

## 미소 감쇄 시스템에 대한 감쇄 주입법을 이용한 외란 관측기 설계

주영준, 심형보, 서진현, 이찬화  
 서울대학교 공과대학 전기·컴퓨터 공학부

### Disturbance Observer for the Low Damped System using Damping Injection Method

YoungJun Joo, Hyungbo Shim, Jin-Heon Seo, ChanHwa Lee  
 ASRI, School of Electrical Engineering and Computer Science, Seoul National University

**Abstract** - 이 논문은 두 개의 질량을 가진 미소 감쇄 시스템에 대해 외란 관측기 기반 추종 제어기의 강인성을 증가시키는 새로운 감쇄 주입법(damping injection)을 제시한다. '미소 감쇄'란 감쇄 계수가 다른 파라미터들과 비교해서 매우 작다는 것을 의미한다. 파라미터에 불확실성을 가진 미소 감쇄 시스템에 대한 외란 관측기의 적용은 전체 시스템을 불안정하게 할 수 있다는 것을 관측할 수 있기에, 외란 관측기의 구조 중 공칭(Nominal) 모델에 인위적으로 더 많은 감쇄를 추가함으로써 강인성을 강화시키는 방법을 제안한다. 또한 강인 제어 이론의 제로 익스클루전(zero exclusion) 정리를 이용하여 감쇄 주입법의 안정성을 증명하고 시뮬레이션과 실험을 수행하였다.

#### 1. 서 론

시스템의 불확실성을 보상하고 외란을 제거하는 강인성과 기준 입력에 대한 응답 속도를 높이는 추종성은 제어기 설계의 가장 중요한 문제이다. 일반적으로 추종성을 높이기 위하여 고이득(high gain) 제어기를 사용하면 강인성에 제약을 받게 되고, 강인성을 향상시키기 위한 강인 제어기(robust controller)를 사용한다면 추종성의 제약을 받게 된다. 이를 해결하기 위하여 피드백 루프(feedback loop)에 외란 관측기를, 피드포워드 루프(feedforward loop)에 추종 제어기(tracking controller)를 사용하는 2 자유도 제어기는 강인성과 추종성의 두 가지 측면에서 모두 좋은 성능을 보여준다[1].

외란 관측기는 간단한 구조에도 불구하고 시스템의 불확실성을 보상하고 외란을 제거하는 강인한 성능을 가지고 있고, 임의로 설계한 외부 제어기에 대해 추가하여 사용하는 형태이기 때문에 모터 제어와 로봇 매니퓰레이터(manipulator)의 제어 등에서 강인성을 보장하기 위하여 사용되고 있다. 또한 저주파 통과 필터의 대역폭(bandwidth)이 커진다면 외란 관측기 부분을 공칭 모델(Nominal model)로 근사화할 수 있다. 따라서 외란 등이 존재할 때 공칭 모델에 대해서 설계한 외부 제어기의 성능을 보장할 수 있다[2].

#### 2. 본 론

##### 2.1 Preliminary

이 장에서는 외란 관측기 기반 2 자유도 제어기의 설계 방법과 미소 감쇄 시스템에 대한 설명, 불확실한 계수를 가진 전달 함수에 대한 안정성 해석 방법을 설명한다.

##### 2.1.1 외란 관측기 기반 2 자유도 제어기와 미소 감쇄 시스템

외란 관측기 기반 2 자유도 제어기는 그림 1과 같은 형태로 나타나게 된다[1]. 그림 1의 등가 모델인 그림 2를 살펴보면 외란 관측기 구조에 대해서 더 명확히 관찰할 수 있다. 제어기의 설계 방법은 식 (1)-(2)와 같다. 플랜트를 전달 함수 형태로 나타낸다면 아래와 같다.

$$P(s) = \frac{(s+z_1) \cdots (s+z_m)}{s^k (s+p_1) \cdots (s+p_l)} \quad (1)$$

$p_i, z_j > 0, k+l=n > m, n-m=r$ 이다.

