스타 네트워크와 그의 변형 네트워크 사이의 노드 사상 알고리즘

기우서°, 이형옥, 오재철
순천대학교 {컴퓨터과학과, 컴퓨터교육과, 컴퓨터과학과}

Node Mapping Algorithm Between Star and Like-Stars

Kiwooseo°, Hyeongok Lee, Oh Jaecheol
{Dept. Computer Sci., Dept. Computer Edu., Dept. Computer Sci.}, Suncheon National Univ.
k00165@lycos.co.kr

요 약

스타(star) 네트워크는 노드 대칭성, 최대 고장 허용도, 계층적 분할 성질을 갖고, 하이퍼큐브보다 망 비용이 개선된 상호 연결망이다. 본 연구에서는 상호연결망으로 널리 알려진 스타네트워크와 RFM, 버블정렬네트워크 사이의 임베딩 방법을 제안하고, 임베딩의 연장율 비용을 분석한다. 연구 결과로 버블정렬(Bubblesort) 그래프 B_N을 *RFM* 그래프 R_N에 연장비율 2, 버블정렬(Bubblesort) 그래프 B_N을 스타그래프 S_N에 연장율 3에 임베딩 할 수 있다.

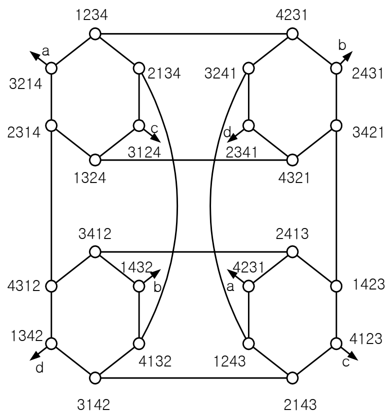
1. 서론

병렬컴퓨터는 크게 공유 기억 장치를 갖는 다중프로세서(multiprocessor) 시스템과 분산 기억 장치를 사용하는 다중컴퓨터(multicomputer) 시스템으로 분류한다. 다중컴퓨터 시스템은 각각의 프로세서들이 자신의 기억 장치를 갖고 각 프로세서는 상호 연결망에 의해 연결되어 있으며 프로세서간의 통신은 상호 연결망을 통하여 메시지 전송 방식[]으로 이루어진다. 다중컴퓨터에서 상호 연결망은 전체 시스템의 성능과 시스템의 확장성에 큰 영향을 미친다. 지금까지 널리 알려진 상호 연결망으로 메쉬, 하이퍼큐브, 스타(star) 그래프[2] 등이 있다. 상호연결망을 평가하는 망 척도는 분지수(degree), 지름(diameter), 대칭성(symmetry), 확장성(scalability), 고장허용도(fault tolerance), 임베딩(embedding) 등이 있다[1,4]. 상호 연결망의 임베딩은 어떤 그래프 G가 다른 그래프 H에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를 알아보기 위해 그래프들간의 관계를 분석하기 위한 평가 척도이다. 그래프 G가 다른 그래프 H에 적은 비용으로 임베딩 가능하다는 것은 연결망 G에서 개발된 알고리즘을 연결망 H에서 적은 비용으로 효율적으로 이용할 수 있기 때문에 상호 연결망의 임베딩 평가는 의미가 있다[4,6].

본 논문에서는 스타그래프 부류로 널리 알려진 스타(Star) 그래프와 RFM 그래프 그리고 버블정렬(Bubblesort) 그래프간의 임베딩을 분석한다. 논문구성은 2장에서 본 연구에서 적용되는 그래프의 정의와 성질을 그래프 이론 관점에서 알아보고 3장에서 임베딩 방법과 연장율을 분석하고 마지막으로 결론을 맺는다.

