회전된 엇갈린 격자를 이용한 탄성파 모사에의 CPML 경계조건 적용

조창수[1)]

[1)]한국지질자원연구원 지진연구센터, nemex@kigam.re.kr

Application of Convolutional Perfectly Matched Layer to Numerical Elastic Modeling Using Rotated Staggered Grid

Changsoo Cho[1)]
[1]Earthquake Research Center, KIGAM

요약 : 탄성파 수치 모형 계산에 있어서 널리 사용되는 엇갈린 격자 방법이 아니라 회전된 엇갈린 격자 방법을 사용하여 탄성파 수치 모사를 수행하였다. 표준 엇갈린 격자 방법에서는 자유 경계조건을 적용하여야 하는 단점이 있지만 회전된 격자 방법에서는 자유 경계조건을 적용할 필요 없이 물성을 부여함으로써 해결될 수 있다. 파동전파에 있어서 유한 경계 조건에서 발생하는 인공 반사파를 제거하기 위하여 최근에 뛰어난 성능을 보이는 PML(Perfectly Matched Layer)법이 많이 적용되고 있다. 이 연구에서는 PML보다 성능이 뛰어나기도 하지만 차분에 있어 파동식을 분리할 필요가 없는 CPML (Convolutional Perfectly Matched Layer)법을 회전된 엇갈린 격자법(RSG : Rotatged Staggered Grid)에 적용하고자 하였다. Cerjan법의 감쇠법과 비교한 결과 매우 효과적으로 인공 반사파를 제거할 수 있음을 알 수 있었다.

Abstract : Finite difference method using not general SSG(standard staggered grid) but RSG(rotated staggered grid) was applied to simulation of elastic wave propagation. Special free surface boundary condition such as imaging method is needed in finite difference method using SSG in elastic wave propagation but free surface boundary condition in finite difference method using RSG is easily solved with adding air layer. Recently PML(Perfectly Matched layer) is widely used to eliminate artificial reflection waves from finite boundary because of its' greate efficiency. Absorbing ability of CPML(convolutional Perfectly Matched Layer) that is more efficient than that of PML was applied to FDM using RSG in this study. The results of CPML eliminated artificial boundary waves very effectively in FDM using RSG in being compared with that of Cerjan's absorbing method.

Keywords : CPML, rotated staggered grid,

1. 서론

탄성파 수치 모형계산은 지진과 탄성파 탐사분야에서 매우 중요한 도구로 파동의 전파 현상 이해, 현장 자료 해석 그리고 현장 자료의 역산 매개변수를 취득하기 위한 합성파 계산에 유용하게 사용된다. 많은 수치 모형 반응 계산 중에서도 특히 유한 차분법이 가장 널리 사용된다.

탄성파 수치 모형 계산에 있어서 엇갈린 격자법(Staggered Grid Method)법(Graves, 1996)은 유한차분법 중에서도 물성의 큰 차이에도 불구하고 안정적인 계산을 할 수 있다는 장점으로 널리 사용되고 있다.

그러나 최근에는 회전된 엇갈린 격자법(Saenger et al.,2000; Bohlen and Saenger, 2004)을 이용한 탄성파 수치 모형 계산이 개발되었다. 이 방법의 장점은 표준 엇갈린 격자(Standard Staggered Grid)에서 나타나는 두가지 단점을 극복할 수 있다는 것이다. 첫째는 물성이 큰 차이를 보이는 경우 좋은 결과를 얻기 위하여 표준 엇갈린 격자에서는 물성이 평균하는 것이 필요하지만 회전된 엇갈린 격자에서는 하나의 지점에 탄성 물성이 부여되므로 평균하는 것이 필요하지 않다. 두 번째는 표준 엇갈린 격자에서는 자유 경계 조건을 처리가 명확하게 요구되지만 회전된 격자에서는 필요하지 않다는 것이다. Bohlen and Saenger(2006)은 표준 엇갈린 격자와 회전된 엇갈린 격자법을 자유 경계면에 대한 레일리 파의 정확성을 비교 연구를 수행하였다.

