2008년도 정보 및 제어 학술대회(CICS' 08) 논문집

상태변수에 제한조건을 가지는 비선형 시스템의 안정화

김수범, 서상보, 이성훈, 서진헌, 심형보
서울대학교 전기・컴퓨터 공학부

Stabilization for Nonlinear systems with state constraints

Subum Kim, Sangbo Seo, Sunghun Lee, Jin H. Seo, Hyungbo Shim
ASRI, School of Electrical Engineering and Computer Science, Seoul National University

Abstract - In this paper, the problem of stabilization for nonlinear systems with state constraints is addressed. The designed Lyapunov function guarantees that system states remain within constraints for all time and the control law constructed using backstepping renders the origin exponentially stable in the safe region.

1. 서 론

시스템의 상태변수에 제한조건을 가지는 문제는 오랜 세월동안 많은 연구자들에 의해 연구되어 왔다. 예를 들어, 전력 시스템의 플랜트에서 상태변수가 위험 영역으로 들어가면 큰 사고로 이어지므로 제어기 설계시 안정화 및 위험 영역 회피의 두 가지 목적을 염두에 두어야 한다. 상태변수에 제한조건을 가지는 제어 문제는 선형 시스템 [1-5]과 비선형 시스템 [6-10]에 대한 제어 연구로 크게 구분할 수 있다. 상태변수에 제한조건을 가지는 선형 시스템의 제어 문제는 제한된 영역 안에서 비선형 시스템을 선형 시스템으로 근사화 시켜서 문제 해결에 접근할 수 있기 때문에 그동안 이에 관련한 여러 연구가 이루어졌으며, 주요 접근 방법으로는 override control [1], set invariance 및 admissible set control [2-3], reference governor approach [4], 그리고 선형 모델 예견 제어 [5] 등이 있다. 그러나 실제 시스템에는 비선형성이 포함되므로 제한조건이 있는 비선형 시스템에 대한 연구로 연구 범위가 확장되었다. 주요 결과들로는 artificial potential field [6], invariance control [7], nonlinear reference governor [8-9], 그리고 비선형 모델 예견 제어 [10] 등이 있다.

본 논문에서는 2차 비선형 시스템에 대하여 상태변수에 제한조건을 가지는 제어 문제를 고려한다. 장벽 구조 함수를 이용한 리아푸노프 함수는 안전 영역 내에 초기값들을 가지는 상태변수들이 그 영역 내에서 평형점으로 수렴함을 보장하며, 제어기는 이 리아푸노프 함수와 역진 기법을 통하여 설계될 것이다. [11]에서는 Brunovsky형의 시스템에 대해서 역진 기법을 사용하여 제어기를 설계하였으나, 본 논문에서는 드리프트항까지 고려한 일반적인 2차 비선형 시스템을 고려한다.

2. 본 론

2.1 문제 설정

다음과 같은 2차 비선형 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + f_1(x_1), \\ \dot{x}_2 &= u + f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $x = (x_1, x_2) \in R^2$는 상태변수, $u \in R$는 제어 입력, $f_i : R^i \to R$, $i = 1, 2$는 $f_1(0) = f_2(0,0) = 0$을 만족하는 드리프트항으로서 미분 가능한 함수이다.

시스템 상태변수의 안전 영역을 $S = \{x \in R^2 : |x_i| < c_i,\ i = 1, 2\}$로 정의하자. 이때, 본 논문의 제어 목적은 아래와 같다.

(1) 상태변수들의 초기값들이 $x(0) \in S$ 일 때, 모든 시간에 대해 $x(t) \in S$ 임을 만족한다.

(2) 영역 S 내에 있는 모든 상태변수들의 초기값들에 대해 $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$을 만족한다.

상태변수들이 제한조건 $|x_i| < c_i$, $i = 1, 2$를 가질 때, 아래의 부등식을 만족하는 상수 $\bar{c}_i$, $i = 1, 2$가 항상 존재한다.

$$|f_i(\cdot)| < \bar{c}_i, \quad i = 1, 2 \tag{2}$$

2.2 안전 영역에 관한 보조정리

상태변수에 제한조건을 가지는 시스템에 대한 위험 영역 회피 제어기 설계를 위해 다음과 같은 안전 영역에 관한 보조정리를 이용한다.

보조정리 1 [11]: 다음과 같은 비선형 시스템을 생각해보자.