2. 관련연구

상호 연결망은 각 프로세서를 노드로 프로세서들 간의 통신 채널을 에지로 나타내는 무방향 그래프 $G=(V,E)$로 표현된다[1]. 여기서 $V(G)$는 노드들의 집합 즉 $V(G)=\{0,1,2,....,N-1\}$이고, $E(G)$는 에지의 집합으로써 $V(G)$ 내의 임의의 두 노드 v와 w의 쌍 (v,w)으로서 에지 (v,w)가 존재할 필요충분 조건은 노드 v와 w 사이에 통신 채널이 존재하는 것이다. 지금까지 제안된 상호연결망을 노드 수를 중심으로 분류하면 $n \times k$개 노드를 갖는 메쉬 부류, 2^n개 노드를 갖는 하이퍼큐브 부류[3], $n!$개 노드를 갖는 스타그래프 부류로 나눌 수 있다. 스타그래프 부류는 n개의 심볼을 이용하여 노드 표현의 개수가 대략 $n!$개 이고, 분지수는 대략 n개 정도를 갖도록 구성되었다. 이러한 스타그래프 부류로 스타(Star)그래프, 버블정렬(Bubblesort)그래프[5], 팬케익(Pancake)그래프[2], 전치(Transposition)그래프, 매크로-스타(Macro-star)그래프 등이 제안되었다. 스타(Star)그래프는 하이퍼큐브와 비슷한 노드 개수를 가질 때 상대적으로 적은 노드 개수와 짧은 지름을 갖는 장점이 있지만, 노드 개수 증가율이 급격하고 하이퍼큐브 부류와 임베딩이 어려운 단점이 있다.



(그림 1) 4 차원 스타 그래프

N-차원 스타(Star) 그래프 S_N은 $N!$개의 노드와 $N!(N-1)/2$개의 에지로 구성된다. 각 노드의 주소는 N개의 서로 다른 심볼의 순열로 표현될 수 있고, 노드 v와 w의 순열에서 첫 번째 심볼과 나머지 $N-1$개 심볼 중 한 개의 심볼이 교환된 순열을 갖는 노드 v와 w 사이에 에지가 존재한다. n개의 서로 다른 집합 $\langle N\rangle=\{1,2,..,n\}$이라 하고, $\langle N\rangle$의 순열 $S=s_1s_2...s_n$, $s_i \in \langle N\rangle$이라 하면 스타그래프 S_N은 다음과 같이 정의된다[2].

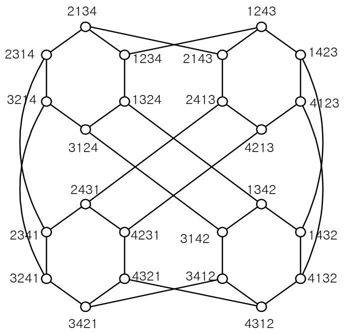
$V(S_N)=\{(s_1s_2...s_i...s_n) \mid s_i \in <n>,\ i \neq j,\ s_i \neq s_j\}$

$E(S_N)=\{(s_1s_2...s_i...s_n)(s_is_2...s_1...s_n) \mid (s_1s_2...s_i...s_n) \in V(S_N),\ 2 \leq i \leq n\}$

N-차원 버블정렬(Bubblesort) 그래프 B_N은 $N!$개의 노드와 $N!(N-1)/2$개의 에지로 구성된다. 각 노드의 주소는 n개의 서로 다른 심볼의 순열로 표현될 수 있고, 임의의 두 노드 v와 w의 n개 비트 스트링에서 연속된 위치의 두개 심볼이 교환된 순열을 갖는 노드 v와 w 사이에 에지가 존재한다. N개의 서로 다른 심볼 집합 $\langle N \rangle=\{1,2,..,n\}$이라 하고, $\langle N \rangle$의 순열을 $B=b_1b_2...b_n$, $b_i \in \langle N \rangle$이라 할 때, 버블정렬 그래프 B_N은 다음과 같이 정의된다[5].

$V(B_N)=\{(b_1b_2...b_n) \mid b_i \in <n>,\ i \neq j,\ b_i \neq b_j\}$

$E(B_N)=\{(b_1b_2...b_ib_{i+1}...b_n)(b_1b_2...b_{i+1}b_i...b_n) \mid (b_1b_2...b_i...b_n) \in V(B_N),\ 1 \leq i \leq N-1\}$