그러나 이러한 회전된 엇갈린 격자법도 일반 수치 모형 계산에서와 마찬가지로 유한한 경계를 가지게 되므로 유한 경계에서 인공적인 반사파가 발생하게 된다. 이를 제거하기 위하여 Chen 등(2006)은 흡수경계 조건으로 PML법을 적용하여 좋은 결과를 얻었다.

PML은 파동을 축에대하여 수직과 수평성분으로 나누어 계산하여야 하는 단점이 생긴다. 이를 극복하기 위하여 Komatitsch와 Martin(2007)은 표준 엇갈린 격자법에 흡수경계조건으로 CPML(Convolutional Perfectly Matched Layer)법을 적용하여 좋은 결과를 얻었다. 이 연구에서는 회전된 엇갈린 격자법에 대하여 CPML법을 적용하고자 하였다.

2. 이론

2.1 회전된 엇갈린 구조의 탄성파 유한차분

회전된 엇갈린 격자의 유한 차분은 Saenger 등(2000)에 의하여 제안되어졌다. 이차원의 경우에 새로운 차분 방향은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\tilde{z} = \frac{\Delta x}{\Delta r}x + \frac{\Delta z}{\Delta r}z,\ \tilde{x} = \frac{\Delta x}{\Delta r}x - \frac{\Delta z}{\Delta r}z \qquad \text{단, } \Delta r = \sqrt{\Delta z^2 + \Delta x^2} \tag{1}$$

그리고 새로운 $\tilde{x},\tilde{z}$ 미분 방향은 기존의 방향 x,z를 치환하였으므로 기존의 미분은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\Delta r}{2\Delta z}\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\Delta r}{2\Delta x}\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\right) \tag{2}$$

회전된 격자 방향에 대하여 탄성파의 격자를 표시한 것이 Fig.1(a)에 보이고 있다. 그리고 일반적으로 널리 이용되는 표준 엇갈린 격자가 Fig. 1(b)이다. 회전된 격자에서 할당되는 물성과 유한차분의 이해가 더욱 쉽다는 것을 알 수 있다.

2.2 흡수경계 조건 CPML

CPML은 Roden과 Gedney(2000)에 의해 전자기파에 적용하였고 Komatitsch와

Martin(2007)는 CPML을 표준 엇갈린 유한차분법을 이용한 탄성파 모사에 적용하여 좋은 결과를 얻었다. 이 연구에서는 회전된 엇갈린 격자을 이용한 유한차분법에 적용하고자 하였다. CPML은 기법은 PML과 달리 감쇠지역에 대한 수직성분과 수평성분으로 분리하는 과정이 필요하지만 CPML은 컨볼루션을 이용하여 파동을 분리 계산할 필요가 없다.

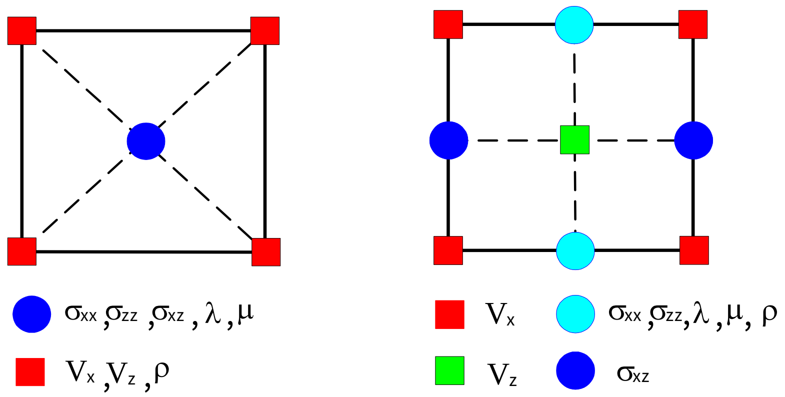


Fig. 1. The elementary cells of grids for RSG FD (a), SSG FD (b).

