

SVM을 이용한 공칭계통의 상태들의 관계표현과 SMC에의 응용

왕법광, 박성훈, 박승규, 안호균, 윤태성  
 창원대학교 전기공학과

States relationship of Nominal system and SMC application

Sung Hoon Park, Seung Kyu Park, Ho Kyun Ahn  
 Department of Electrical Engineering, Changwon National University

**Abstract** - 본 논문에서는 Support Vector Machines(SVM)을 이용하여 불확실한 계통의 공칭계통에 있어서 상태들의 관계를 이끌어낸다. 우선 2차 계통의 예를 통해서 서로 다른 실근을 갖는 공칭계통에 대해서만 상태들의 관계를 일반적으로 이끌어낼 수 있음을 보이고 고차계통에 대해서는 SVM을 이용하여 그 관계를 표현한다. 공칭계통의 상태들의 관계는 슬라이딩모드 제어기(SMC)의 구성에 사용함으로써 SMC의 강인성을 다른 제어기법에 추가시키는 것을 가능하게 하였다.

1. 서 론

슬라이딩모드 제어기는 불확실한 시스템의 제어에 있어서 강인성을 증가시키는 데 있어서 아주 좋은 제어기법이다.[1][2][3][4] 슬라이딩모드 제어기의 강인성을 다른 제어기법에 적용시킬 수 있다는 것은 제어에 있어서 아주 매력적인 방법이 될 수 있다. 그러나 기존의 슬라이딩모드 제어기는 다른 제어기와 결합될 수 없다 그 이유는 슬라이딩모드를 결정하는 슬라이딩 함수자세가 상태들간의 선형종속 상황을 만들기 때문에 제어시스템의 동특성이 원래 계통보다 하나 줄어들게 되어있으며 이것은 다른 제어기에 의해 만들어진 제어성능을 그대로 유지할 수 없도록 한다는 것을 의미한다. 이 문제를 해결하기 위하여 가상상태를 도입하여 계통의 차수를 증가시켜 해결한 방법에 대한 연구가 있으나 이 경우에는 가상상태를 정의해야하므로 제어기의 차수가 증가한다는 단점을 가지고 있다.[5][6][7] 아예 본 논문에서는 공칭계통의 상태들간의 관계를 만들어내고 이를 이용하여 슬라이딩평면을 구성함으로써 다른 제어기에 의해 제어된 공칭계통의 특성을 그대로 유지시킬 수 있는 슬라이딩모드제어기를 제안하였다. 우선 이차계통의 예를 통해서 그러한 상태들의 표현이 가능한 지의 여부를 살펴보았으며 서로 다른 실근을 갖는 공칭계통에 대해서만 가능함을 것을 확인하였고 그러한 계통에 속하는 고차 계통에 대해서 SVM을 이용하여 상태들간의 관계를 표현한다. 컴퓨터 시뮬레이션 결과는 불확실한 계통에 대해서 공칭계통의 특성을 유지하는 슬라이딩모드제어기가 구성되었음을 보여준다.

2. 문제 설정

다음과 같은 불확실성이 존재하는 계통을 고려하자.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}\mathbf{h}(t) \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  용계통의 상태이고  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  용은 제어입력이며  $\|\mathbf{h}\| < \mathbf{h}_{\max}$  는 크기가 제한된 불확실한 외란이다.

위의 계통에 대해서 공칭계통은 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2)$$

공칭계통은 입력  $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ 을 사용해서 다음과 같은 특성을 가지도록 제어가 된다. 본 논문에서의 제어목적은 (1)번 계통이 (2)번 계통의 특성을 갖도록 제어기를 구성하는 것이다. (2)번과 같은 동특성을 가지는 슬라이딩평면을 구성한 후 SMC를 구성하면 되는데 기존의 슬라이딩평면은 다음과 같은 형태로 상태들이 서로 선형종속이기 때문에 이것이 불가능하다. 이에 본 논문에서는 (2)번계통에 속하는 상태들간의 관계를 파악하고 이것을 슬라이딩평면의 구성에 이용하고자 한다. 우선 이차 계통에 대해서 살펴보기로 한다. 다음과 같은 계통을 고려한다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (3)$$

위계통의 해는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{x}_1(0)e^{\lambda_1 t} \\ \mathbf{x}_2(t) &= \mathbf{x}_2(0)e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \quad (4)$$

상태들간의 관계를 표현하기 위해서 다음과 같은 형태로 바꾼다.

$$t = \ln\left(\frac{\mathbf{x}_1(t)}{\mathbf{x}_1(0)}\right) \frac{1}{\lambda_1}, t = \ln\left(\frac{\mathbf{x}_2(t)}{\mathbf{x}_2(0)}\right) \frac{1}{\lambda_2} \quad (5)$$

위의 표현들로부터 다음과 같은 방정식을 얻을 수 있다.