(그림 3) 4 차원 버블정렬 그래프

n-차원 Rotator-Faber-Moore(이하 RFM_n)그래프는 n개 심볼 $\{1,2,3,...,n\}$의 순열로 노드를 나타내고, 노드간의 연결 관계는 방향그래프인 Rotator 그래프와 Faber-Moore 그래프의 에지 발생기 즉, 차원에지를 함께 적용하여 에지를 정의하고 있다. Rotator 그래프의 차원에지 R^i는 $(123...i...n) \rightarrow (23...i1...n)$, $2 \leq i \leq n$이고, Faber-Moore 그래프의 차원에지 F^j는 $(123..j-1jj+1...n) \rightarrow (j123..j-1j+1...n)$, $2 \leq j \leq n$이다. n개의 서로 다른 집합 $\langle N \rangle=\{1,2,..,n\}$ 이라 하고, $\langle N \rangle$의 순열 $r_1r_2...r_i...r_n$, $r_i \in \langle N \rangle$이라 하면 RFM_n 그래프는 다음과 같이 정의된다[6].

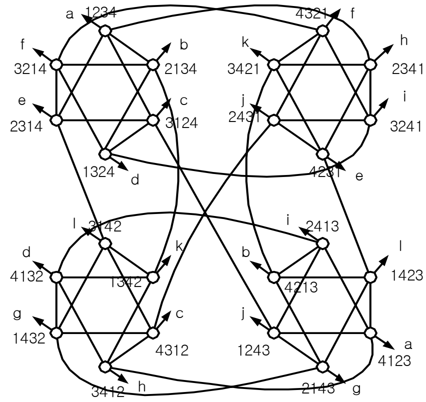
$V(RFM_n)=\{(r_1r_2...r_i...r_n) \mid r_i \in <N>,\ i \neq j,\ r_i \neq r_j\}$

$E(RFM_n)=\{R^i,\ F^j\}$

R^i : $\{(r_1r_2...r_i...r_n)(r_2p_3p_4...r_ir_1...r_n) \mid (r_1r_2...r_i...r_n) \in V(RFM_n),\ 2 \leq i \leq n\}$

F^j : $\{(r_1r_2...r_{j-1}r_jr_{j+1}...r_n)(r_jr_1r_2...r_{j-1}r_{j+1}...r_n) \mid (r_1r_2...r_{j-1}r_jr_{j+1}...r_n) \in V(RFM_n),\ 2 \leq j \leq n\}$

RFM_n그래프는 $n!$개의 노드 개수를 갖고, 분지수가 $2n-3$이고 노드 대칭적인 정규연결망임이 알려졌다. RFM_n그래프의 지름은 $n-1$이고, 최대고장허용도를 갖고, 노드 중복하지 않는 싸이클이 존재하고, 일대다 방송 알고리즘이 제시되었다. 또한 임베딩에 있어서는 스타그래프 S_n을 RFM_n그래프에 연장율 2, 버블정렬그래프 B_n를 RFM_n그래프에 연장율 2, 2차원 토러스 $n \times (n-1)!$을 RFM_n그래프에 연장율 2로 임베딩한 결과가 있다[6].



(그림 3) 4 차원 RFM그래프

3. 임베딩 알고리즘 분석

그래프의 임베딩(embedding)은 어떤 그래프 G가 다른 그래프 H 구조에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를 알아보기 위해, 어떤 특정한 그래프를 다른 그래프에 사상(mapping)하는 것이다. 그래프 G의 그래프 H에 대한 임베딩 f는 다음과 같이 정의되는 함수의 쌍$(ø,\rho)$을 말한다. $ø$는 G의 정점 집합 $V(G)$를 H의 정점 집합 $V(H)$에 대응시키는 함수이고, ρ는 G의 에지 $e=(v,w)$에서 $ø(v)$와 $ø(w)$를 잇는 H상의 경로로 대응시키는 함수이다. 임베딩의 비용을 나타내는 척도는 연장율(dilation), 밀집율(congestion), 확장율(expansion)이 사용되고 있다. 그래프 G의 에지 e의 연장율은 H상에서의 경로 $\rho(e)$의 길이를 말하고, 임베딩 f의 연장율은 G의 모든 에지의 연장율 중 최대값이다. 그래프 H의 에지 e'의 밀집율은 e'에 포함되는 $\rho(e)$의 개수를 말하고, 임베딩 f의 밀집율은 H의 모든 에지의 밀집율 중 최대값이다. 임베딩 f의 확장율은 G의 정점의 개수에 대한 H의 정점의 개수의 비를 말한다. 스타그래프 S_N의 노드 $S(s_1s_2...s_i...s_n)$에서 심볼 s_1과 s_i가 교환된 순열 $s_is_2...s_1...s_n$을 연결하는 에지를 i-차원에지라 하고, 차원에지 S_i, $2 \leq i \leq n$로 표현하고, 팬케익그래프 P_N의 노드 $P(=p_1p_2...p_i...p_n)$에서 심볼 p_i부터 첫 번째 심볼 p_1까지 역순으로 생성된 순열 $p_ip_{i-1}p_{i-2}...p_1p_{i+1}...p_n$을 연결하는 에지를 i-차원에지라 하고, 차원에지 P_i, $2 \leq i \leq n$로 표현한다. 버블정렬그래프 B_N의 노드 $B(=b_1b_2...b_ib_{i+1}...b_n)$에서 인접한 2개의 심벌 b_i과 b_{i+1}이 교환된 순열 $b_1b_2...b_{i+1}b_i...b_n$을 연결하는 에지를 i-차원에지라 하고, 차원에지 B_i, $1 \leq i \leq n-1$로 표현한다.