PML은 공간적인 변수에 복소수 영역을 취함으로써 파동을 감쇠하는 것이다. 그러므로 x 방향에 대한 미분은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{s_x}\frac{\partial}{\partial x} \tag{3}$$

이 때 $s_x = k_x + \frac{d_x}{\alpha_x + iw}$이고, d_x는 damping 축 단면, α_x 는 감쇠상수, 그리고 $k_x \geqq 1$, w는 주파수를 나타낸다. $k_x = 1$, $\alpha_x = 0$이면 이는 고전적인 PML과 동일하게 된다.

$$\frac{1}{s_x} = k_x - \frac{d_x}{k_x^2}\frac{1}{(d_x/k_x + \alpha_x) + iw} \tag{4}$$

(3)식을 시간 영역으로 변환을 하게 되면 아래와 같이 된다.

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \bar{s}_x(t) * \frac{\partial}{\partial x} \tag{5}$$

$\bar{s}_x$는 $1/s_x$의 푸리에 변환이다. 시간영역에서의 x축 방향의 미분은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{k_x}\frac{\partial}{\partial x} + \zeta_x(t) * \frac{\partial}{\partial x} \qquad 단,\ \ \zeta_x(t) = \frac{d_x}{k_x^2} H(t) e^{-(d_x/k_x + \alpha_x)t} \tag{6}$$

컨볼루션 부분을 시간에 차분 n 단계에서 x축 방향 미분은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\psi_x^n = (\zeta_x * \frac{\partial}{\partial x})^n = \int_0^{n\Delta t} (\frac{\partial}{\partial x})^{n\Delta t - \tau} \zeta_x(\tau) d\tau \tag{7}$$

위의 관계식으로부터 다음과 같은 재귀하는 관계식을 유도할 수 있다.

$$\psi_x^n = b_x \psi_x^{n-1} + a_x (\frac{\partial}{\partial x})^{n+1/2} \ \ 이\ 때,\ \ b_x = e^{-(d_x/k_x + \alpha_x)\Delta t},\ \ a_x = \frac{d_x}{k_x(d_x + k_x \alpha_x)}(b_x - 1) \tag{8}$$

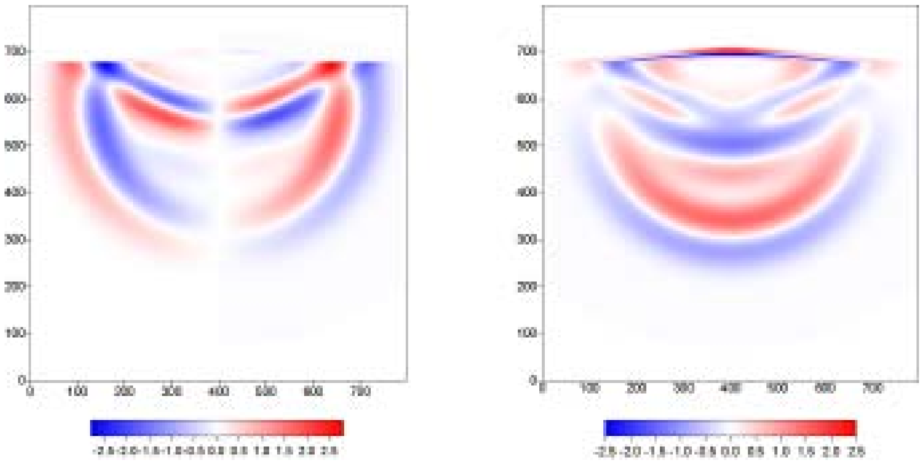
그러므로 PML영역의 미분은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{k_x}\frac{\partial}{\partial x} + \psi_x \tag{9}$$

CPML은 RSG에 대하여 축을 회전할 필요없이 RSG 차분을 이용하여 미분 값을 계산한 후에 손쉽게 적용할 수 있다.

