

전기기기에 대한 시간차분해석의 오차보정에 관한연구

유병훈, 김병택

국립군산대학교 공과대학 전자정보공학부

Study on the error correction for the time-step FEA in electric machine

Byoung Hun Yu, Byung Taek Kim

College of Engineering of School of Electronic & Information Eng. Kunsan National University

Abstract -This paper proposes a method correcting the error which is created inherently by time-step approximation in FEA. For a simple RL linear circuit, the error in time-step analysis is analytically investigated and the correction method is proposed. Then for a practical inductor model, non-linear time-step analysis is performed and the calculation result is corrected by the proposed method. The accuracy of the corrected result is confirmed by comparing the electric input and output power.

1. 서 론

최근 많은 전기기기의 특성해석을 위해 시간차분유한요소법을 이용하고 있으며, 특히 비선형시스템에 대해 시간차분 유한요소법은 정확한 해를 얻는데 있어 매우 유용한 도구임에 틀림없다. 그러나 전자장 시간차분유한요소법은, 시, 공간에 대한 미분방정식의 형태로 표현되는 전자기현상을 선형 대수방정식으로 근사한 방법이므로 해석결과에 오차가 반드시 존재한다. 이 같은 오차는 의외로 쉽게 발견된다. 예를 들면 기기의 전압원 해석에서 입력전력 및 역률, 효율 등의 기기특성을 분석하기 위해 전력계산을 하게 된다. 이 때, 입력 전압과 전류의 곱으로 계산된 입력전력과 출력방정식으로부터 산정한 총 출력과 총 손실의 합이 서로 다르게 되는 논리적 오류가 항상 발생하여 특성계산을 혼란스럽게 한다.

이 같은 시간차분 해석결과와 부정확성은 공간미분과 시간미분의 근사에 의한 오차가 그 원인을 제공한다. 본 논문에서는 이 중 시간차분에 의한 오차, 특히 정상상태에서의 오차를 집중적으로 분석하며, 실제 기기의 해석에서 이 오차를 보정함으로써 좀 더 정확한 해를 얻는 방법을 제시한다. 먼저 진해를 알 수 있는 간단한 RL 선형회로를 대상으로 시간차분 방법으로 얻어지는 정상상태 해를 해석적 방법으로 구하고, 진해와 비교하여 오차의 형태를 분석한다. 또한, 반대로 시간차분에 의해 얻은 근사 해로부터 진해를 추정할 수 있음을 증명한다.

실제 대부분의 시스템은 비선형성을 갖고 있으며, 시간차분해석을 하는 근본적 이유도 사실 비선형성을 고려하기 위함이다. 따라서 선형시스템에서 도출된 보정방법을 비선형시스템에 적용하기 위한 방법을 제시한다. 단 비선형시스템의 경우, 제안된 보정방법에 의해 차분해석결과를 진해로 보정할 수는 없다. 그러나 시간차분간격과 무관하게 좀 더 정확한 근사해로 접근시킬 수 있음을 먼저 밝힌다. 적용사례로 간단한 C코어형태를 갖는 인덕터를 대상으로 비선형성을 고려하여 다양한 차분간격에 대해 시간차분해석을 진행한다. 제안된 보정방법을 이용하여 차분해석결과를 진해로 근접한 근사 해를 얻을 수 있으며, 입력 전력이 서로 일치함을 증명함으로써 논문의 타당성과 유용성을 제시한다.

2. 선형회로에서의 오차 분석

2.1 RL회로와 RLC회로의 이론해

그림1은 해석의 예를 들기 위해 주어진 간단한 RL회로이며, 회로의 각 parameter는 $V_{rms}=220[V]$, $f=60[Hz]$, $R=20[\Omega]$, $XL=j200[\Omega]$ 이다. 많은 전기기기 시스템이 저항보다는 유도성 리액턴스가 매우 큰 것을 고려하여, RL 회로의 저항과 유도성 리액턴스의 비율 1:10으로 하였다. RL회로의 실효전류 I_{rms} 와 평균 입력전력 P_{in} 과 회로의 저항에서 발생하는 평균 출력전력 P_{out} 을 식(1)-(3)를 사용하여 표1과 같이 얻을 수 있다. 평균입력전력 P_{in} 과 평균출력전력 P_{out} 은 이론상 동일함을 알 수 있으며, 표1에서도 나타내 주고 있다.