스타그래프 S_N의 임의의 노드 U에서 차원에지 S_i에 인접한 노드를 V라 할 때, 노드 V는 다음과 같이 $V=S_i(U)$로 표현한다. 또한, 노드 U에서 스타그래프의 차원에지 S_i, S_j, S_k를 순차적으로 적용하여 도달한 노드를 V라 할 때, 차원에지를 순차적으로 적용한다는 것은 첫 번째 단위시간에는 노드 U에서 차원에지 S_i에 의해 인접한 노드 $S_i(U)$의 순열을 생성함을 의미하고, 두 번째 단위시간에는 노드 $S_i(U)$에서 차원에지 S_j에 인접한 노드 $S_j(S_i(P))$를 생성함을 의미하고, 세 번째 단위시간에는 순열 $S_j(S_i(P))$에서 차원에지 S_k에 인접한 순열 $S_k(S_j(S_i(P)))$에 도달함을 의미하고 노드 $V=S_k(S_j(S_i(P)))$를 의미한다. 이와 같이 노드 U에 차원에지 S_i, S_j, S_k를 순차적으로 적용하여 도달한 노드 $V=S_k(S_j(S_i(U)))$로 표

현하고, 순열 $S_k(S_j(S_i(U)))$는 간단히 $S_kS_jS_i(U)$로 표기한다. 노드 U에 순차적으로 적용된 차원에지를 차원에지 시퀀스 $<S_i, S_j, S_k>$로 나타낸다. 위의 차원에지와 차원에지 시퀀스는 팬케익그래프 P_N와 버블정렬그래프 B_N에서 동일하게 적용된다.

본 연구에서 적용하는 임베딩의 기본 방법은 다음과 같다. 스타그래프 S_N와 팬케익그래프 P_N 그리고 버블정렬그래프 B_N에서 노드 사상은 동일한 주소를 갖는 노드로 일-대-일 사상한다. 사상할 그래프의 인접한 두 노드 (U,V)를 연결하는 차원에지는 사상된 그래프의 에지 정의를 이용하여 $ø(U)$와 $ø(V)$를 연결하는 최단경로(the shortest path)의 차원에지 시퀀스로 나타내고, 임베딩의 연장율은 차원에지 시퀀스의 개수로 나타낸다.

정리 1 버블정렬(Bubblesort) 그래프 B_N을 RFM그래프 R_N에 연장비율 2, 확장비율 1에 임베딩 가능하다.

증명 버블정렬그래프 B_N와 RFM그래프 R_N의 노드는 $N!$개의 동일한 주소를 갖는 노드들로 일-대-일 사상 가능하다. 두 그래프의 노드를 사상하는 방법은 버블정렬그래프 B_N의 노드 $B(b_1b_2b_3...b_i...b_n)$를 RFM그래프 R_N의 노드 $R(=r_1r_2r_3...r_i...r_n)$로 사상하고, 버블정렬 그래프의 노드 B와 i-차원에지에 의해 연결된 노드 B'를 RFM그래프 R_N의 노드 R'로 사상한다. 임베딩의 연장율을 분석하기 위해 버블정렬그래프의 에지를 차원에지의 경우로 나누고, 버블정렬 그래프의 노드 B와 B'가 사상된 RFM그래프의 노드 R와 R'에서 노드 R의 주소로부터 노드 R'의 주소를 생성하기 위해 필요한 에지 개수를 통해 연장율을 분석한다. 버블정렬그래프의 차원에지에 따라 3가지 경우로 나누어 증명한다.