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n \tag{3}$$

여기서 $f(x)$는 $f(0) = 0$인 C^1 벡터 필드이다. 원점을 포함하는 주어진 열린 집합(open set) $D \subset R^n$에 대하여 다음 조건을 만족하는 C^1 리아푸노프 함수 $V(x)$가 존재한다고 가정하자.

(1) $V(x)$는 양의 정부호(positive definite)이고, x가 영역 D의 경계로 접근해감에 따라서 $V(x)$가 무한대로 간다.

(2) 모든 0이 아닌 $x \in D$ 에 대하여 $\frac{\partial V}{\partial x}(x) < 0$

그러면 원점은 점근적으로 안정하고, 초기값이 D 내부에 있었다면 시스템의 해 $x(t)$는 D 내부에 남아 있는다.

2.3 장벽 구조 함수의 정의

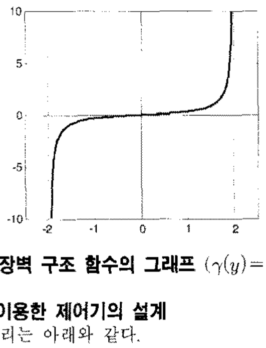
제어 입력 및 리아푸노프 함수를 설계할 때 사용할 장벽 구조 함수를 다음과 같이 정의한다.

정의 1: 다음의 성질을 만족하는 매끈한 함수(smooth function) $\gamma : R \to R$를 장벽 구조 함수(barrier structured function)라고 한다.

$$y \to \pm\infty\text{에 따라 } \gamma(y) \to \pm\infty, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y}(y) > 0, \ \gamma(0) = 0 \tag{5}$$

장벽 구조 함수의 예로 $y/(c^2 - y^2)$, $\tan(\pi y / 2c)$ 등이 있으며 그 모양은 <그림 1>과 같다.



<그림 1> 장벽 구조 함수의 그래프 ($\gamma(y) = y/(4 - y^2)$)

2.4 역진 기법을 이용한 제어기의 설계

본 논문의 주요 정리는 아래와 같다.

정리 1: 시스템 (1)에 대해서 안전 영역 S 내에서 초기값을 가지는 상태변수들이 지속적으로 이 영역 내에서 원점으로 수렴하게 하는 제어 입력 u가 존재한다.

증명: 정리 1의 증명은 장벽 구조 함수와 역진 기법을 사용하여 이루어진다.

[단계 1] 시스템 (1)의 x_1 하부 시스템에 대하여

$$V_1(x_1) = \frac{1}{2}\gamma_1(x_1)^2 := \frac{x_1^2}{2(c_1^2 - x_1^2)} \tag{6}$$

의 리아푸노프 함수를 고려하자. 여기서 장벽 구조 함수는 $y/\sqrt{c^2 - y^2}$이고 보조정리 1의 (1) 조건을 만족함을 알 수 있다.

이 함수를 시간에 관하여 미분하면

$$\dot{V}_1 = \left(\frac{x_1}{c_1^2 - x_1^2} + \frac{x_1^3}{(c_1^2 - x_1^2)^2}\right)(x_2 + f_1(\cdot)) = \left(\frac{c_1^2 x_1}{c_1^2 - x_1^2}\right)(x_2 + f_1(\cdot)) \tag{7}$$

를 얻게 되고, 이로부터 가상의 입력(virtual control) x_2^*를 다음과 같이 설계할 수 있다.

$$x_2^* = -k_1 x_1 - f_1(\cdot), \quad \bar{x}_2 = x_2 - x_2^* \tag{8}$$

따라서 다음과 같은 결과가 얻어진다.

$$\dot{V}_1 = -\frac{k_1 c_1^2 x_1^2}{c_1^2 - x_1^2} + \left(\frac{c_1^2 x_1}{c_1^2 - x_1^2}\right)\bar{x} \tag{9}$$

[단계 2] 이제는 전체 시스템에 대하여

$$V_2(x_1, x_2) = V_1(x_1) + \frac{\bar{x}_2^2}{2(\bar{c}_2^2 - x_2^2)} \tag{10}$$

의 리아푸노프 함수를 고려하자. 이 함수를 시간에 관하여 미분하면

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\overline{x}_2^{\,2}}{2(c_2^2 - x_2^2)}\right)\dot{x}_2 + \frac{\partial}{\partial x_2^*}\left(\frac{\overline{x}_2^{\,2}}{2(c_2^2 - x_2^2)}\right)\frac{\partial x_2^*}{\partial x_1}\dot{x}_1 \tag{11}$$

$$= -\frac{k_1 c_1^2 x_1^2}{c_1^2 - x_1^2} + \frac{c_1^2 x_1 \overline{x_2}}{c_1^2 - x_1^2} + \frac{\overline{x_2}(c_2^2 - x_2 x_2^*)}{(c_2^2 - x_2^2)^2}(u + f_2(\cdot)) - \left(\frac{\overline{x_2}}{c_2^2 - x_2^2}\right)\frac{\partial x_2^*}{\partial x_1}\dot{x}_1$$