3. 수치 실험

Fig.2.에는 RSG 유한차분법을 시험하기 위하여 격자를 400x400일 때 공기층을 삽입하였을 때의 결과를 보여주고 있다. 수치 실험에서 격자의 길이는 2m이고, 주 주파수는 6Hz를 사용하였다. 지층의 P파 속도는 3,300 m/s, S파속도는 1905 m/s, 밀도는 2800 Kg/m^{3}로 설정하였다. 공기층은 P파속도를 340 m/s, 밀도를 1.292 Kg/m^{3}으로 설정하였다. 송신원의 위치는 P파 송신원으로 수평으로 600 m, 수평으로 800 m위치에 위치시켰다. Fig.2는 리고 시간 스텝이 0.36msec로 400번째 일 때의 스냅 샷을 보여준다. x 성분은 없고 z성분의 air파가 전파하는 것을 볼 수 있다.



(a) (b)

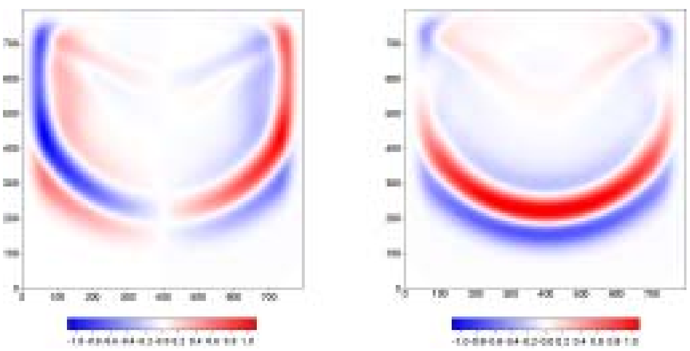
Fig. 2. It is shown snapshots of horizontal(a) and vertical(b) wavefields that were simulated with rotated staggered grid FDM to show air wave propagation.

Fig. 3과 Fig. 4는 CPML의 감쇠를 효과를 살펴보기 위하여 Cerjan(1985)의 감쇠효과를 이용한 방법과 비교하여 보았다. 수치 실험에서는 Fig. 2와 지층모델과 송신원 위치를 동일하게 사용하지만 다만 공기층 대신에 지층과 동일한 모형을 설정하였다. 흡수 경계조건을 모든 경계 조건에 적용하였다. 이 때 Fig. 3과 Fig. 4는 의 동일한 층을 사용하였고 단지 0.36msec로 500번째의 스냅 샷의 결과를 보여주고 있다. Fig. 3은 감쇠조건으로 40개의 격자를 사용하였다. 이때 사용된 것은 감쇠식은 $\exp(-[0.01*(i-40)]^2)$을 사용하였다.

Fig. 4는 CPML을 적용한 결과를 보여주고 있다. CPML방법에서도 역시 40개의 격자를 사용하였다. CPML의 변수는 $\alpha_x = \alpha_m * (1-(x/L_{PML_x})^2)$, $\alpha_{\max} = \pi * f_m$가 사용되었고, $d_x(0) = -(N_{POWER}+1) * V_p(\max) * l(R_{coef})/(2*L_{PML_x})$로 설정하였다. 이때$F_m$ 은 송신원의 주 주파수이고, $R_{coef} = 0.001$로 이는 반사계수를 나타낸다.