경우1. $i(=1)$-차원에지

버블정렬그래프 B_N의 노드 $B(b_1b_2b_3...b_i...b_n)$와 1-차원에지에 의해 인접한 노드 B'의 순열은 $b_2b_1b_3...b_i...b_n$이다. RFM그래프 R_N의 노드 $R(=r_1r_2r_3...r_i...r_n)$는 에지 R^2에 의해 노드 $R'(=r_2r_1r_3...r_i...r_n)$와 인접한 노드이다. 따라서 버블정렬그래프 B_N의 노드 $B(b_1b_2b_3...b_i...b_n)$와 1-차원에지에 인접한 노드 B'는 RFM그래프 R_N의 노드 R와 R'로 각각 사상할 때 연장율 1에 임베딩 가능하다.

경우2. $i=2$ 차원에지

버블정렬그래프 B_N의 노드 $B(b_1b_2b_3b_4...b_i...b_n)$와 2-차원에지에 의해 인접한 노드 $B'(=b_1b_3b_2b_4...b_i...b_n)$이다. RFM그래프 R_N의 노드 $R(=r_1r_2r_3...r_i...r_n)$는 노드 $R'(=r_1r_3r_2...r_i...r_n)$와 인접하지 않다. RFM그래프의 노드 $R(=r_1r_2r_3...r_i...r_n)$에서 노드 $R'(=r_1r_3r_2...r_i...r_n)$까지 최단경로 라우팅을 위해 이용하는 에지 개수를 통해 연장율을 분석한다. 노드 $R(=r_1r_2r_3...r_i...r_n)$에서 R'까지의 라우팅을 위한 차원에지의 시퀀스는 $<F^3, R^2>$이다. 노드 $R(=r_1r_2r_3...r_i...r_n)$에서 차원에지 F^3에 의해 인접한 노드는 $F^3(R)=r_3r_1r_2...r_i...r_n$이고, 노드 $F^3(R)$에서 차원에지 R^2에 인접한 노드는 $R^2(F^3(R))=r_1r_3r_2...r_i...r_n$이다. 따라서 RFM그래프의 노드 $R(=r_1r_2r_3...r_i...r_n)$에서 차원에지 시퀀스 $<F^3, R^2>$를 적용한 노드 $R^2(F^3(R))(=r_1r_3r_2...r_i...r_n)$는 노드 R'와 동일한 주소이므로, 버블정렬그래프 B_N의 노드 $B(b_1b_2b_3...b_i...b_n)$와 2-차원에지에 인접한 노드 B'는 팬케익그래프에 연장율 2에 임베딩 가능하다.

경우3. $i \geq 3$ 차원에지

버블정렬그래프 B_N의 노드 $B(b_1b_2b_3...b_{i-1}b_ib_{i+1}b_{i+2}...b_n)$와 i-차원에지에 의해 인접한 노드 B'의 순열은 $b_1b_2b_3...b_{i-1}b_{i+1}b_ib_{i+2}...b_n$이다. RFM그래프 R_N의 노드 $R(=r_1r_2r_3...r_{i-1}r_ir_{i+1}r_{i+2}...r_n)$는 노드 $R'(=r_1r_2r_3...r_{i-1}r_{i+1}r_ir_{i+2}...r_n)$와 인접하지 않으므로, 노드 $R(=r_1r_2r_3...r_{i-1}r_ir_{i+1}r_{i+2}...r_n)$에서 노드 $R'(=r_1r_2r_3...r_{i-1}r_{i+1}r_ir_{i+2}...r_n)$까지 최단경로 라우팅을 위해 이용하는 차원에지 개수를 통해 연장율을 분석한다. RFM그래프의 노드 R에서 R'까지 최적 라우팅을 위한 차원에지 시퀀스는 $<F^i, R^{i+1}>$이고, 라우팅 과정은 다음과 같다. 노드 $R(=r_1r_2r_3...r_{i-1}r_ir_{i+1}r_{i+2}...r_n)$에서 차원에지 F^i에 의해 인접한 노드 $F^i(R)(=r_ir_1r_2r_3...r_{i-1}r_{i+1}r_{i+2}...r_n)$이고, 노드 $F^i(R)$에서 차원에지 R^{i+1}에 의해 인접한 노드 $R^{i+1}(F^i(R))(=r_1r_2r_3...r_{i-1}r_{i+1}r_ir_{i+2}...r_n)$이다. 따라서 RFM그래프의 노드 $R(=r_1r_2r_3...r_{i-1}r_ir_{i+1}r_{i+2}...r_n)$에서 차원에지 시퀀스는 $<F^i, R^{i+1}>$를 경유한 노드 $R^{i+1}(F^i(R))$의 순열은 노드 $R'(=r_1r_2r_3...r_{i-1}r_{i+1}r_ir_{i+2}...r_n)$와 동일함을 알 수 있다. 결국 버블정렬그래프 B_N의 노드 $B(b_1b_2b_3...b_i...b_n)$에서 3-차원 이상의 에지에 인접한 노드 B'는 RFM그래프 R_N의 노드 R에서 2개의 에지 시퀀스 $<F^i, R^{i+1}>$을 순차적으로 적용하여 구성한 노드 $R^{i+1}(F^i(R))$로 사상되므로 연장율 2에 임베딩 가능하다. □

