불확실한 비선형 시스템에 대한 강인 유한 시간 안정화

서상보, 이진영, 서진헌, 심형보
서울대학교 전기컴퓨터공학부

Robust Finite-time Stabilization for a Uncertain Nonlinear System

Sangbo Seo, Jinyoung Lee, Hyungbo Shim, Jin Heon Seo
ASRI, School of Electrical Engineering and Computer Science, Seoul National Univ.

Abstract - 본 논문에서는 불확실성을 가지는 비선형 시스템에 대한 강인 유한 시간 안정화 문제를 고려한다. 제안된 설계기법은 역진기법과 추가된 다이나믹스를 이용한 다이나믹 지수 보정법에 기반을 두고 있으면, 이는 전체 시스템의 유한시간 안정화와 제어기의 유한함을 보장한다.

1. 서 론

유한 시간 안정화 문제는 빠른 수렴성과 외란 등에 대한 강인함으로 많은 연구가 진행되어 왔다[1-5]. Bang-bang 최적 제어가 이중 적분형 시스템에 적용된 이후로[1], homogeneity 개념을 사용한 연속 제어기[3,4], 역진(backstepping) 기법을 사용한 연속 제어기[4] 등의 유한 시간 제어기법들이 제시되어 왔다. 그 중 [2]에서는 리아푸노프 함수에 대한 유한 시간 안정화 정리를 제시하였는데, 본 논문에서는 이 정리를 이용하여 설계된 제어기가 유한 시간 안정함을 증명한다. 제어기는 역진 제어 기법과 다이나믹 지수 보정법에 기반을 두고 있으며, 설계된 제어기의 유한성을 보이기 위해서 degree indicator라는 새로운 개념을 도입한다. [5]에서는 3차 비선형 시스템에 대해 이 기법을 사용하여 다이나믹 유한 시간 안정화 제어기가 설계되었으나, 이 논문에서는 불확실성이 포함된 비선형 시스템을 고려하고자 한다.

이 논문에서는 다음과 같은 불확실성을 포함한 2차 비선형 시스템을 고려한다.

$$\dot{x}_1 = x_2 + f_1(x_1, d(t)), \quad \dot{x}_2 = u + f_2(x_1, x_2, d(t)). \tag{1}$$

여기서 $x = [x_1, x_2]^T \in R^2$는 시스템 상태변수, $u \in R$는 제어입력이고 $d(t)$는 기지 옹골 집합 $\Omega \subset R^s$에 속하는 외란 혹은 변수이다. 함수 $f_i : R^i \times R^s \to R, i = 1,2$는 모든 $d(t) \in \Omega$에 대해 $f_i(0, d(t)) = 0$을 만족하는 상태변수에 대해 연속적으로 미분 가능한 함수이다. 그리고 시스템 (1)에 대해서 다이나믹 제어기

$$\dot{x}_0 = f_0(x_0), x_0(0) > 0, \qquad u = u(x_0, x) \tag{2}$$

가 설계될 것이다.

2. 주요 개념의 소개

2.1 유한 시간 리아푸노프 안정화

먼저 본 논문의 주요정리의 증명에 사용될 유한 시간 안정화에 대한 리아푸노프 정리를 소개하고자 한다.

보조정리 1.([12]) 연속인 시스템 $\dot{x} = f(x) (f(0) = 0, x \in R^n)$에 대해서 미분 가능한 함수 $V(x)$가 원점 주변의 영역 $U \subset R^n$에서 존재하고

<1> $V(x)$는 영역 U에서 positive definite

<2> $x \in U$인 모든 x에 대해 $\dot{V} + kV^{\alpha} \le 0$

의 두 조건을 만족하는 실수 $k > 0, 0 < \alpha < 1$들이 존재한다고 가정하자. 그러면 이 시스템의 원점은 국소 유한 시간 안정(locally finite-time stable)이다. 초기값 $x(0)$에 의존하는 정착 시간(settling time)은

$$T_x(x(0)) \le \frac{V(x(0))^{1-\alpha}}{k(1-\alpha)}$$

이다. 만약 $U = R^n$이고 $V(x)$이 radially unbounded이면 원점은 광역적 유한 시간 안정(globally finite-time stable)이다. □

2.2 다이나믹 지수 보정법

다음으로 이 논문의 주요 아이디어 중 하나인 다이나믹 지수 보정법을 소개하자 한다. 이 지수 보정법은 $x^{4/3}$과 같은 smooth함수가 아닌 항을 x^2와 같은 smooth함수로 보정하기 위해 사용된다.

