다 더 정확하게 플랜트의 한점의 좌표값을 찾아 낼 수 있기 때문이다.

### 4. 결 론

본 논문에서는 기존의 방법인 두개의 릴레이를 사용하지 않고 시간지연 요소와 포화함수를 이용하여 PI 제어기 자동동조 방법을 제안하였다. 제안된 방법은 릴레이 대신 포화함수 사용으로 릴레이 사용으로 인해 발생하는 주파수 영역에서의 한 점의 정보에 대한 오차를 줄였으며 한 개의 포화함수만을 이용하는 방법으로서 구조가 간단한 자동 동조 방법이다. 제안된 방법에 대해 모의시험을 통해 타당성을 보였다.

### [참 고 문 헌]

- [1] G. Franklin, J. Powell and M. workman. *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison Wesley, New York, second edition, 1990.
- [2] PID Control System Analysis, Design, and Technology, IEEE Transactions on Control System Technology, vol. 13, no. 4, 2005
- [3] K. J. Astrom and T. Haggund. *Automatic tuning of PID Controllers*. Instruction Society of America, Reaserch Triangle Park, North Carolina 1988.
- [4] K. J. Astrom and T. Haggund, and A. Wallenborg. Automatic tuning of digital controllers with application to HVAC plants. *Automatica*, 29(5):1333-1343, 1993.
- [5] M. Zhuang and D. P. Atherton. PID controller design for a TITO system. *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, 141(2):111-120, March 1994.
- [6] D. Gu, Y Cai, P.Wang, W. Zhang, Proceeding of the 2007 ACC, New York, U.S.A., 2007
- [7] Mats Friman and Kurt V. Waller, A Two Channel relay for autotuning, Report 96-6, Abo Academy, 1996.
- [8] Seung-Rohk Oh. PID Autotuning Algorithm Based on Saturation Function Feedback. *Journal of IEEE Korea Council*, 2(2):98-104, 1998.
- [9] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems, second edition*. Prentice Hall, New Jersey, 1996.