정리 2 RFM그래프 R_N을 버블정렬(Bubblesort) 그래프 B_N에 연장비율 $O(n)$, 확장비율 1에 임베딩 가능하다.

(증명) RFM그래프 R_N와 버블정렬그래프 B_N는 $N!$개의 노드를 갖고, 동일한 주소를 갖는 노드가 존재한다. 두 그래프의 노드를 사상하는 방법은 RFM그래프 R_N의 노드 $R(=r_1r_2r_3...r_i...r_n)$을 버블정렬그래프 B_N의 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_i...b_n)$로 사상하고, RFM그래프의 노드 R와 에지 R^i와 F^j에 의해 인접한 노드 $R^i(R)$와 $F^j(R)$를 버블정렬그래프의 노드 B'로 각각 사상한다. RFM그래프의 노드 R와 노드 R과 인접한 노드 $R^i(R)$와 $F^j(R)$가 사상된 버블정렬 그래프의 노드 B와 B'에서 노드 B의 주소로부터 노드 B'의 주소를 생성하기 위해 필요한 에지 개수를 통해 연장율을 분석한다. RFM그래프의 에지 R^i와 F^j에 따라 2가지 경우로 나누어 증명한다.

경우1. 에지 R^i, $(2 \leq i \leq n)$

RFM그래프 R_N의 노드 $R(=r_1r_2r_3...r_i...r_n)$에서 에지 R^i에 의해 인접한 노드는 $R'(=r_2r_3...r_ir_1...r_n)$이다. RFM그래프의 노드 $R(=r_1r_2r_3...r_i...r_n)$과 $R'(=r_2r_3...r_ir_1...r_n)$을 버블정렬그래프의 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_i...b_n)$와 $B'(==b_2b_3...b_ib_1...b_n)$로 사상한다. 이때 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_i...b_n)$과 $B'(==b_2b_3...b_ib_1...b_n)$는 서로 인접하지 않으므로, 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_i...b_n)$에서 노드 $B'(=b_2b_3...b_ib_1...b_n)$까지 최단경로 라우팅을 위해 이용하는 차원에지 개수를 통해 연장율을 분석한다. 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_i...b_n)$에서 $B'(=b_2b_3...b_ib_1...b_n)$까지의 라우팅을 위한 차원에지의 시퀀스는 $<1, 2, 3, ..., i-1>$ 차원에지이다. 이때 차원에지 i의 최대 값은 $n-1$이므로, 연장율은 $O(n)$임을 알 수 있다.

