

전자기 전달관계를 이용한 원통형 직선 왕복구동 액추에이터의 전자기 특성 해석 및 실험

장석명<sup>1</sup>, 김현규<sup>1</sup>, 최장영<sup>1</sup>, 이성호<sup>2</sup>  
<sup>1</sup>충남대학교 <sup>2</sup>생산기술연구원

Electromagnetic Field Analysis and Measurements of Cylindrical Linear Oscillatory Actuator using Transfer Relations Theorem

Seok-Myeong Jang<sup>1</sup>, Hyun-Kyu Kim<sup>1</sup>, Jang-Young Choi<sup>1</sup>, and Sung-Ho Lee<sup>2</sup>  
<sup>1</sup>Chungnam National University <sup>2</sup>Korea Institute of Industrial Technology

**Abstract** - This paper deals with the thrust calculations and the measurements of a cylindrical Linear Oscillatory Actuator (LOA) using Transfer Relations Theorem (TRT), namely, Melcher's methodology. Using transfer relations derived in terms of a magnetic vector potential and a two-dimensional (2-d) cylindrical coordinate system, this paper derives analytical solutions for the magnetic vector potential, magnetic fields due to Permanent Magnets (PMs) and stator winding currents and the thrust. The analytical results are validated by non-linear Finite Element (FE) analyses. In particular, test results such as thrust and back-emf measurements are given to confirm the analysis.

1. 서 론

필드 해석의 정확한 계산은 직선형 전기 기기(LEMs)의 설계를 위해 필수적이라 잘 알려져 있다. 강력한 소프트웨어의 정확성으로 필드 분포의 수많은 해석은 일반적인 관계가 되었다. 그러나 유한요소법과 같은 수치 해석 기술들은 포화 상태에서 기인된 필드 분포를 결정하는 정확한 방법을 제공하나 기기 운전에서 설계 파라미터의 영향을 검토하기 위해 고안된 경우에는 많은 시간을 허비하게 된다. 이와 대조적으로 해석 기법은 몇 개의 가정과 해석상의 문제에 의해 기인된 포화를 해석에 고려하지 않아서 정확한 해석을 제공하지 않는다. 그러나 설계 파라미터에 의한 기기의 성능은 필드 해석을 사용하여 급속도로 발전해 왔다.

많은 해석 기법들은 직선형 전자기 기기에서 필드 분포를 예상하기 위해 연구 되었다. D.L. Trumper는 Melcher 교수에 의해 고안된 전자기 전달관계이론(TRT)을 이용하여 평판 선형 기기의 해석과 설계를 다루었다.[1] 전자기 전달관계이론의 유도는 그림 1에서 보이는 Halbach 배열 영구자석 회전자와 단상 slotless 고정자인 원통형 LOA에 쉽게 적용할 수 있다. 본 논문은 자기 벡터 포텐셜과 2차원 원통형 좌표계에 의해 고안된 전달관계를 사용하여 원통형 LOA의 추력과 역기전력을 도출하였다. 특히, 역기전력과 추력 실험은 해석 결과와 잘 일치함을 보여주었다.

2. LOA의 구조 및 해석 모델

그림 2는 그림 1에서 본 원통형 LOA의 단순화된 해석적 모델이다. 영구자석영역은 벡터  $-z_0 i_z$ 의 해 기본 좌표 형태를 대치한 좌표를 수행한다. 여기서  $z_0$ 는 고정자와 관련된 영구자석의 측면 변위이다. 문자 (a)-(h)는 그림 2의 표시되어진 경계에서 표면을 나타내고 문자  $\delta - \beta$ 는 경계면의 외반경과 내반경을 표시한다. 자석 배열은 반경 방향과 축방향 자기 벡터 포텐셜 성분으로 푸