$$\left(\frac{\mathbf{x}_1(t)}{\mathbf{x}_1(0)}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}} = \left(\frac{\mathbf{x}_2(t)}{\mathbf{x}_2(0)}\right)^{\frac{1}{\lambda_2}} \quad (6)$$

이차계통에 대해서는 위와 같이 쉽게 상태들간의 관계를 알 수 있다. 그러나 고차계통에 대해서는 어렵기 때문에 SVM을 사용하기로 한다. 여기서 복소근을 갖는 경우에는 위와같이 상태들간의 관계를 구하는 것이 어렵다는 사실을 유의할 필요가 있다. 다음에서 이것을 살펴보기로 한다. 다음과 같은 복소근을 갖는 이차계통을 고려해 보자.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (7)$$

해는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= e^{\sigma t} (\cos(\omega t)\mathbf{x}_1(0) + \sin(\omega t)\mathbf{x}_2(0)) \\ \mathbf{x}_2(t) &= e^{\sigma t} (\cos(\omega t)\mathbf{x}_2(0) - \sin(\omega t)\mathbf{x}_1(0)) \end{aligned} \quad (8)$$

다음과 같은 표현으로 바꿀 수 있다.

$$\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2 = e^{2\sigma t} (\mathbf{x}_1^2(0) + \mathbf{x}_2^2(0)) \quad (9)$$

위의 표현식에서 볼 때 복소근을 갖는 시스템의 경우에는 상태들간의 관계가 시간에 대해 독립적으로 표현될 수 없다.

3. Support Vector Machines

SVM은 적은 데이터양을 가지고 패턴인식을 하거나 함수근사에 사용되는 통계적인 학습이론중의 하나이다. SVM의 기본 아이디어는 입력데이터를 고차의 공간으로 맵핑하는 것이다. SVM에서 분류함수는 다음과 같은 형태로 근사화된다.

$$y(x) = \mathbf{w}^T f(x) + b \quad (10)$$

$x$ 는 입력이고  $\mathbf{w}$ 와  $b$ 는 계수들이다. 계수들을 결정하는 기준은 서로다른 그룹에 속하는 점들간에 가장 가까운 거리로 정의되는 margin width를 최대화하는 하는 것이다. margin width는 다음과 같다.

$$M = \frac{2}{\|\mathbf{w}\|} \quad (11)$$

위의 margin width를 최대화하는 문제는 다음을 최소화하는 문제로 바꿀 수 있다.

$$\frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w} \quad (12)$$

이 문제는 다음과 같은 문제에서 Lagrange multiplier  $\alpha$ 를 구하는 문제로 바뀔 수 있다.

$$\begin{cases} \text{maximize } Q(\alpha) = \sum \alpha_i - \frac{1}{2} \sum \sum \alpha_i \alpha_j y_i y_j x_i^T x_j \\ \sum \alpha_i y_i = 0 \end{cases} \quad (13)$$

결국 계수는 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$\mathbf{w} = \sum \alpha_i y_i \mathbf{x}_i^T, \quad b = y_k - \mathbf{w} \mathbf{x}_k \quad (14)$$

여기서  $\mathbf{x}_i$ 는  $\mathbf{x}_k \alpha_k \neq 0$ 에 해당하는 점으로 support vector라고 부른다.

결과적으로 분류함수는 다음과 같이 표현된다.

$$f(x) = \sum \alpha_i y_i \mathbf{x}_i^T x + b \quad (15)$$

여기서  $\phi(x) = \mathbf{x}_i^T x$  같이 두면 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$f(x) = \sum \alpha_i y_i \phi(x) + b \quad (16)$$

$\phi(x)$ 를 다양한 형태  $K(x)$ 로 적용시킬 수 있다.

Lagrange multiplier와 support vector를 구하는 방법은 다른 연구자들이

제공해주는 MATLAB toolbox를 사용하여 구할 수 있다.

#### 4. SVM을 이용한 공칭상태들간의 관계의 유도와 SMC

공칭상태들을 사용하여 다음과 같은 분류함수를 학습시킬 수 있다.

$$x_1 = \sum \beta_i K(x_{sv}, x_v) \quad (17)$$

여기서  $\beta_i$ 는 support vector에 해당하는 계수이고  $K(x_{sv}, x_v)$ 는 비선형

맵핑이고  $x_v = [x_2 \cdots x_{n-1} \ x_n]^T$ 이고  $x_{sv}$ 는 support vector이다. 위의 관계를 이용하여 슬라이딩평면을 다음과 같이 정의한다.

$$S(x) = x_1 - \sum \beta_i K(x_{sv}, x_v) = 0 \quad (18)$$

위의 슬라이딩평면을 사용하여 hitting condition 내용을  $s \dot{s}$ 을 만족시키는 SMC입력을 구할 수 있다.