경우2. 에지 F^j, $(2 \leq i \leq n)$

RFM그래프 R_N의 노드 $R(=r_1r_2r_3...r_i...r_j...r_n)$에서 에지 F^j에 의해 인접한 노드는 $R'(=r_jr_1r_2r_3...r_i...r_{j-1}r_{j+1}...r_n)$이다. RFM그래프의 노드 $R(=r_1r_2r_3...r_i...r_j...r_n)$과

$R'(=r_jr_1r_2r_3...r_i...r_{j-1}r_{j+1}...r_n)$을 버블정렬그래프의 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_i...b_j...b_n)$와 $B'(=b_jb_1b_2b_3...b_i...b_{j-1}b_{j+1}...b_n)$로 사상한다. 이때 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_i...b_j...b_n)$과 $B'(=b_jb_1b_2b_3...b_i...b_{j-1}b_{j+1}...b_n)$는 서로 인접하지 않으므로, 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_i...b_j...b_n)$에서 노드 $B'(=b_jb_1b_2b_3...b_i...b_{j-1}b_{j+1}...b_n)$까지 최단경로 라우팅을 위해 이용하는 차원에지 개수를 통해 연장율을 분석한다. 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_i...b_j...b_n)$에서 $B'(=b_jb_1b_2b_3...b_i...b_{j-1}b_{j+1}...b_n)$까지의 라우팅을 위한 차원에지의 시퀀스는 $<j-1, j-2, j-3, ..., 1>$ 차원에지이다. 이때 차원에지 j의 최대 값은 $n-1$이므로, 연장율은 $O(n)$임을 알 수 있다.

정리 3 버블정렬(Bubblesort) 그래프 B_N을 스타그래프 S_N에 연장율 3, 확장율 1에 임베딩 가능하다.

증명 버블정렬그래프 B_N의 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_{i-1}b_ib_{i+1}...b_n)$와 i-차원에지에 의해 연결된 노드 $B'(=b_1b_2b_3...b_{i-1}b_{i+1}b_i...b_n)$를 스타그래프 S_N의 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_is_{i+1}...s_n)$와 노드 $S'(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_{i+1}s_i...s_n)$로 각각 사상할 때 노드 S와 S'는 서로 인접하지 않으므로, 스타그래프 S_N의 노드 S의 순열로부터 노드 S'의 순열로 변환할 때 까지 적용하는 스타그래프의 에지시퀀스 개수를 통해 연장율을 분석한다.

스타 그래프 S_N의 노드 $S(s_1s_2s_3...s_{i-1}s_is_{i+1}s_{i+2}...s_n)$ 순열에서 노드 $S'(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_{i+1}s_is_{i+2}...s_n)$까지 라우팅을 위한 최단 경로의 에지시퀀스는 $<S_{i+1}, S_i, S_{i+1}>$이다. 스타그래프에서 에지시퀀스를 이용한 라우팅 과정은 다음과 같다. 스타그래프 S_N의 노드 $S(s_1s_2s_3...s_{i-1}s_is_{i+1}...s_n)$에서 차원에지 S_{i+1}에 의해 인접한 노드의 순열은 $S_{i+1}(S)=s_{i+1}s_2s_3...s_{i-1}s_is_1...s_n$이고, 노드 $S_{i+1}(S)$에서 차원에지 S_i에 의해 인접한 노드의 순열은 $S_iS_{i+1}(S)=s_is_2s_3...s_{i-1}s_{i+1}s_1...s_n$이다. 노드 $S_iS_{i+1}(S)$에서 차원에지 S_{i+1}에 의해 인접한 노드의 순열은 $S_{i+1}S_iS_{i+1}(S)=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_{i+1}s_i...s_n$이므로 스타 그래프 S_N의 노드 S'와 노드의 순열 $S_{i+1}S_iS_{i+1}(S)$는 동일한 주소를 가짐을 알 수 있고, 노드 S에서 노드 S'까지 라우팅을 위해 필요한 차원에지 개수는 3개이다. 따라서 버블정렬그래프 B_N의 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_{i-1}b_ib_{i+1}...b_n)$와 노드 $B'(=b_1b_2b_3...b_{i-1}b_{i+1}b_i...b_n)$를 스타그래프 S_N의 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_is_{i+1}...s_n)$와 노드 $S'(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_{i+1}s_i...s_n)$로 각각 사상할 때 연장율은 3이다. □

정리 4 스타그래프 S_N을 버블정렬(Bubblesort) 그래프 B_N으로 임베딩하는데 연장율 비용이 $O(n)$임을 보인다.