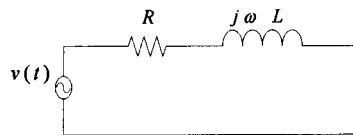


그림1. RL회로
fig1. RL circuit

회로에 주어진 parameter로부터 RL회로의 실효전류 I_{rms} 와 평균 입력전력 P_{in} 과 평균 출력전력 P_{out} 을 식(1)-(3)를 사용하여 표1과 같이 얻을 수 있다.

$$I_{rms} = \frac{V_{rms}}{|R + j\omega L|} \tag{1}$$

$$P_{in} = V_{rms} \cdot I_{rms} \cdot \cos\theta \tag{2}$$

$$P_{out} = I_{rms}^2 \cdot R \tag{3}$$

표1 RL회로의 진해

	RL회로
I_{rms} [A]	21.89
P_{in} [W]	479.21
P_{out} [W]	

2.2 RL회로에서의 시간차분해석

RL회로의 전압에 대한 시간차분방정식은 식(4)와 같고, 이를 정리하여 전류에 대한 전류방정식으로 표현하면 식(5)과 같다. 식(2)와 식(3)의 평균입력전력과 평균출력전력의 방정식을 차분방정식 형태로 나타내면 식(6)과 식(7)을 따른다. 해석을 위한 step size는 1/(25f)과 1/(50f) 그리고 1/(100f)에 대하여 각각 계산했으며 각 step size에 해당하는 시간차분해석결과를 표2에 나타내었다.

$$v(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} \tag{4}$$

$$i(t + \Delta t) = \frac{\Delta t \cdot v(t + \Delta t) + L \cdot i(t)}{\Delta t \cdot R + L} \tag{5}$$

$$P_m = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-\Delta t} v(t) \cdot i(t) \Delta t \quad (6)$$

$$P_{out} = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-\Delta t} i^2(t) \cdot R \Delta t \quad (7)$$

표2 RL회로의 step size에 따른 시간차분해석결과

step size	1/(25f)	1/(50f)	1/(100f)
I_{rms} [A]	21.68	21.77	21.83
P_{in} [W]	1057.6	771.34	626.03
P_{out} [W]	481.94	480.09	479.52

표2의 RL회로의 해석결과는 차분간격에 따라 입력전력의 변화가 매우 심하지만, 입력전류의 크기는 큰 변화가 없으며, 따라서 출력전력의 변화도 작은 편이다. 이로부터 RL회로는 서론에서 언급된 출력으로부터 입력을 역산하는 것이 비교적 정확하다고 추론할 수 있다. 이와 같이 이론적으로 동일해야 하는 입, 출력 전력의 차이가 매우 크게 발생한다는 것이다. 물론 회로의 차분간격이 작으면 작을수록 입력전력과 출력전력이 비슷해진다. 그러나 이 같은 논리적 모순을 극복하기 위해서는 차분간격이 엄청나게 작은 수준이어야 함을 의미하며, 따라서 유한요소해석과 같이 기본적인 계산량이 많은 경우, 시간차분해석을 통한다면 엄청난 계산시간을 필요로 한다는 문제가 발생한다.

오차 발생의 원인을 다음과 같이 분석하였다. RL회로의 전류에 대한 시간차분방정식에서 전류가 정상상태에 진입하면 주기함수가 된다고 볼 수 있으므로 시간차분방정식의 전류 $i(t)$ 를 $I_m \sin(\omega t + a)$ 라 놓을 수 있다. 식(5)의 $I(t)$ 에 $I_m \sin(\omega t + a)$ 를 대입하고 방정식을 풀면 $I_m \sin(\omega t + a)$ 는 식(8)과 같이 정리된다. 여기서 전류의 크기 I_m 과 위상각 a 는 식(9)와 식(10)으로 표현되며 L , V , Δt 의 함수이다.