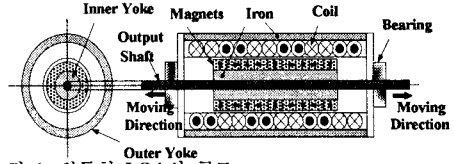


그림 1. 원통형 LOA의 구조

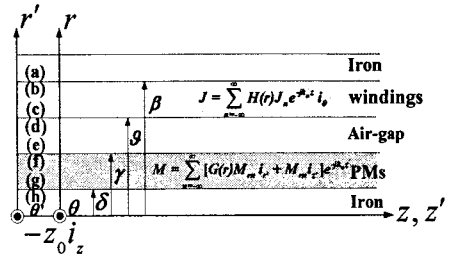


그림 2. 단순화된 해석적 모델

리에 급수에 의해 나타난다. 이 푸리에 급수는 전류밀도 ( $J$ )에도 적용된다. 액추에이터의 극간격  $\tau$ ,  $n$ 차 공간 고조파 차수  $k_n = n\pi/\tau$ 이다. 특히 그림 2에서 함수  $G(r)$ 과  $H(r)$ 는 영구자석 자화( $M$ )와 전류밀도( $J$ )의 정확한 모델링을 위해 [2]에서 소개 되어 있다.

3. 원통형 LOA의 해석

3.1 전달관계

그림 2의 모델에서 정의된 표면에서 계와 관련한 전달 관계이론은 [1]에 의해 개발되어졌다. 각 영역의 전자기 전달관계식은 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} B_{zn}^f \\ B_{zn}^g \end{bmatrix} = -k_n^2 \begin{bmatrix} F_0(\delta, \gamma) & G_0(\gamma, \delta) \\ G_0(\delta, \gamma) & F_0(\gamma, \delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\theta n}^f \\ A_{\theta n}^g \end{bmatrix} - j\mu_0 k_n M_m \begin{bmatrix} F_0(\delta, \gamma) + G_0(\gamma, \delta) \\ G_0(\delta, \gamma) + F_0(\gamma, \delta) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} B_{zn}^d \\ B_{zn}^e \end{bmatrix} = -k_n^2 \begin{bmatrix} F_0(\gamma, \beta) & G_0(\beta, \gamma) \\ G_0(\gamma, \beta) & F_0(\beta, \gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\theta n}^d \\ A_{\theta n}^e \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} B_{zn}^b \\ B_{zn}^c \end{bmatrix} = -k_n^2 \begin{bmatrix} F_0(\beta, \beta) & G_0(\beta, \beta) \\ G_0(\beta, \beta) & F_0(\beta, \beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\theta n}^b \\ A_{\theta n}^c \end{bmatrix} + \mu_0 J_n \begin{bmatrix} F_0(\beta, \beta) + G_0(\beta, \beta) \\ G_0(\beta, \beta) + F_0(\beta, \beta) \end{bmatrix} \quad (3)$$

파라미터  $F_0 = (x, y)$ 와  $G_0 = (x, y)$ 는 식(4)으로 정의된다.

$$F_0(x, y) = -\frac{I_1(k_n x)K_0(k_n y) + K_1(k_n x)I_0(k_n y)}{k_n \{I_1(k_n y)K_1(k_n x) - K_1(k_n y)I_1(k_n x)\}} \quad (4)$$

$$G_0(x, y) = -1/\left[k_n^2 \{I_1(k_n y)K_1(k_n x) - K_1(k_n y)I_1(k_n x)\}\right]$$

여기서  $I_0$ 와  $K_0, I_1$ 와  $K_1$ 는 수정된 베셀 1,2종 방정식이다. 식(2),(3),(4)는 영구자석, 공극, 고정자 권선 영역에서의 전자기 전달관계식이다.  $M_m$ 과  $J_n$ 을 포함한 항은 자석과 전류영역에서의 에너지원을 나타낸다. 식(2)에서 나타나지 않은 Halbach 배열의 축방향 자화는 경계조건에서 고려되어진다.