보조정리 2. 양의 상수 $\bar{g}$와 $0 < d < 1$인 상수 d가 존재할 때 $|g(x)| \le |x|^{1+d}\bar{g}$를 만족하는 nonsmooth 함수 $g(x)$와 변수 $y > 0$에 대해서 다음의 부등식을 만족하는 양수 σ가 존재한다.

$$g(x) \le \left(\frac{1-d}{2}\right) y^{1+d} + \frac{x^2 \sigma}{y^{1-d}} \tag{3}$$

2.3 Degree Indicator

다음으로 소개할 내용은 설계된 입력 u의 유한성을 보이기 위한 degree indicator의 개념이다. 보조정리 2를 사용하여 설계된 입력은 분모에 변수가 포함되므로 이 변수가 0으로 수렴해 감에 따라 입력의 유한성을 보존함을 보일 필요가 있다.

함수 $g(x_0, x)$에 대해서 Degree indicator의 정의는 다음과 같다.

$$D(g(x_0, x)) := \inf \beta \quad \text{subject to}$$
$$\limsup_{x_0 \to 0^+} \bar{g}(x_0) x_0^{\beta} < 0$$

여기서 $\bar{g}(x_0) := \max_{f_0(x_0) \le 0} |g(x_0, x)|$이고 $f_0(x_0)$는 추가 다이나믹스의 시스템이다. Degree indicator의 자세한 성질은 추후에 논하기로 한다.

3. 불확실 시스템의 강인 유한 시간 안정화

이 장에서는 주요 정리와 그의 증명을 소개하고자 한다. 이를 위해 집합 $R^{(+,2)} := \{(x_0, x) \in R^3 : x_0 > 0\}$을 정의한다.

3.1 주요 정리

본 논문의 주요 결과는 다음과 같다.

주요 정리 1. d는 $0 < d < 1/2$를 만족하는 분자와 분모가 홀수인 분수라고 하자. 이 때, 시스템 (1)에 대해서 $R^{(+,2)}$에서 정의되는 $x_0(0) > 0$인 다이나믹 제어기

$$\dot{x}_0 = f_0(x_0, x), \quad u = u(x_0, x)$$

가 존재하고, 이는 폐루프 시스템의 원점을 광역적 유한 시간 안정하게 한다. 그리고 함수 $f_0(x_0)$와 $u(x_0, x)$는 시스템의 해가 원점에 도달하는 동안 유한하다.

3.2 주요정리 1의 증명

주요 정리의 증명은 크게 두 부분으로 나누어진다. 첫 부분은 다이나믹 지수 보정법을 사용하여 설계된 제어기가 보조 정리 1을 만족함을 보이는 대수적 설계 부분이고, 두 번째 부분은 추가 다이나믹스의 함수와 설계된 제어기의 유한함을 degree indicator 개념을 사용하여 증명하는 부분이다.

3.2.1 Smooth 다이나믹 제어기의 대수적 설계

구체적인 설계에 앞서 시스템 (1)에 대한 추가 다이나믹스는 아래와 같이 설계된다.

$$\dot{x}_0 = -k_0 x_0^d + \frac{\gamma_1 x_1^2 + \gamma_2 \bar{x}_2^2}{x_0^{2-d}} \tag{4}$$

여기서 $\bar{x}_2 = x_2 - x_2^*$이고 $x_2^*(x_0, x_1)$는 추후에 설계될 가상의 입력이다. 그리고 k_0와 γ_1, γ_2는 이득값들이다. 이 시스템에 대해 주목할 점은 상태변수들이 0의 값을 가지기 전에는 $x_0(t)$는 절대 원점에 도달하지 않는다는 것이다. 이제 역진 기법을 사용하여 구체적으로 제어기를 설계해 보겠다.

단계 1: 이 단계에서는 x_1 하위 시스템에 대해서 가상의 입력 x_2^*를 설계할 것이다. 리아푸노프 함수 $V_1 = (x_0^2 + x_1^2)/2$의 미분에 항 $k_1 x_1^{1+d}$의 합차를 추가하면

$$\dot{V}_1 = -k_0 x_0^{1+d} + \frac{\gamma_1 x_1^2 + \gamma_2 \bar{x}_2^2}{x_0^{1-d}} + x_1(\bar{x}_2 + x_2^* + f_1(\cdot)) \pm k_1 x_1^{1+d}$$

가 얻어지고, 여기서 k_1은 설계되는 이득값이다. 항 $-k_1 x_1^{1+d}$는 보조정리 1의 증명에 사용될 부분이고, 항 $k_1 x_1^{1+d}$는 보조정리 2의 지수 보정법을 사용하여 smooth한 함수로 정리할 것이다. 보조 정리 2를 사용하면

$$|k_1 x^{1+d}| \le \frac{x_0^{1+d}}{p} + \frac{x_1^2 \sigma_1}{x_0^{1-d}} \tag{5}$$

가 얻어지고, 여기서 $p = 2/(1-d), q = 2/(1+d), \sigma_1 = k_1^q / q$이다.