$$I_m \sin(\omega t + \alpha) = \frac{\Delta t}{X_0} \cdot V_m \sin(\omega t - \gamma_0) \quad (8)$$

$$I_m = \frac{\Delta t}{X_0} \cdot V_m \quad (9)$$

$$\alpha = -\tan^{-1} \frac{L \cdot \sin(\omega \Delta t)}{R \cdot \Delta t + L \cdot \cos(\omega \Delta t)} \quad (10)$$

식(8)을 이용하여 RL회로에 대해 임의의 차분간격, 인덕턴스, 전압 및 주파수에 대해 근사 전류를 예측할 수 있으며, 또한 진해는 phasor 법으로 구할 수 있으므로, 그림 2에 다양한 step size에 대해 근사 전류의 크기와 위상을 진해와 비교하였다. 그림2로부터 RL회로의 리액턴스 대 저항의 비가 클수록 전류의 크기는 진해와 거의 비슷해지는 것을 알 수 있지만, 반대로 위상의 차이는 크게 발생하는 것을 알 수 있다. 이는 그림 1의 회로에서 출력전력이 차분간격에 대해 둔감하지만, 입력전력의 변화가 심한 이유는 전류의 위상변화 때문임을 쉽게 알 수 있다.

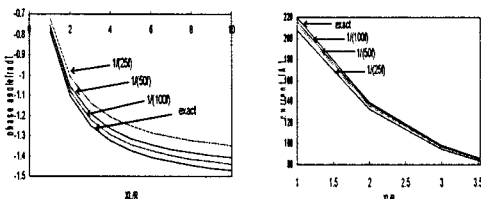


그림2. 정상상태에서 RL회로의 step size에 따른 위상과 전류
fig2.Phase and current by step size of RL circuit in stationary state.

2.3 RL회로의 정상상태에서 오차보정

전기기기를 유한요소해석하는 주된 이유는 시스템의 인덕턴스를 알 수 없기 때문이다. 즉 RL 회로의 미지변수는 인덕턴스 L 이 된다. 이를 착안하면 시간차분해석결과로부터 시스템의 L 을 역산 할 수 있으며 인덕턴스 L 을 구해낼 수 있다면 진해는 물론 쉽게 얻어질 수 있다. 이에 대한 논리적 설명은 다음과 같다.

만일 시스템의 인덕턴스 L 을 알 수 없는 RL 회로에 대해 시간차분해석을 수행함으로써 정상상태에서의 근사 전류를 얻었다고 가정하자. 구해진 근사전류는 정상상태에 있으므로 전류의 크기와 위상을 알 수 있으며 따라서 $I_m \sin(\omega t + a)$ 의 형태로 표현할 수 있다. 이 때, 식(10)을 L 에 대해서 이항정리하면 식(11)을 얻게 되며, L 은 결국 a 와 R , Δt , C (RLC회로의 경우) 및 f 의 함수로 표현되므로 차분해석으로부터 얻어진 a 를 이용하여 시스템의 정확한 L 을 얻어낼 수 있다. 표 1에 있는 결과의 a 와 RL회로의 시간차분결과인 식(8)로부터 구한 근사해와 식(10)으로부터 계산된 위상각 α 를 역산하여 구한 식(11)의 리액턴스 L 로부터 얻은 식(12)의 진해를 비교하여 발생한 오차만큼 보정하였고 표4에 나타내었다. RL회로에서 표2의 이론해와 표3의 시간차분해의 오차를 보정 과정을 통하여 산출된 보정치를 보정하였더니 step size에 무관하게 모두 이론해와 동일하게 보정이 되었다는 것을 표3를 통하여 알 수 있었다.

$$L = \frac{R \cdot \Delta t \cdot \tan(-\alpha)}{\sin(\omega \cdot \Delta t) - (1 - \cos(\omega \cdot \Delta t)) \cdot \tan(-\alpha)} \quad (11)$$

$$i(t) = \frac{V_m}{Z_{RL}} \sin(\omega t + \alpha'_{RL}) \quad (12)$$

표3. RL회로에서 진해와 보정해 비교

	진해	보정해
I_{rms} [A]	21.89	21.89
P_{in} [W]	479.21	479.21
P_{out} [W]		

