균일전단응력을 받는 2차원 균열포함 무한체에 대한 복소응력함수

김옥환*
*공주대학교 기계자동차공학부
e-mail: owkim@kongju.ac.kr

Complex stress function for the two dimensional cracked infinite body subjected to uniform shear stress

Ok-Whan Kim*
*Dept of Mechanical & Automotive Eng., Kongju University

요 약

2차원균열을 포함하고 있는 무한체가 균일한 전단응력을 받고 있는 경우에 대한 복소응력함수를 기존의 응력함수를 이용하여 해석적으로 구하였다. 이는 등각사상과 정칙연속법에 의하여 구하였다. 결과는 극한의 경우에 대하여 검증하였으며 구한 복소응력함수는 맞는다는 것을 보여준다.

1. 서론

균열을 포함하는 재료의 거동에 대하여 Griffith[1]가 에너지 개념을 도입하여 연구를 시작한 이래 많은 연구가 이루어져 왔다. Irwin[2]은 균열함유 물체에 대하여 응력세기계수(stress intensity factor)를 정의함으로써 하나의 물성치를 제시하였으며 많은 연구자들이 여러 상태에 대한 응력세기계수를 구하려고 노력하고 있다. 응력세기계수를 구하는 방볍에는 여러 가지가 있으나 그중 한가지가 복소응력함수(complex stress function)를 이용하는 방법이다.

복소응력함수는 반드시 쌍을 이루는 두 개가 존재하는데, 본연구에서는 2차원 균열을 포함하는 무한체가 먼거리에서 균일한 전단응력을 받는 경우, 한 쌍의 응력함수 중 기존의 응력함수를 가지고 등각사상(conformal mapping)과 정칙연속법(analytical continuation method)[3]을 이용하여 나머지 하나의 응력함수를 구하고자 한다.

2. 본론

2.1 기존의 연구결과

2차원 탄성체에 발생하는 응력과 변위는 다음과 같이 한 쌍을 이루는 두 개의 응력함수 $\phi(z)$, $\psi(z)$로 나타낼 수 있다.[4]

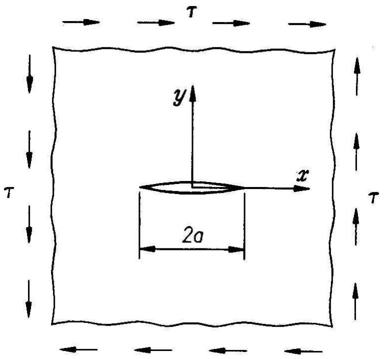
$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2\mathrm{Re}\{\phi'(z)\} - \mathrm{Re}\{\bar{z}\phi''(z)+\psi'(z)\}\\ \sigma_y &= 2\mathrm{Re}\{\phi'(z)\} + \mathrm{Re}\{\bar{z}\phi''(z)+\psi'(z)\}\\ \tau_{xy} &= \mathrm{Im}\{\bar{z}\phi''(z)+\psi'(z)\}\end{aligned} \tag{1}$$

$$2\mu(u-iv) = \kappa\overline{\phi(z)} - \bar{z}\,\phi'(z) - \psi(z) \tag{2}$$

여기서 σ_x, σ_y는 각각 x, y 방향의 수직응력, τ_{xy}는 전단응력, u, v는 각각 x, y방향의 변위이고 Re는 복소수의 실수부, Im은 복소수의 허수부를 취함을 의미하며, $z = x+iy$, $\bar{z} = x-iy$, $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$,

$\kappa = \begin{cases}(3-\nu)/(1+\nu), & \text{평면응력(plane stress)}\\ (3-4\nu), & \text{평면변형율(plane strain)}\end{cases}$ 이며,

$i=\sqrt{-1}$, ν는 Poisson비(Poisson's ratio), E는 탄성계수(modulus of elasticity)이다.



[그림 1] 전단응력을 받는 2차원 균열 무한체

그림 1과 같이 2차원 관통균열을 포함하는 무한체가 먼 거리에서 균일전단응력 τ를 받는 경우 응력함수 $\phi(z)$는 다음식과 같다.[4]

$$\phi(z) = -\frac{i\tau}{2}(\sqrt{z^2-a^2}-z) \tag{3}$$

$\phi(z)$ 하나만으로는 균열첨단(crack tip) 주위의 응력분포와 응력세기계수를 알 수 있으나 균열로부터 먼 거리의 정확한 응력과 변위는 구할 수 없으며 이를 구하기 위해서는 쌍을 이루는 또 하나의 응력함수 $\psi(z)$가 필요하다.

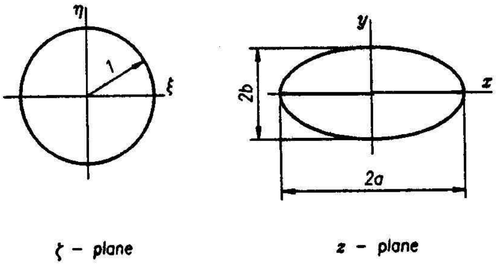
2.2 등각사상함수

그림 2와 같이 단위원 밖을 타원의 밖으로 등각사상하는 함수는 다음과 같다.

$$z = \omega(\zeta) = c(\zeta + \frac{m}{\zeta}), \qquad m < 1 \tag{4}$$

여기서 $c=(a+b)/2$, $m=(a-b)/(a+b)$ 이다. 식(5)에서 $b=0$인 경우 타원은 길이가 $2a$가 되는 균열이 되며 이후로는 이것을 이용한다.