를 얻게 되고, 아래와 같은 제어 입력 u를 설계함으로써

$$u = -\frac{(c_2^2 - x_2^2)^2}{c_2^2 - x_2 x_2^*}\left(\frac{k_2 \overline{x_2}}{c_2^2 - x_2^2} + \frac{c_1^2 x_1}{c_1^2 - x_1^2} - \frac{\dot{x}_1}{c_2^2 - x_2^2}\frac{\partial x_2^*}{\partial x_1}\right) - f_2(\cdot) \tag{12}$$

리아푸노프 함수는 다음을 만족하게 된다.

$$\dot{V}_2 = -\frac{k_1 c_1^2 x_1^2}{c_1^2 - x_1^2} - \frac{k_2 \overline{x_2^2}}{c_2^2 - x_2^2} \tag{13}$$

식 (12)의 제어 입력은 분모 부분에 $c_2^2 - x_2 x_2^*$를 포함하기 때문에 제어 입력 u가 특이 문제(singular problem)를 갖지 않음을 보장하여야 한다. 즉, $c_2^2 - x_2 x_2^* \neq 0$ 임을 아래에서 증명하고자 한다.

$(c_2^2 - x_2^2)^2 > 0$이므로 $c_2^2 - x_2 x_2^* > 0$를 보이기 위해서는

$$c_2^2 - x_2 x_2^* = c_2^2 - x_2(-k_1 x_1 + f_1(\cdot)) > 0 \tag{14}$$

와 식 (2)의 조건을 이용하면 다음과 같은 부등식을 도출할 수 있다.

$$0 < c_2^2 - k_1 c_1 c_2 - c_2 \overline{c_1} < c_2^2 + k_1 x_1 x_2 - x_2 f_1(\cdot) < c_2^2 + k_1 c_1 c_2 + c_2 \overline{c_1} \tag{15}$$

위 부등식의 하계(lower bound)로부터 $k_1 > 0$과 c_1, c_2의 조건을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$0 < c_2^2 - k_1 c_1 c_2 - c_2 \overline{c_1} \;\Rightarrow\; 0 < c_2 - k_1 c_1 - \overline{c_1} \;\Rightarrow\; k_1 c_1 + \overline{c_1} < c_2 \tag{16}$$

식 (16)의 조건을 만족하는 k_1, c_1, c_2의 선정으로 제어 입력 u는 특이 현상을 회피함을 보장할 수 있다.

최종적으로 리아프노프 함수 $V_2(x_1, x_2) = x_1^2/2(c_1^2 - x_1^2) + \overline{x_2}^{\,2}/2(c_2^2 - x_2^2)$는 보조정리 1의 (1) 조건을 만족하고, 식 (13)의 결과는 보조정리 1의 (2) 조건을 만족하므로, 영역 S 내에서 초기값을 가지는 상태변수들은 이 영역 내에서 원점으로 수렴한다. ■

2.5 모의실험

위에서 제시된 방법으로 설계된 제어기의 유용성을 고찰하기 위해 다음과 같은 2차 비선형 시스템으로 모의실험을 수행했다.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_1^2,\\ \dot{x}_2 &= u + x_1 x_2\end{aligned} \tag{17}$$

상태변수의 안전 영역을 $S = \{x \in R^2 : |x_1| < 2,\ |x_2| < 6.5,\ i = 1, 2\}$로 정하고, 식 (12)를 이용하여 제어 입력 u를 설계했다. 이때, $k_1 = k_2 = 1$을 이용했으며, $|f_1(\cdot)| < 4$이므로 제어 입력이 특이 문제를 갖지 않도록 하는 조건 $k_1 c_1 + \overline{c_1} < c_2 \Rightarrow 1 \times 2 + 4 < 6.5$를 만족하게 된다.