3. 비선형 시스템에 대한 적용

2장에서 선형 RL 회로의 시간차분에 의한 정상상태 해에 존재하는 오차를 함수의 형태로 정확히 표현하고, 진해로 보정하는 방법을 제시하였다. 제시된 방법은 차분해석의 오차를 논리적으로 규명해낸 것에는 의미가 있을지 모르나, 이 방법을 실제 유한요소해석에 적용하는 것은 별 의미가 없다. 왜냐하면 시스템을 선형으로 가정할 때, 정상상태 해를 얻기 위한다면, 시간차분해석을 하는 것보다 복소수 근사, 즉 $j\omega$ 법을 이용한 유한요소법을 적용하는 것이 시간적으로나 해의 정밀도 측면에서 훨씬 유리하기 때문이다. 실제 전기기기를 시간차분유한요소법을 사용해야 하는 이유는 과도특성을 해석하거나, 시스템의 비선형성을 고려하기 위함이다. 또한 실제의 전기기기는 전기 강관을 주로 사용하므로 비선형성을 가지게 된다. 따라서 본 장에서는 비선형성이 고려된 시간차분해석결과와 보정을 위해 2장에서 제시된 보정방법을 수정하여 적용하는 방법을 제시한다.

3.1 간단한 RL모델 및 RLC모델의 유한요소해석

그림3은 RL회로의 L 을 구하기 위한 공극을 갖는 Core의 인덕터이고, 표4는 해석에 사용되는 모델의 변수와 값이다. Core의 재질은 일반 규소강관으로 가정한다. 해당모델에 대해 다양한 차분간격에 대해 시간차분유한요소해석을 진행하였고, 해석된 정상상태의 전류를 그림 4에 나타내었다.

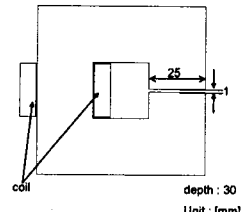


그림3. 비선형시스템 모델
fig3. non-linear model

표4. 비선형시스템인 RL 모델의 parameter.

$V_{rms}[V]$	220
$f[Hz]$	60
$R[\Omega]$	20
$XL[\Omega]$	$j200$
$XC[\Omega]$	
$N[turn]$	750
재질	s23

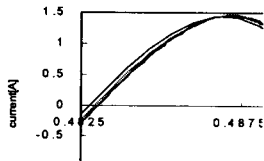


그림4. RL모델의 step size에 따른 전류
fig4. current by step size of RL model

그림 4의 RL 회로는 차분간격이 작아질수록 전류의 위상이 지연되며, 이에 비해 전류의 크기변화는 크지 않다는 것을 알 수 있다. 2장에서 예측한 결과와 잘 부합한다. 두 회로의 전류에 대한 실효전류(rms)와 입력, 출력을 식(12) 및 식(6'7)을 이용하여 구하였고 표5에 나타내었으며, 예상대로 RL모델의 P_{in} 은 차분간격에 따라 변동이 심하다.

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (12)$$

표5. 비선형을 갖는 간단한 RL 모델의 step size에 따른 특성

step size	1/(25f)	1/(50f)	1/(100f)	1/(200f)
I_{rms} [A]	1	1.01	1.01	1.01
P_{in} [W]	42.27	34.03	27.3	23.92
P_{out} [W]	20.08	20.26	20.38	20.44
pf [%]	21.45	15.37	12.29	10.75

그림4의 해석은 비선형성을 고려한 해석이기 때문에 전류 내에 고조파성분이 포함되어있으며, 고조파성분의 크기는 전류의 크기에 따라 달라진다. 즉 코어의 포화정도가 심할수록 고조파성분이 크게 포함된다. 이 같은 포화현상을 정확히 고려하기 위해서는 차분간격이 작아야 하며, 이 같이 비선형성에 의한 고조파가 해석결과에 영향을 주는 경우, 2장의 보정방법을 이용하여 시간차분결과를 진해로 보정시킬 수는 없다.