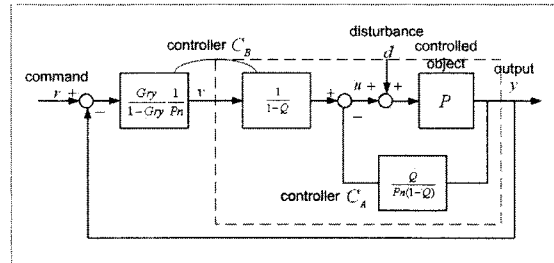
이 때,  $Q(s)$ 와  $G_{ry}(s)$ 는

$$G_{ry}(s) = \frac{1 + \sum_{k=1}^T c_k (\tau_k s)^k}{1 + \sum_{k=1}^V c_k (\tau_k s)^k}, \quad Q(s) = \frac{1 + \sum_{k=1}^L c_k (\tau_k s)^k}{1 + \sum_{k=1}^N c_k (\tau_k s)^k} \quad (2)$$

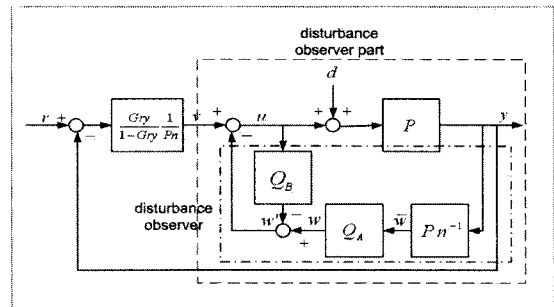
과 같이 설계하고,  $L \geq k-1 (L \geq 0), N-L \geq l+k-m, V-T \geq r$ 이다. 이 때  $\tau_k$ 의 값이 작은 저주파 통과 필터로  $Q(s)$ 를 설계한다면, 저주파에서  $|Q| \approx 1$ 이 된다. 외란 관측기 부분의 전달 함수를 살펴보면 식 (3)의 형태이기 때문에 저주파의 입력에 대해서 외란 관측기 부분이 공칭 모델의 형태로 근사화된다.

$$y(s) = \frac{PP_n}{P_n(1-Q)+PQ} v(s) + \frac{PP_n(1-Q)}{P_n(1-Q)+PQ} d(s) \approx P_n v(s) \quad (3)$$

$G_{ry}(s)$ 는 기준 입력 응답을 원하는 형태로 설계한다. 이 때 전체 시스템



〈그림 1〉 2 자유도 제어기



〈그림 2〉 2 자유도 제어기의 등가 모델

을 표현한다면 식 (4)과 같으므로 출력은 기준 입력에 설계한  $G_{ry}$ 의 영향으로 나타나게 된다.

$$y(s) \approx G_{ry}(s)r(s) + (1-Q(s))(1-G_{ry}(s))P_n(s)d(s) \approx G_{ry}(s)r(s) \quad (4)$$

외란 관측기 기반 제어기를 설계할 경우 저주파 통과 필터의 대역폭이 매우 커진다면 공칭 모델에 대해서 설계한 제어기에 대해서 안정성을 보장할 수 있다. 하지만 실제 시스템에 적용할 경우 잡음(noise)등의 효과에 의해서 대역폭의 한계가 존재한다.

두 개의 질량을 가진 미소 감쇄 시스템은 아래의 식 (5)-(6)과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (5)$$

이 때  $A, B, C$ 의 행렬은 아래와 같고, 상태 변수인  $x \in R^n$ , 제어 입력과 출력은  $u, y \in R^1$ ,  $J_1, J_2$ 는 각 질량의 관성(inertia) 계수,  $K$ 는 질량 사이의 탄성(spring) 계수,  $C_1, C_2$ 는 각 질량의 감쇄(damping) 계수이다. 그리고 이 시스템에서 감쇄 계수는 다른 계수들에 비해서 매우 작다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -K & -C_1 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K & 0 & -K & -C_2 \\ J_2 & 0 & -J_2 & -J_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ J_1 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad C = [1000]$$

미소 감쇄 시스템의 경우, 외란 관측기 기반 2 자유도 제어기를 설계 때 외란 관측기의 강인성에도 불구하고 미소 감쇄의 영향과 대역폭의 한계로 인해 파라미터가 불확실할 때 전체 시스템이 불안정하게 되는 경우가 존재한다. 식 (3)에서 살펴보았듯이 외란 관측기는 저주파 통과 필터의 대역폭이 크다면 외란 관측기 부분이 공칭 모델로 근사화되므로,  $Q$ 와  $G_{ry}$ 만이

아닌 공칭 모델도 설계 변수로 생각할 수 있다. 기존 공칭 모델에 크게 변화를 주지 않은 상태에서 더 좋은 특성을 가진 공칭 모델을 외란 관측기에 적용한다면 전체 시스템의 성능을 강화할 수 있다. 미소 감쇄 시스템은 보드 선도(bode plot)를 그려본다면 공진 주파수에서의 이득의 크기가 매우 큰 것을 알 수 있다. 이 때, 다른 계수들을 유지한 상태에서 감쇄를 크게 하여 보드 선도를 다시 그려본다면 공진 주파수에서의 이득의 크기가 줄어드는 것을 알 수 있다. 이런 경향을 고려하면 공칭 모델에 감쇄 주입법을 사용하는 것이 더 좋은 결과를 가져온다는 것을 알 수 있고, 이를 바탕으로 주파수 통과 필터의 대역폭을 유지하면서 전체 시스템의 강인성을 강화시키는 방법에 대한 이론적 해석 방법을 제시할 것이다.