### 3.2 영구자석 및 코일의 지계 분포 해석

권선영역의 비투자율이 1이라는 가정 하에 권선영역은 공극영역에 포함된다. 반면에 그림 3(a)에서 본 Halbach 배열은 Ampere법칙을 적용하여 그림 3(b)처럼 등가 전류 모델로 표현되어진다. Halbach 자화의 축방향 성분을 위해 등가 전류는 영구자석의 상하 표면에 존재하므로 경계조건에서 고려되어진다. 결과적으로 경계조건은 영구자석에 의해 자화 벡터를 유도할 수 있다.

i) 고정자 철심과 회전자 축의 투자율이 무한하다는 가정하에  $B_{zn}^b = 0$ 이고  $B_{zn}^h = 0$ 이다.

ii) Halbach 배열을 위해 축방향 자화의 등가 전류가 영구자석의 상하 표면에 존재하기 때문에

$$B_{zn}^e - B_{zn}^f = \mu_0 M_{zn} \quad \text{과} \quad B_{zn}^g - B_{zn}^h = -\mu_0 M_{zn} \quad \text{이다.}$$

iii) 각 경계에서 자화 벡터의 연속성에 의해  $A_{\theta n}^e = A_{\theta n}^f$ 와  $A_{\theta n}^g = A_{\theta n}^h$ 이다.

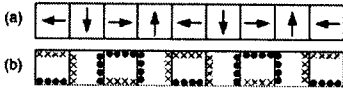


그림 3. (a) Halbach 자석 배열 (b) 등가 전류 모델

경계 조건 ii)와 iii)에 의해 식(1)은 식(5)과 같다.

$$\begin{bmatrix} B_m^e \\ B_m^f \end{bmatrix} = -k_n^2 \begin{bmatrix} F_0(\delta, \gamma) & G_0(\gamma, \delta) \\ G_0(\delta, \gamma) & F_0(\gamma, \delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\theta n}^e \\ A_{\theta n}^f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

여기서  $N_1$ 과  $N_2$ 는 다음과 같다.

$$N_1 = -\mu_0 \{jk_n M_m \{F_0(\delta, \gamma) + G_0(\gamma, \delta)\} - M_m\} \quad (6.a)$$

$$N_2 = -\mu_0 \{jk_n M_m \{G_0(\delta, \gamma) + F_0(\gamma, \delta)\} - M_m\} \quad (6.b)$$

또한, 공극영역이 권선영역에 포함되므로 공극영역의 전자기 전달관계식은 식(7)로 주어진다.

$$\begin{bmatrix} B_m^g \\ B_m^h \end{bmatrix} = -k_n^2 \begin{bmatrix} F_0(\gamma, \beta) & G_0(\beta, \gamma) \\ G_0(\gamma, \beta) & F_0(\beta, \gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\theta n}^g \\ A_{\theta n}^h \end{bmatrix} \quad (7)$$

식(7)에 경계 조건  $B_{zn}^b = 0$ 을 대입하면 식(8)과 같다.

$$A_{\theta n}^b = -\frac{G_0(\beta, \gamma)}{F_0(\gamma, \beta)} A_{\theta n}^e \quad (8)$$

식(7)에 식(8)을 대입하면 식(9)과 같이 표현된다.

$$B_m^e = k_n^2 \left\{ \frac{G_0(\beta, \gamma)G_0(\gamma, \beta)}{F_0(\gamma, \beta)} - F_0(\beta, \gamma) \right\} A_{\theta n}^e = P_1 A_{\theta n}^e \quad (9)$$

식(5)에 경계조건  $B_{zn}^h = 0$ 을 대입하면 식(10)과 같다.

$$A_{\theta n}^h = \frac{1}{F_0(\gamma, \delta)} \left\{ \frac{N_2}{k_n^2} - G_0(\delta, \gamma) A_{\theta n}^g \right\} \quad (10)$$

식(5)에 식(9),(10)을 대입하면 영구자석에 기인된 경계면(e)에서의 자기 벡터 포텐셜을 유도할 수 있다. 다시 말해  $A_{\theta n}^{e(PM)}$ 는 식(11)과 같이 표현된다.

$$A_{\theta n}^{e(PM)} = \frac{N_1 F_0(\gamma, \delta) - N_2 G_0(\gamma, \delta)}{P_1 F_0(\gamma, \delta) + k_n^2 \{F_0(\delta, \gamma)F_0(\gamma, \delta) - G_0(\delta, \gamma)G_0(\gamma, \delta)\}} \quad (11)$$