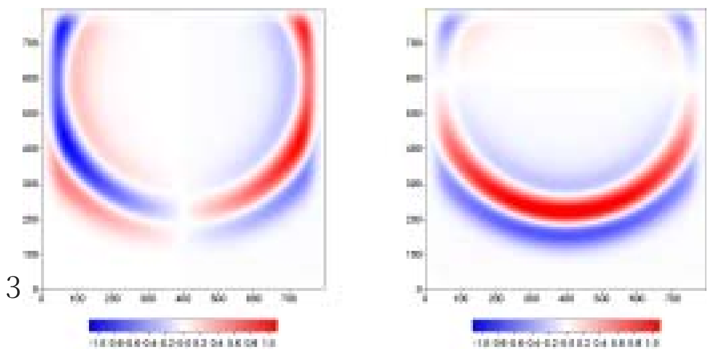
Fig. 3과 Fig. 4를 비교하였을 때 CPML의 경우는 경계조건에서 파가 거의 모두 잘 흡수된 것을 알 수 있다. 하지만 Cerjan(1985)의 경계조건을 하였을 경우는 흡수경계조건에서 약간의 반사파가 발생되는 것을 알 수 있다. 또한 경계면의 흡수를 줄이기 위하여 흡수계수를 줄이면 유한 경계면에서 인공적인 반사파가 나오는 것을 확인할 수 있다.

CPML은 PML과 달리 파동방정식을 분리할 필요없이 매우 손쉽게 RSG 유한차분법에 적용할 수 있음을 알 수 있다.



(a) (b)

Fig. 3. It is shown snapshots of horizontal(a) and vertical(b) wavefields that were simulated by rotated staggered grid FDM with absorbing bounday condition(Cerjan, 1985).



(a) (b)

Fig. 4. It is shown snapshots of horizontal(a) and vertical(b) wavefields that were simulated by rotated staggered grid FDM with absorbing boundary condition of convolutional perfectly matched layer.

4. 결론

회전된 엇갈린 격자를 이용한 유한 차분법을 이용한 탄성파 모사를 구사할 수 있었고 특별한 자유 경계조건을 적용할 필요가 없이 물성을 조정으로 자유 경계조건을 만족하는 것을 알 수 있었다. 또한 회전된 엇갈린 격자를 이용한 탄성파 모사에 있어 CPML을 적용한 결과 인공적인 반사파를 효과적으로 제거할 수 있었다. 향후 고차 CPML을 적용함으로써 더욱 좋은 흡수경계조건을 적용할 수 있을 것으로 보인다. 또한 회전된 엇갈린 격자를 이용한 유한 차분법은 전파형 역산의 모형반응은 계산과 지진파 해석에 있어 유용하게 사용될 수 있을 것으로 사료된다.

감사의 글

이 연구는 한국지질자원연구원 ‘부지고유 지진응답의 지역적 예측을 위한 지진재해 구역화 연구’과제의 일환으로 수행되었다.

참고문헌

Bohlen, T. and Saenger, E. H., 2006, Accuracy of Heterogeneous Staggered-grid finite-difference modeling of Rayleigh Waves, *Geophysics*, 71, T109-T115.

Bohlen, T. and Saenger, E. H., 2006, Accuracy of Heterogeneous Staggered-grid finite-difference modeling of Rayleigh Waves, *Geophysics*, 71, T109-T115.

Cerjan, C., Kosloff, D., Kosloff, R. and Reshef, M., 1985, A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations, *Geophysics*, 50, 705-708.

Chen, H., Wang, X. and Zhao, H., 2006, A rotated staggered grid finite difference with the aborbing boundary condition of a perfectly matched layer, *Chinese Science Bulletin*, 51, 2304-2314.

Graves, R. W. 1996, Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite differences, *BSSA*, 86,1091-1106.

Komatitsch, D. and Martin, R., 2007, An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation, *Geophysics*, 72, SM155-SM167.

Roden, J. A. and Gedney, S. D., 2000, Convolution PML(CPML):An efficcient FDTD implementation of the CFS-PML for arbitrary media, *Microwave and Optical Technology Letters*, 27, 334-339.

Saenger, E. H., Gold N. and Shapiro S. A., 2000, Modeling the propagation of elastic waves using a modified finite-difference grid, *Wave Motion*, 31, 77-92.