### 2.1.2 불확실한 상수를 가진 전달 함수의 강인 제어 해석

정의 1

불확실한 방정식  $p(s, q) = a_0(q) + a_1(q)s + \dots + a_n(q)s^n$ 를 원소로 가진 방정식의 집합을  $P(s, Q) = \{p(s, q) | q \in Q\}$ 라 할 때, 계수  $a_0(q), \dots, a_n(q)$ 는 불확실한 실수 파라미터 벡터  $q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$ 에 대하여 실수 값을 가지고 연속이다. 그리고 각 파라미터  $q_i \in [q_i^-, q_i^+]$ 의 범위는 독립적이다.

정리 2(Zero Exclusion Theorem)

집합  $P(s, Q)$ 가 강인하게 안정하다는 것은 조건 1), 2)를 만족하다는 것과 필요충분조건이다[3].

- 1) 안정한 방정식  $p(s, q) \in P(s, Q)$ 가 존재한다.
- 2) 모든  $w \geq 0$ 에 대해서  $0 \notin P(jw, Q)$ 이다.

정의 3

$A := \{a_i \in [a_i^-, a_i^+], i = 0, 1, \dots, n\}$ 인 상자 형태의 범위에서 불확실한 상수 벡터  $a := [a_n \ \dots \ a_0]$ 를 계수로 가진 방정식  $p(s, a) = a_0 + \dots + a_n s^n$ 을 범위 방정식이라 한다. 방정식 집합인  $P(s, A) = \{p(s, a) | a \in A\}$ 는 범위 방정식을 원소로 가지고  $a_i$ 는 다른 파라미터로 이루어진 함수가 아니다.

정리 4

방정식 모임  $P(s, A) = \{p(s, a) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n | a \in A\}$ 이 안정하다는 것은 아래의 4개의 방정식이 안정하다는 것과 필요충분조건이다[3].

$$\begin{aligned} p^{++}(s) &= a_0^+ + a_1^+ s + a_2^- s^2 + a_3^- s^3 + \dots \\ p^{+-}(s) &= a_0^+ + a_1^+ s + a_2^+ s^2 + a_3^+ s^3 + \dots \\ p^{-+}(s) &= a_0^- + a_1^- s + a_2^+ s^2 + a_3^- s^3 + \dots \\ p^{--}(s) &= a_0^- + a_1^- s + a_2^- s^2 + a_3^+ s^3 + \dots \end{aligned}$$

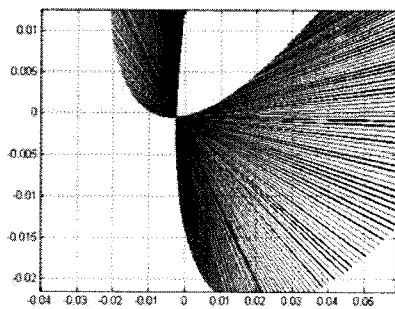
정리 5

다중선형(multilinear)한 함수로 이루어진 계수를 가진 방정식의 값 집합(value set)인  $P(jw, Q)$ 의 최소 볼록 집합(convex hull)은  $Q$ 의 꼭지점(vertex)으로 이루어진 상(image)들의 최소 볼록 집합이다. 이 때, 다중선형 함수란  $q_1, q_2, q_3$  등의 함수 형태를 계수로 가진 함수를 이야기한다[3].

위의 정리 4,5를 이용하면 다중선형 함수로 계수를 가진 방정식에서 불확실한 벡터  $q$ 의 범위에 대해 안정성을 해석할 때, 정리 2를 적용한 결과가 안정성에 대한 충분조건을 제시해 준다는 것을 알 수 있다. 그리고 그 결과를 그래프의 형태로 살펴 볼 수 있다.