표5를 보면 알 수 있듯이 비선형을 갖는 RL모델의 시간차분유한요소법을 이용한 해석을 할 때 step size를 작게 하면 할수록 입력전력과 출력전력의 오차가 줄어드는 것을 확인할 수는 있었으나 그래도 여전히 오차를 가지고 있는 것을 알 수 있다.

3.2 RL모델의 시간차분해의 보정

실제 RL모델의 전류성분에 고조파가 섞여 있어 선형회로에서 제시된 보정방법을 적용할 수 없다. 그래서 고속

푸리에 변환(fast Fourier transform, fft)를 사용하여 RL 모델의 기본파성분에 해당하는 리액턴스L의 값을 선형 시스템에서 사용하였던 식(10)을 이용하여 찾을 수 있다. 리액턴스L의 값을 찾으면 기본파 전류성분이 갖는 진해를 식(11)를 사용하여 찾고 기본파의 보정치를 산출할 수 있다. 이 방법을 RL 및 RLC모델의 step size에 따라 실행을 하면 각 step size에 따른 보정치를 산출할 수 있다. 산출된 보정치를 RL 델의 시간차분유한요소방법으로 해석하여 얻은 전류에 보정한다. RL 모델의 시간차분유한요소방법으로 해석하여 얻은 전류와 보정한 전류를 비교하여 그림5에 나타냈다.

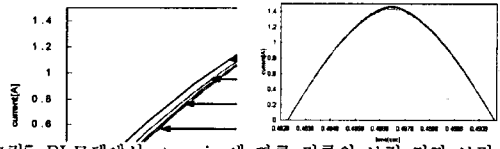


그림5. RL모델에서 step size에 따른 전류의 보정 전과 보정 후
fig5. Correction before and after of current by step size to RLmodel

RL 모델에서 step size에 따른 보정 전 전류 특성과 보정 후 전류 특성을 보면 step size가 작은 전류파형을 향하는 것을 볼 수 있고, 이는 보정전류가 진해전류와 거의 일치하는 것을 의미한다. 비선형을 갖는 RL 모델의 전류를 보정하기 전과 보정한 후의 step size에 따른 특성을 비교하여 표6에 표기하였다.

표6. RL모델에서 step size에 따른 전류의 보정 전후 특성

보정	1/(25f)		1/(50f)		1/(100f)		1/(200f)	
	전	후	전	후	전	후	전	후
I_{rms} [A]	1		1.01		1.01		1.01	
P_{in} [W]	47.27	20.25	34.03	20.35	27.3	20.43	23.92	20.4
P_{out} [W]	20.08		20.26		20.38		20.44	

표6에서는 비선형을 갖는 RL 모델의 전류를 보정하기 전 보다 전류를 보정한 후의 입력전력과 출력전력의 오차가 거의 없음을 보여주고 있고, step size가 클수록 오차가 크지만 보정을 하기 전보다 오차를 많이 줄일 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 선형시스템의 정상상태결과의 오차를 규명하였고, step size와 무관하게 오차를 보정 할 수 있는 방법을 제시하였다. 비선형 시스템에서도 정상상태결과와 오차를 보정할 수 있는 방법을 제시하였다. 그러므로 전기기기의 특성을 시간차분유한요소법을 사용하여 해석할 때 step size를 어느정도 크게 하면서 높은 정밀도를 갖고 시간을 절약 할 수 있는 방법을 제시하였다. 그렇지만 실제 전기기기는 주권선(RL회로)과 보조권선(RLC회로)이(가) 병합된 시스템이다. 병합된 시스템의 특성을 예측하기 위해서는 추가적인 연구가 요구된다.

[참 고 문 헌]

- [1] Chaudhari, B. N., Pillai, S. K. and Fernandes, B. G. "Energy Efficient Line Start Permanent Magnet Synchronous Motor, TENCON '98, 1998 IEEE Region 10 International Conference on Global Connectivity in Energy, Computer, Communication and Control, Volume: 2, 1998