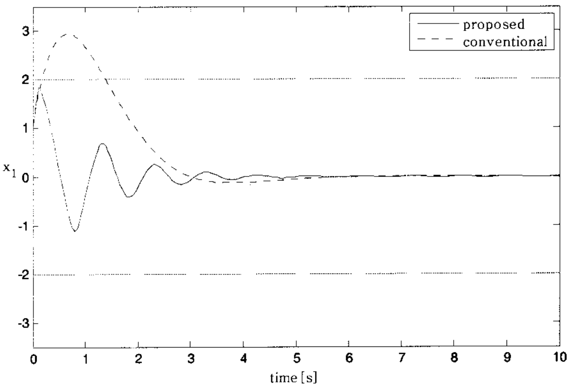
결과를 비교하기 위해 일반적인 역진 기법을 이용하여 아래와 같은 제어 입력을 설계했다.

$$u = -k_2(x_2 + k_1 x_1 + x_1^2) - (k_1 + 2x_1)(x_2 + x_1^2) - x_1 - x_1 x_2 \tag{18}$$

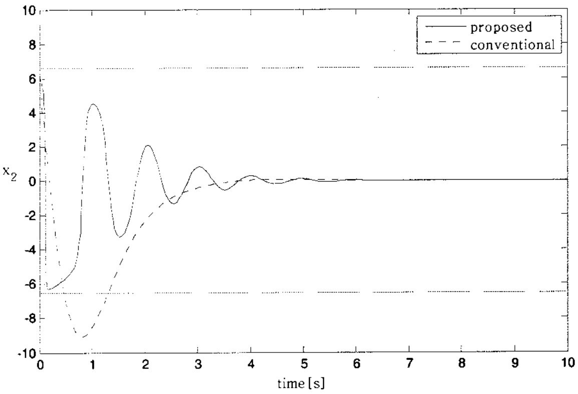
초기값이 $(x_1(0), x_2(0)) = (1, 6)$일 때, x_1과 x_2는 각각<그림 2>와 <그림 3>과 같은 결과를 보였다. 일반적인 역진 기법을 적용했을 때에는 상태변수가 안전 영역을 벗어나 위험 영역을 지나가는 반면에 본 논문에서 제시된 기법을 적용했을 때에는 상태변수가 안전 영역 내에서 평형점으로 수렴하게 되는 것을 볼 수 있다.

3. 결 론

본 논문에서는 상태변수에 제한조건을 가지는 드리프트항까지 고려한 일반적인 2차 비선형 시스템을 고려했다. 장벽 구조 함수를 이용한 리아푸노프 함수와 역진 기법을 통하여 안전 영역 내에 초기값들을 가지는 상태변수들이 그 영역 내에서 평형점으로 수렴하게 만드는 제어기를 설계하고, 모의실험을 통해 제시된 방법의 유용성을 보였다.



<그림 2> 모의실험 결과(x_1)



<그림 3> 모의실험 결과(x_2)

[참 고 문 헌]

[1] A. H. Glattfelder and W. Schaufelberger, *Control Systems with Input and Output Constraints*, ser. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. London: Springer-Verlag, 2003.

[2] E. G. Gilbert and K. T. Tan, "Linear systems with state and control constraints: The theory and application of maximal output admissible sets," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36, no. 9, pp. 1008 - 1020, 1991.

[3] F. Blanchini, "Set invariance in control," *Automatica*, vol. 35, no. 11, pp. 1747 - 1769, 1999.

[4] A. Bemporad, A. Casavola, and E. Mosca, "Nonlinear control of constrained linear systems via predictive reference management," *IEEE Transactions of Automatic Control*, vol. 42, no. 3, pp. 340 - 349, March 1997.

[5] A. Bemporad, F. Borelli, and M. Morari, "Model predictive control based on linear programming - the explicit solution," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, no. 12, pp. 1974 - 1985, 2002.

[6] E. Rimon and D. Koditschek, "Exact robot navigation using artificial potential functions," *IEEE Transactions on Robotic Automation*, vol. 8, no. 5, pp. 501 - 518, October 1992.

[7] J. Wolff and M. Buss, "Invariance control design for constrained nonlinear systems," in *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, 2005.

[8] A. Bemporad, "Reference governor for constrained nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, no. 3, pp. 415 - 419, 1998.

[9] E. G. Gilbert and I. Kolmanovsky, "A generalized reference governor for nonlinear systems," in *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4222-4227, 2001.

[10] R. Findeisen, F. Imsland, L. Allgwer, and B. Foss, "State and output feedback nonlinear model predictive control: An overview," *European Journal of Control*, vol. 9, no. 2-3, pp. 190 - 207, 2003.

[11] K.B. Ngo, R. Mahony, and Z.P. Jiang, "Integrator Backstepping using barrier functions for systems with multiple state constraints," in *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4222-4227, 2005.