### 2.2 감쇄 주입법 적용에 대한 안정성 해석과 실험 결과

공칭 모델에 대하여 실제 시스템의 계수  $J_1$ 는  $\pm 5\%$ 내의 오차를 가지고 있고,  $J_2$ 는  $\pm 10\%$ 의 오차를 가지고 있다고 할 때, 2 자유도 제어기에 시스템 식별에 의해서 구해진 감쇄에 임의의 감쇄를 더한 경우에 대해서 제로 익스클루전 정리를 사용하여 안정도를 판별한 결과는 아래의 그림 3과 같다. 그림을 관찰해 보면  $P(jw, Q)$ 의 최소 볼록 집합들이 원점을 포함하지

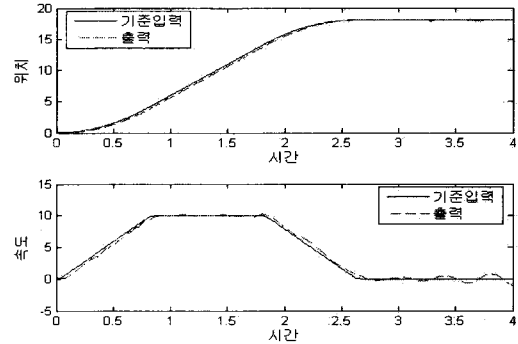


$$\tau_q = 0.01, \tau_\sigma = 0.025$$

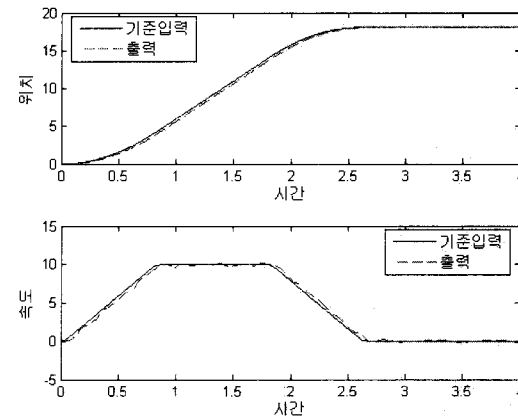
<그림 3> 공칭 모델의  $C_1$ 의 값을 실제의 값보다 크게 한 경우

않고 있으므로 불확실한 계수들에 대하여 전체 시스템이 안정함을 알 수 있다.

위의 안정성 해석을 바탕으로 질량  $J_1$ 의 값이 공칭 모델 값의 80%인 경우, 실제 시스템에 감쇄 주입법을 사용한 대한 실험을 적용해 보았다. 질량  $J_1$ 의 위치를 출력으로 하고, 위치와 속도에 대해 살펴보면 그림 4-5와 같다. 그림 4는 시스템 식별에 의한 감쇄  $C_1$ 를 사용했고 그림 5는 시스템 식별에 의한 감쇄의 10배가 되는 값을 공칭 모델에 적용한 경우이다. 이 때 그림 4는 기준 입력에 대해서 출력이 발산하고 있지만 그림 5의 경우에는 안정하다는 것을 알 수 있다.



<그림 4> 공칭 모델에 시스템 식별에 의한  $C_1$ 의 값을 사용한 경우의 출력



<그림 5> 공칭 모델에 시스템 식별에 의한  $C_1$ 의 값보다 10배를 크게 한 경우의 출력

### 3. 결 론

이 논문에서는 두 개의 질량을 가진 미소 감쇄 시스템에 대해서 계수에 불확실성이 존재할 경우 외란 관측기 기반 추종 제어기의 강인성을 높이기 위한 감쇄 주입법을 제시하였고, 그에 대한 이론적인 안정성 증명과 실험을 수행하였다. 실험에 의한 그림 4-5에서 알 수 있듯이 감쇄 주입법을 사용하는 것이 계수 불확실성에 대해 강인성을 강화할 수 있다는 것을 알 수 있다. 외란 관측기를 사용할 경우 외란 관측기 부분이 공칭 모델로 근사화될 수 있다는 점을 이용해 공칭 모델을 더 좋은 특성을 가진 공칭 모델로 대체하는 방법에 대해서는 앞으로 이론적인 증명 작업이 더 필요할 것이다.

### [참 고 문 헌]

- [1] T. Umeno, Y. Hori, "Robust Servosystem Design with Two Degrees of Freedom and its Application to Novel Motion Control", IEEE Trans. on Industrial Electronics, Vol. 40, No. 5, pp. 473-485, 1993.
- [2] H. Shim, Y. Joo, "State Space Analysis of Disturbance Observer and a Robust Stability Condition", IEEE Conference on Decision and Control, pp. 2193-2198, 2007.
- [3] J. Ackermann, "Robust Control", Springer-Verlag, 1993.
- [4] J. Back, H. Shim, "Analysis and Synthesis of Disturbance Observer as a Tool for Nonlinear Robust Control", IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, pp. 79-86, 2007.
- [5] Y. Hori, "Robust Motion Control based on a Two-Degrees-Of-Freedom Servosystem", Advanced Robotics, Vol. 8, No. 8, pp. 655-664, 1993.