영구자석과 유사한 방법으로 고정자 전류에서의 전자기 전달관계식을 유도할 수 있다. 경계조건  $B_{zn}^c - B_{zn}^d = 0$ ,  $B_{zn}^e - B_{zn}^f = 0$ ,  $A_{\theta n}^c = A_{\theta n}^d$ ,  $A_{\theta n}^e = A_{\theta n}^f$ 에 의해 식(4)은 식(12)로 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} B_m^c \\ B_m^d \end{bmatrix} = -k_n^2 \begin{bmatrix} F_0(\vartheta, \beta) & G_0(\beta, \vartheta) \\ G_0(\vartheta, \beta) & F_0(\beta, \vartheta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\theta n}^c \\ A_{\theta n}^d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

여기서  $J_1$ 과  $J_2$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \mu_0 J_n \begin{bmatrix} F_0(\vartheta, \beta) + G_0(\beta, \vartheta) \\ G_0(\vartheta, \beta) + F_0(\beta, \vartheta) \end{bmatrix}$$

영구자석영역은 비투자율이 1이라는 가정 하에서 공극영역에서의 전자기 전달관계식은 식(13)으로 주어진다.

$$\begin{bmatrix} B_m^d \\ B_m^e \end{bmatrix} = -k_n^2 \begin{bmatrix} F_0(\delta, \vartheta) & G_0(\vartheta, \delta) \\ G_0(\delta, \vartheta) & F_0(\vartheta, \delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\theta n}^d \\ A_{\theta n}^e \end{bmatrix} \quad (13)$$

식(12)과 (13)에 경계조건  $B_{zn}^c = 0$ 와  $B_{zn}^e = 0$ 을 대입하면 고정자 전류에 의해 경계면(d)에서 자기 벡터 포텐셜을 유도할 수 있다. 다시 말해  $A_{\theta n}^d$ 는 식(14)과 같이 표현된다.

$$A_{\theta n}^d = \frac{-G_0(\vartheta, \beta)J_1 + J_2 F_0(\vartheta, \beta)}{F_0(\vartheta, \beta)\{P_2 + P_3\}} \quad (14)$$

여기서 계수  $P_1$ 과  $P_2$  식(15)과 같이 주어진다.

$$P_2 = -k_n^2 \left\{ F_0(\delta, \vartheta) - \frac{G_0(\vartheta, \delta)G_0(\delta, \vartheta)}{F_0(\vartheta, \delta)} \right\} \quad (15.a)$$

$$P_3 = k_n^2 \left\{ F_0(\beta, \vartheta) - \frac{G_0(\vartheta, \beta)G_0(\beta, \vartheta)}{F_0(\beta, \vartheta)} \right\} \quad (15.b)$$

본 논문은 원통형 LOA의 추력 계산을 위해 맥스웰 응력법(Maxwell's Stress Tensor)을 도입하기 때문에 경계면(e)에서의 영구자석과 고정자 전류에 의해 발생하는 자계의 합을 구해야 한다. 그러므로 경계면(e)에서의 고정자 전류에 의한 자기 벡터 포텐셜을 구하기 위해서 식(13)은 식(16)과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} B_m^d \\ B_m^e \end{bmatrix} = -k_n^2 \begin{bmatrix} F_0(R_c, \vartheta) & G_0(\vartheta, R_c) \\ G_0(R_c, \vartheta) & F_0(\vartheta, R_c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\theta n}^d \\ A_{\theta n}^e \end{bmatrix} \quad (16)$$

여기서  $R_c$ 는  $\delta \leq R_c \leq \vartheta$  범위에서 임의의 경계를 나타낸다. 그리고 경계면(e)에서의 자기 벡터 포텐셜은 식(17)과 같이 표현된다.

$$A_{\theta n}^{e(coil)} = \frac{-1}{G_0(\vartheta, \gamma)} \left\{ \frac{P_2}{k_n^2} + F_0(\gamma, \vartheta) \right\} A_{\theta n}^d \quad (17)$$

경계면(e)에서 고정자 전류에 의한 축방향 자속밀도는 식(16),(17)로부터 식(18)로 얻어진다.

$$B_m^{e(coil)} = -k_n^2 \left[ G_0(\gamma, \vartheta) - \frac{F_0(\vartheta, \gamma)}{G_0(\vartheta, \gamma)} \left\{ \frac{P_2}{k_n^2} + F_0(\gamma, \vartheta) \right\} \right] A_{\theta n}^d \quad (18)$$