불확실성을 포함하고 있는 함수 $f_1(x_1, d(t))$는 $f_1(0, d(t))$를 만족하는 C^1 함수이므로 $|f_1(\cdot)| \le |x_1| \bar{f}_1(x_1)$를 만족하는 smooth 함수 $\bar{f}_1(\cdot) \ge 0$

가 존재함을 알 수 있다. $\eta_1(x_1)=\bar{f}_1(\cdot)$로 정의하면, 식 (5)와 함께

$$\dot{V}_1 \le -\left(k_0-\frac{1}{p}\right)x_0^{1+d}-k_1x_1^{1+d}+\frac{\gamma_2\bar{x}_2^2}{x_0^{1-d}}+x_1(\bar{x}_2+x_2^*) + \frac{x_1^2(\gamma_1+\sigma_1)}{x_0^{1-d}}+x_1^2\eta_1(\cdot)$$

로 정리되고, 가상의 입력을

$$x_2^* = -x_1\left(\frac{\gamma_1+\sigma_1}{x_0^{1-d}}+\eta_1(\cdot)\right) \tag{6}$$

와 같이 설계할 수 있다. 그러므로 이 단계에서는 다음에 도달하게 된다.

$$\dot{V}_1 \le -\left(k_0-\frac{1}{p}\right)x_0^{1+d}-k_1x_1^{1+d}+\frac{\gamma_2\bar{x}_2^2}{x_0^{1-d}}+x_1\bar{x}_2$$

단계 2: 이 단계에서는 단계 1의 결론을 바탕으로 최종 제어기 u를 설계할 것이다. 리아푸노프 함수를 $V=V_1+\bar{x}^2/2$로 선택하고 항 $k_2\bar{x}_2^{1+d}$의 합차를 정하면

$$\dot{V}=\dot{V}_1+\bar{x}_2(u+f_2(\cdot))-\bar{x}\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial x_1}\dot{x}_1+\frac{\partial x_2^*}{\partial x_0}\dot{x}_0\right)\pm k_2\bar{x}_2^{1+d}$$

로 유도되고, 단계 1과 마찬가지로 지수 보정법을 사용하면

$$k_2\bar{x}_2^{1+d} \le \frac{x_0^{1+d}}{p}+\frac{\bar{x}_2^2\sigma_2}{x_0^{1-d}}, \quad \sigma_2=\frac{k_2^q}{q} \tag{7}$$

가 된다.

불확실성이 포함된 함수 $f_2(\cdot)$는 $|f_2(x,d(t))| \le (|x_1|+|x_2|)\bar{f}_2(x)$의 관계를 만족하므로 아래의 부등식으로 유도가 가능하다.

$$\begin{aligned}&\left|\bar{x}_2f_2(\cdot)-\bar{x}_2\frac{\partial x_2^*}{\partial x_1}f_1(\cdot)\right| \\ &\le |\bar{x}_2|\left((|x_1|+|\bar{x}_2|+|x_2^*|)\bar{f}_2(\cdot)+|x_1|\bar{f}_1(\cdot)\left|\frac{\partial x_2^*}{\partial x_1}\right|\right) \le \frac{3x_1^2}{4}+\bar{x}_2^2\eta_2(x_0,x)\end{aligned} \tag{8}$$

여기서 x_2^*의 정의와 영의 부등식 $xy \le x^2/4+y^2$이 사용되었다. 그리고

$$\eta_2(\cdot)=\bar{f}_2(\cdot)+\bar{f}_2^2(\cdot)\left(1+\frac{\gamma_1+\sigma_1}{x_0^{1-d}}+\eta_1(\cdot)\right)^2+\bar{f}_1^2(\cdot)\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial x_1}\right)^2$$

이다. 따라서 식 (7)과 (8)에 의해서

$$\dot{V} \le -\left(k_0-\frac{1}{p}\right)x_0^{1+d}-\left(k_1-\frac{3}{4}\right)x_1^{1+d}-k_2\bar{x}_2^{1+d}+x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_2^2\left(\frac{\gamma_2+\sigma_2}{x_0^{1-d}}+\eta_2(\cdot)\right)$$