$$z = \omega(\zeta) = \frac{a}{2}(\zeta + \frac{1}{\zeta}) \tag{5}$$



[그림 2] 단위원과 타원의 좌표

2.3 정칙연속법에 의한 응력함수

식 (3)을 등각사상된 ζ 평면에서 고찰하기 위하여 식(3)에 식 (5)를 대입하면 다음을 얻는다.

$$\phi(\zeta) = \frac{i\tau a}{2}\frac{1}{\zeta} \tag{6}$$

정칙연속 법칙에 의하여 $\phi(\zeta)$와 $\psi(\zeta)$는 경계면에서 다음의 관계를 가져야 한다.[3]

$$\psi(\zeta) = -\overline{\phi}(1/\zeta) - \overline{\omega}(1/\zeta)\frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \tag{7}$$

식 (5)와 식 (6)을 식 (7)에 대입하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$\phi(\zeta) = \frac{i\tau a}{2}\frac{\zeta^4+1}{(\zeta^2-1)\zeta} \tag{8}$$

위식을 z의 함수로 나타내기 위하여 다음식과 같이 정리한다.

$$\phi(\zeta) = \frac{i\tau a}{2}\frac{\{(\zeta^2+1)/\zeta\}^2-2}{(\zeta^2-1)/\zeta} \tag{9}$$

위식에 $z=(a/2)(\zeta^2+1)/\zeta$ 와 $\sqrt{z^2-a^2}=(a/2)(\zeta^2-1)/\zeta$ 의 관계식을 대입하면 다음의 결과 식을 얻는다.

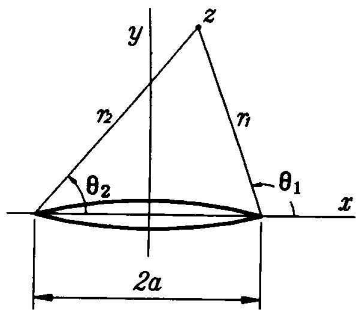
$$\psi(z) = \frac{i\tau}{2}\left[2\sqrt{z^2-a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{z^2-a^2}}\right] \tag{10}$$

3. 검토

식 (3)과 식 (10)을 식(1)에 대입하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$\sigma_x = \tau\left\{\frac{2}{\sqrt{r_1 r_2}}(r_1\sin\theta_m - a\sin\theta_p) - \frac{a^2}{\sqrt{r_1 r_2^3}}\sin\theta_1\cos3\theta_p\right\}$$

$$\sigma_y = \tau\frac{a^2}{\sqrt{r_1 r_2^3}}\sin\theta_1\cos3\theta_p$$



[그림 3] 복소평면의 좌표

$$\tau_{xy}=\tau\left\{\frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}(r_1\cos\theta_m+a\cos\theta_p)\right.$$
$$\left.-\frac{a^2}{\sqrt{r_1 r_2^3}}\sin\theta_1\sin3\theta_p\right\} \quad (11)$$

여기서 $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$는 그림 3에 나타낸 바와 같으며 $r_1=\sqrt{(z-a)^2+y^2}$, $r_2=\sqrt{(z+a)^2+y^2}$,

$\theta_1=\tan^{-1}\frac{y}{x-a}$, $\theta_2=\tan^{-1}\frac{y}{x+a}$,

$\theta_m=\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$, $\theta_p=\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ 이다. $r_1\rightarrow\infty$ 라면 $r_1=r_2$, $\theta_1=\theta_2$이므로

$$\sigma_x\rightarrow 0$$
$$\sigma_x\rightarrow 0, \quad x,\ y\rightarrow\infty$$
$$\tau_{xy}\rightarrow\tau \quad (12)$$

위 식으로부터 먼 거리에서의 응력의 성분은 합리적인 결과를 가짐을 알 수 있다.

변위거동을 검토하기 위하여 식 (3)과 식 (10)을 식 (2)에 대입하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$u=\frac{\tau}{4\mu}\left\{\left[(\kappa+2)\sqrt{r_1r_2}+\frac{(x^2+y^2)-a^2}{\sqrt{r_1r_2}}\right]\sin\theta_p\right.$$
$$\left.-(\kappa+1)y\right\}$$
$$v=\frac{\tau}{4\mu}\left\{-\left[(\kappa-2)\sqrt{r_1r_2}+\frac{(x^2+y^2)-a^2}{\sqrt{r_1r_2}}\right]\cos\theta_p\right.$$
$$\left.+(\kappa+1)x\right\} \quad (13)$$

위 식도 균열로부터 아주 먼 거리 즉 $x,\ y\rightarrow\infty$ 에서는 다음이 성립된다.

$$u\rightarrow\frac{\tau}{2\mu}y$$
$$v\rightarrow\frac{\tau}{2\mu}x \quad (14)$$

이 경우는 순수 전단을 받는 경우가 되어 결과식이 합리적임을 보여준다.

4. 결론

본 연구결과에 의하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 2차원 균열을 포함하는 무한체가 먼 거리에서 균일한 전단응력을 받는 경우에 대하여 등각사상 및 정칙연속법을 사용하여 복소응력함수를 구하였다.
2. 구한 결과 식은 타당한 거동을 보인다.

참고문헌

[1] Griffith A. A., "The phenomena of rupture and flaw in solids" Phil. Trans. R. Soc., Lond. A, 221, 163-297, 1921.

[2] Irwin G. R., "Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate" *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 24, 361-364, 1957.

[3] Muskhelishvili N. I., "Some basic problems of mathematical theory of elasticity," Translated from the Russian by J. R. M. Radok, 4th Ed., 1975.

[4] England A. H., "Complex variable methods in elasticity," Wile-interscience Press, 77-81, 1971.