마지막으로 경계면(e)에서 반경방향 자속밀도의 합성은 벡터 자위 정의( $B = \nabla \times A$ )로부터 식(19)과 같이 얻을 수 있다.

$$B_m^e = jk_n \left( A_{\theta n}^{e(PM)} + A_{\theta n}^{e(coil)} e^{jk_n z_0} \right) \quad (19)$$

경계면(e)에서 축방향 자속밀도의 합성은 식(9),(18)로부터 식(20)과 같이 얻어진다.

$$B_m^e = B_m^{e(PM)} + B_m^{e(coil)} e^{jk_n z_0} \quad (20)$$

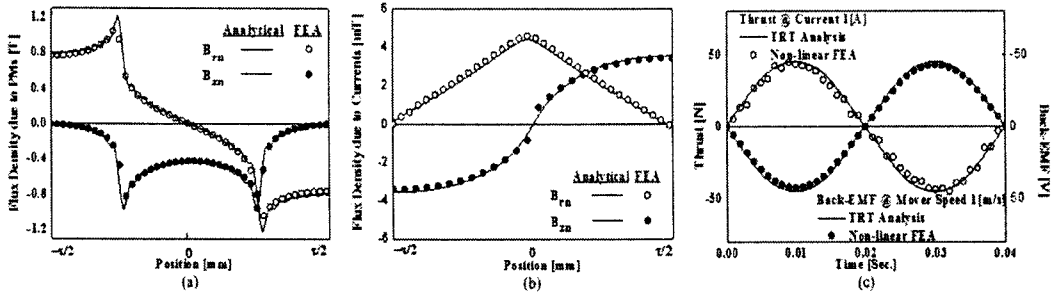


그림 4. (a) 경계면 (e)에서 자속밀도, (b) 경계면 (g)에서 자속밀도, (c) LOA의 추력과 역기전력

### 3.3 추력과 역기전력 특성식

영구자석과 권선전류 사이에 상호 작용에 의해 영구자석에서 추력의 발생은 맥스웰 응력법에 의해 고안 되었다.[3] 영구자석 가동자에 작용하는 추력을 계산할 수 있으며 응력  $T_{ij}$ 는 식(21)로 표현된다.

$$T_{ij} = \mu H_i H_j - \delta_{ij} \mu H_k H_k / 2 \quad (21)$$

Kronecker delta  $\delta_{ij}$ 는  $i=j$  때는 1이고  $i \neq j$  때는 0이다. 힘이 작용하는 면적( $S$ )에 대하여 식(22)을 면적 적분하여 영구자석 영역에 작용하는 힘  $F_z$ 를 계산할 수 있다.

$$F_z = -S \langle T_{rz}^e \rangle_z = -S \mu_0 \langle H_r^e H_z^e \rangle_z = -S \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{rn}^e \cdot (B_{zn}^e)^* \quad (22)$$

페르포 된 영구자석 위 표면(경계면 e) 면적은  $S=2prw$ 이다.  $p$ 는 가동자의 극쌍수이고  $w$ 는  $2\pi\gamma$ 에 의해 주어진다. 기호 \*는 켈레복소수를 의미한다. 반면에 추력상수 ( $K_T$ )는  $F_z=K_T i$ 에 의해 계산된다. 여기서  $i$ 는 상전류이다. 또한 역기전력상수( $K_E$ )는  $e_b = v K_E$ 에 의해 계산된다.  $v$  가동자 속도이다. 일반적으로 LOA의 고정자가 단상권선을 가지고 있을 때는 추력상수는 역기전력상수와 동일하게 하기 때문에 우리는 추력상수[4]로부터 역기전력상수를 예상할 수 있다. 결과적으로 추력을 유도하기 위한 한 번의 해석 결과를 유도함으로써 Bessel 방정식 때문에 문제가 되는 영구자석 부분에서 적분계산없이 역기전력을 쉽게 도출할 수 있다.