와 함께 $R^{(+,2)}$공간에서 smooth한 다이나믹 제어기 u를 설계할 수 있다.

$$u=-x_1-\bar{x}_2\left(\frac{\gamma_2+\sigma_2}{x_0^{1-d}}+\eta_2(\cdot)\right)+\frac{\partial x_2^*}{\partial x_1}x_2+\frac{\partial x_2^*}{\partial x_0}\dot{x}_0 \tag{9}$$

$k_0>1/p,\ k_1>3/4,\ k_2>0$를 만족하는 k_0,k_1,k_2에 대해

$$\begin{aligned}\dot{V}+kV^{\alpha} &\le \dot{V}+\frac{k}{2^{(1+d)/2}}\left(x_0^{1+d}+x_1^{1+d}+\bar{x}_2^{1+d}\right) \\ &= -\left(\min\left\{k_0-\frac{1}{p},k_1-\frac{3}{4},k_2\right\}-\frac{k}{2^{(1+d)/2}}\right)\left(x_0^{1+d}+x_1^{1+d}+\bar{x}_2^{1+d}\right) \\ &\le 0\end{aligned}$$

를 만족시키는 $0<k\le 2^{(1+d)/2}\min\{k_0-1/p,k_1-3/4,k_2\}$ 조건의 k의 설정으로 보조 정리 1이 만족됨을 알 수 있다.

3.2.2 설계된 제어기의 유한성

입력의 유한성은 (x_0,x_1,x_2)좌표 대신에 $(x_0,x_1,\bar{x}_2)$좌표 상에서 증명될 것이다. $R^{(+,2)}$ 공간에서 두 좌표는 smooth 변환이 가능하므로 합리적인 접근임을 알 수 있다.

우선 $P:=\left\{(x_0,x)\in R^3:\gamma_1x_1^2+\gamma_2\bar{x}_2^2 \le k_0x_0^2\right\}$와 $P_R:=P\cap B_R$를 정의하자. B_R은 원점이 중심이고 반지름이 $R>0$인 열린 구이다. 앞 장에서 소개된 degree indicator는 영역 P_B에서 증명될 것이다. 그 이유는 $R^3\setminus P$ 영역에서는 (4)의 구조에 의해서 $x_0(t)$는 상승하게 되고 절대 0으로 도달 할 수가 없게 된다. 그러므로 추가 다이나믹스 $x_0(t)$가 0에 도달하기 위해선 P을 통해서 P_B영역 내에서 0에 도달하게 된다. P_B영역 내에서는 $f_0(\cdot)\le 0$, 즉, $\sqrt{(\gamma_1x_2^2+\gamma_2\bar{x}_2^2)/k_0}\le x_0$의 관계가 만족되므로 이를 degree indicator의 정의에 적용하면 다음과 성질을 구할 수 있다.

명제 1.

<1> $g(x_0,x)=g_1(x_0,x)+g_2(x_0,x)$를 만족하는 함수 $g, g_1,\ g_2$에 대해서

$$D(g(\cdot)) \le \max\{D(g_1(\cdot)),D(g_2(\cdot))\} \tag{10}$$

<2> $g(x_0,x)=g_1(x_0,x)g_2(x_0,x)$를 만족하는 함수 $g, g_1,\ g_2$에 대해서

$$D(g(\cdot)) \le D(g_1(\cdot))+D(g_2(\cdot)) \tag{11}$$

□

상태변수들이 원점에 도달하는 동안 항상 입력이 유한하려면 degree indicator값이 항상 음의 값을 유지해야 함을 명심하자. 이 성질을 만족하기 위해서 우리는 상수 d에 대한 조건을 유도할 것이다. 우선 식 (6)의 가상의 입력은 $D(x_1)\le -1, D\left((\gamma_1+\sigma_1)/x_0^{1-d}\right)\le 1-d, D(\eta_1(\cdot))\le 0$를 성질 (10)에 적용하여 $D(x_2^*)\le -d$ 임을 알 수 있다. $0<d<1$의 사실로부터 가상의 입력 x_2^*는 영역 P_B내에서 항상 유한함을 알 수 있다. 그리고 제어 입력에는 x_2^*의 편미분들이 포함되어 있으므로 간단한 계산으로 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$D\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial x_i}\right)\le 1-d,\ i=0,1 \tag{12}$$