#### 5. 수치예와 시뮬레이션

다음과 같은 3차계통을 고려한다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} h(t)$$

여기서  $u(t) = u_0 + u_{SMC}$ 이며  $h(t) = 0.5 \sin(5t)$ 이고 초기치는

$$x(0) = [3 \ 2 \ 1]^T \text{이다.}$$

공칭제어기는 공칭계통의 고유치가 -1, -2, -3dp 위치하도록 한다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_0(t)$$

여기서  $u_0(t) = -KX(t)$ ,  $K = [5 \ 9 \ 3]$

대각화는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.8660 \\ -4.5826 \\ -4.7697 \end{bmatrix} u_{SMC}(t) + \begin{bmatrix} -0.8660 \\ -4.5826 \\ -4.7697 \end{bmatrix} h(t)$$

$$P = \begin{bmatrix} -0.5774 & 0.2182 & -0.1048 \\ 0.5774 & -0.4364 & 0.3145 \\ -0.5774 & 0.8729 & -0.9435 \end{bmatrix}$$

여기서

학습은 다음의 공칭계통의 상태들에 의해서 이루어진다.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix}$$

커널함수는 다항함수를 사용하였고 결과는 다음과 같다.

$$\hat{z}_3(t) = z_1(t) \times z_2(t)$$

슬라이딩평면은 다음과 같이 정의된다.

$$S = z_3(t) - \hat{z}_3(t)$$

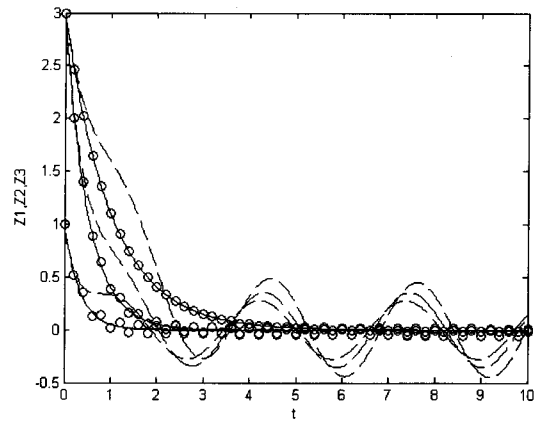
SMC입력을 구하기 위해 다음의 계산이 필요하다.

$$\dot{S} = \dot{z}_3(t) - \dot{\hat{z}}_3(t) = \dot{z}_3(t) - \dot{z}_1(t)z_2(t) - z_1(t)\dot{z}_2(t)$$

hitting condition을 만족시키는 SMC입력은 다음과 같이 구해진다.

$$u_{SMC}(t) = \frac{3z_3(t) - (1/3) \times z_1(t)z_2(t) - D(t)h(t)}{D(t)}$$

여기서  $D(t) = -4.7697 + 0.866z_2/9 + 4.5826 z_1/9$ 이고  $h_{max} = 1.1$ 이다.



<그림 1> 공칭상태, 극배치제어, 제안된 SMC에 의한 상태응답

위의 그림을 볼 때 불확실성이 존재하더라도 제안된 SMC는 극배치에 의해서 제어된 공칭계통의 상태응답과 동일한 특성을 보임을 알 수 있었다.

#### 6. 결 론

서로다른 실근을 갖는 공칭계통에 대한 상태들간의 관계를 SVM을 이용하여 표현할 수 있었고 상태들간의 관계식을 이용하여 슬라이딩평면을 구성함으로써 불확실성이 존재하더라도 공칭계통의 특성을 유지시킬 수 있는 슬라이딩모드제어기를 제안하였다. 공칭제어기를 극배치제어기를 사용함으로써 극배치제어기법에 슬라이딩모드제어기의 강인성을 결합할 수 있었다. 불확실성이 존재하더라도 원하는 고유치를 갖도록 하는 강인한 극배치제어기가 구성된 것이다.

본 연구는 산업자원부 지방기술혁신[RTI04-01-03] 지원으로 수행되었습니다.

#### [참 고 문 헌]

- [1] U. Itkis : 'Control systems of variable' (JOHNWILLY & SO NS, 1976)
- [2] V. I Utkin : 'Sliding modes and theirin variable structure systems' (Mir Publishers, 1978)
- [3] J. Y. Hung, W. Gao, and J.C. Hung : 'Variablecontrol : A s survey', IEEE Transactions onElectronics, 1993, 40, (1), pp. 2-22
- [4] K. D. Young, V. I. Utkin and U. Ozguner : 'A control engin eer's guide to sliding mode control', IEEE Transactions on Contr ol Systems Technology, 1999, 7, (3), pp. 328342
- [5] S. K. Park and H.K. Ahn : 'Robust controllerdesign with no vel sliding surface-linear optimalcase', IEE Proceedings, Control TheoryApplications, 1999, 146, (3), pp. 242-246.
- [6] M. C. Kim, S. K. Park and G. P. Kwak : 'Robust Nonlinear Control with Feedbackon and Sliding Mode', Dynamics of Contin uous Discrete and Impulsive Systems -B, 2007, 14, (s2), pp. 1400 -1404