### 4. 유한요소법을 이용한 해석결과와 비교

이 장은 영구자석, 고정자 전류, 추력, 역기전력에 기인하는 자속밀도의 비선형 유한요소법을 이용하여 해석결과와 비교하여 설명할 수 있다. 비선형 유한요소법에 의해 제작된 원통형 LOA의 치수는 다음과 같다. 고정자의 극간격은 20mm, 내반경 30mm, 외반경 35mm, 정격 전류는 20A이다. 가동자의 내반경 20mm, 외반경 30mm, 극쌍수 9/4. 잔류 자속밀도 1.23 T, 자석 길이 10mm이다. 그림 4은 영구자석, 고정자 전류, 추력, 역기전력에 의해 추방향 및 반경방향 밀도의 비선형 유한요소법과의 해석결과를 비교한 것을 보여준다. 비록 전자기 전달관계 해석이 선형 해석을 근간을 두지만 고정자 요크와 회전자 축에서 사용된 자석 물질이 포화되지 않게 설계되었기 때문에 모든 해석 결과들은 비선형 유한요소법으로 얻어진 결과들과 잘 일치한다.

### 5. 전자기 특성의 실험 결과

그림 5(a)처럼 가동자 위치에 의한 추력 측정은 볼트 조정에 의해 이루어졌다. 그림 5(b)에서 우리는 발전기와 모터로 운전된 원통형 LOA를 제작함으로써 역기전력을 발전기로서 운전된 LOA에 의해 측정했다. 그림 6은 가동자의 속도에 의한 부하전류와 역기전력을 통해 측정된 결과들과 비선형 유한요소법을 비교하여 보여준다. 추력과 역기전력의 해석결과들은 비선형 유한요소법과 측정으로부터 얻어진 결과들과 잘 일치함을 보여준다. 추력은 가동자의 최대인 위치에서 측정되고 가동자의 속도는 위

치센서에 의해 측정된 주기와 드라이버의 운전 주파수로부터 얻을 수 있다.

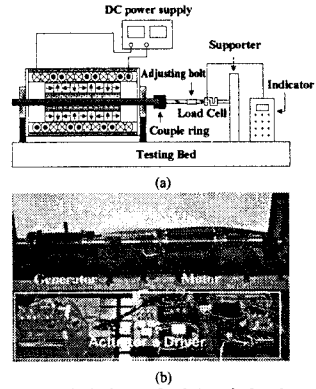


그림 5. 추력(a)과 역기전력(b) 측정을 위한 테스트 기구

### 6. 결론

영구자석을 포함하고 있는 원통형 LOA의 전자기 해석은 계속 개발되어 왔다. 모터의 각 영역, 추력, 역기전력의 해석 표현은 주어졌다. 추력과 역기전력 측정과 같은 테스트 결과는 또한 주어졌다. 해석으로부터 얻어진 값들이 측정된 결과들과 잘 일치함은 전자기 전달이론 해석의 타당성을 검증하였다. 그러므로 해석적인 틀은 영구자석을 가지고 있는 원통형 LOA의 다양한 기능적 모델을 위해 추력 상수와 역기전력 상수와 같은 제어 파라미터의 판단과 초기 설계를 예측하는데 유용할 것이다.

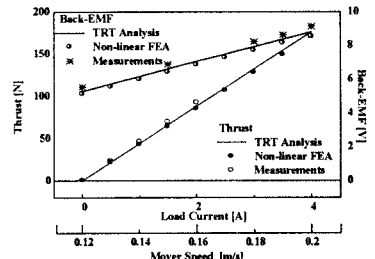


그림 6. 가동자의 속도에 의한 부하전류와 역기전력을 통해 측정된 결과들과 비선형 유한요소법과의 비교

### [참고 문헌]

- [1] David L. Trumper, Won-jong Kim, and Mark E. Williams, "Design and Analysis Framework for Linear Permanent-Magnet Machines", *IEEE Trans. IAS*, vol.32, pp.371-379, 1996.
- [2] Nicola Bianchi, "Analytical Field Computation of a Tubular Permanent-Magnet Linear Motor", *IEEE Trans. Magn.*, vol.36, pp. 3798-2801, 2000.
- [3] J. R. Melcher, *Continuum Electromechanics*. Cambridge, MA: MIT Press, 1981.
- [4] J. R. Hendershot and TJE Miller, "Design of Brushless Permanent Magnet Motors", Magna Physics Publishing and Clarendon Press, 1994.