제어 입력 (9)에는 함수 $\eta_2(\cdot)$는 분모에 x_0를 포함하고 있으므로 이에 대한 degree indicator 값을 구할 필요가 있다. $\eta_2(\cdot)$에 포함된 $\bar{f}_1(x_1)$는 smooth 함수, 상수, 0의 형태를 가질 가능성을 모두 포함하고 있다. $D(x_1)=-1, D(\text{상수})=0, D(0)=-\infty$임을 종합하면 $D(\bar{f}_1(\cdot))\le 0$임을 쉽게 알 수 있다. $\bar{f}_2(x_1,x_2)$은 우리가 $\bar{f}_2(x_1,\bar{x}_2+x_2^*)$의 형태로 변환하여 이용하므로 좀 더 주의를 기울일 필요가 있다. 이 함수 역시 모든 가능성을 가지므로 $D(x_1)=-1, D(\bar{x}_2)=-1, D(x_2^*)\le -d$와 상수일 가능성까지 종합하면 $D(\bar{f}_2(\cdot))\le 0$임을 알 수 있다.

이 사실들과 (12)의 결과 및

$$D\left(1+\frac{\gamma_1+\sigma_1}{x_0^{1-d}}+\eta_1(\cdot)\right)\le \max\{0,1-d,0\}=1-d$$

을 정리 1에 적용하면

$$D(\eta_2(\cdot))\le \max\{0,2(1-d),2(1-d)\}=2(1-d) \tag{13}$$

임을 알 수 있다.

(4)와 $\bar{x}_2$의 정의에 의해서 $D(\dot{x}_0)\le -d, D(x_2)=D(\bar{x}_2+x_2^*)\le -d$를 얻을 수 있고, 이것과 (12), (13)을 정리 1에 적용하면

$$D(u)\le \max\{-1,-1+2(1-d),(1-d)-d,(1-d)-d\}=1-2d \tag{14}$$

가 된다. 입력이 영역 P_B에서 유한하기 위해선 음의 degree indicator값을 값을 가져야 하므로 $1-2d<0$ 즉, $0<d<1/2$의 조건을 만족한다면 입력이 유한함을 유지하면서 원점에 도달함을 알 수 있다.

3.2.3 주요 정리1의 증명의 종합

아래의 항목으로 주요 정리의 증명을 마무리 한다.

<1> 초기값 $x(0),x_0(0)>0$에 대해서 (1), (4), (9)의 폐루프 시스템은 $(x_0(t),x(t))\in R^{(+,2)}$에서 유일한 해를 가진다.

<2> 해 $(x_0(t),x(t))$는 유한 시간 $T>0$에서 $(0,0)$이 된다. 그리고 $0\le t<T$에서 항상 $x_0(t)>0$이다.

<3> $f_0(x_0,x),u(x_0,x)$는 $0\le t<T$ 내에서 항상 유한하다.

항목 <1>은 폐루프 시스템이 $R^{(+,2)}$에서 항상 smooth하므로 쉽게 알 수 있다.[ ] 그리고 항목 <2>와 <3>은 각각 3.2.1와 3.2.2의 결과에 의해서 증명이 된다.

주 1. 폐루프 시스템에서 실제 시스템은 아래와 표현을 해야 합리적이다.

$$\dot{x}_0=\begin{cases}f_0(x_0,x), & x_0\ne 0\\ 0, & x_0=0\end{cases},\quad u=\begin{cases}u(x_0,x), & x_0\ne 0\\ 0, & x_0=0\end{cases}$$

3. 결 론

본 논문에서는 불확실한 비선형 시스템에 대한 강인 유한 시간 안정화 문제를 고려하였다. 기존의 연속적인 제어기의 설계 방법이 아닌 다이나믹 지수 보정법을 사용한 다이나믹 유한 시간 제어기를 제시하였다. 제어기의 유한함을 보이기 위해서 degree indicator라는 새로운 개념을 도입하였으며, 향후 연구는 고차 시스템으로의 확장이 될 것이다.

[참 고 문 헌]

[1] M. Athans and P.I. Falb, Optimal control: An Introduction to the Theory and Its Applications, New York: McGraw-Hill, 1996.

[2] S.P. Bhat and D.S. Berstein, "Finite-time stability of continuous autonomous systems," SIAM J. Control Optim., vol. 38, no. 3, pp. 751-766, 2000.

[3] Y. Hong, "Finite-time stabilization and stability of a class of controllable systems," Syst. and Contr. Letters, vol. 46, pp. 231-236, 2002.

[4] X. Huang, W. Lin, and B. Yang, "Global finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems," Automatica, vol. 41, pp. 881-888, 2005.

[5] S. Seo, H. Shim, and J. H. Seo, "Global finite-time stabilization of a Nonlinear system using dynamics exponent scaling," accepted in Proc. 47th IEEE Conf. on Decision and Control, Cancun, Mexico, Dec, 2008.