스타그래프 S_N의 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_is_{i+1}...s_n)$와 i-차원에지 S_i에 의해 인접한 노드 S'의 순열은 $s_is_2s_3...s_{i-1}s_1s_{i+1}...s_n$이다($2 \le i \le n$). 스타 그래프 S_N의 노드 S를 버블정렬그래프 B_N의 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_{i-1}b_ib_{i+1}...b_n)$로 사상하고 노드 S'를 노드 B'로 사상할 때, 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_{i-1}b_ib_{i+1}...b_n)$에서 노드 $B'(=b_ib_2b_3...b_{i-1}b_1b_{i+1}...b_n)$까지 최단경로 라우팅을 위해 적용해야 할 차원에지의 개수가 $c \times n$임을 통해 임베딩의 연장율 비용이 $O(n)$임을 보인다(c는 상수).

최단경로 라우팅 개요는 다음과 같다. 버블정렬그래프 B_N의 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_{i-1}b_ib_{i+1}...b_n)$에서 먼저 첫 번째 위치에 있는 심벌 b_1을 인접한 심벌들과 계속 교환하여 i번째 위치로 이동하고, i번째 위치에 있는 심벌 b_i를 인접한 심벌들과 교환하여 첫 번째 위치로 이동한다. 위 작업을 위해 라우팅에 적용되는 에지시퀀스는 $<B_1, B_2, B_3, ..., B_{i-2}, B_{i-1}, B_{i-2}, ..., B_2, B_1>$이다. 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_{i-1}b_ib_{i+1}...b_n)$에서 에지시퀀스 $<B_1, B_2, B_3, ..., B_{i-2}, B_{i-1}>$을 순차적으로 적용하면 심벌 b_1을 인접한 i-1개의 심벌들과 순차적으로 교환하여 심벌 b_1는 i번째에 위치되고, 그 순열은 $B_{i-1}B_{i-2}...B_3B_2B_1(B)=b_2b_3...b_{i-1}b_ib_1b_{i+1}...b_n$이다. 그리고 순열 $B_{i-1}B_{i-2}...B_3B_2B_1(B)=b_2b_3...b_{i-1}b_ib_1b_{i+1}...b_n$에서 심벌 b_i는 $(i-1)$번째 위치에 있으므로, 순열 $B_{i-1}B_{i-2}...B_3B_2B_1(B)$에 에지시퀀스 $<B_{i-2}, B_{i-3}, ..., B_2, B_1>$을 순차적으로 적용하면 심벌 b_i는 i-2개의 인접한 심벌들과 교환하여 순열의 첫 번째 위치에 심벌 b_i을 위치한 순열 $B_1B_2B_3...B_{i-3}B_{i-2}(B_{i-1}B_{i-2}...B_3B_2B_1(B))=b_ib_2b_3...b_{i-1}b_1b_{i+1}...b_n$을 갖는다. 따라서 스타 그래프 S_N의 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_is_{i+1}...s_n)$와 i-차원에지 S_i에 의해 인접한 노드 S'의 순열 중 차원에지가 가장 큰 값은 n-차원에지이므로, 스타 그래프 S_N의 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_is_{i+1}...s_n)$와 노드 S'가 사상된 버블정렬그래프의 노드 $B(b_1b_2b_3...b_{i-1}b_ib_{i+1}...b_n)$에서 노드 B'까지 라우팅을 위해 적용되는 차원에지 개수는 $2n-3$개이므로 연장율은 $O(n)$이다($2 \le i \le n$). □

4. 결론

본 연구에서는 병렬 컴퓨터의 위상으로 잘 알려진 스타(Star), RFM, 버블정렬 그래프 사이의 임베딩을 분석하였다. 스타 그래프, 버블정렬그래프, RFM그래프는 짧은 지름, 노드 대칭성, 계층적 구조와 최대 고장 허용도 등을 갖는 상호 연결망이다.

연구 결과로 버블정렬(Bubblesort) 그래프 B_N을 *RFM*그래프 R_N에 연장비율 2, 버블정렬(Bubblesort) 그래프 B_N을 스타그래프 S_N에 연장율 3에 임베딩 할 수 있다. 또한, *RFM*그래프 R_N을 버블정렬(Bubblesort) 그래프 B_N에 연장비율 $O(n)$, 스타그래프 S_N을 버블정렬(Bubblesort) 그래프 B_N으로 임베딩하는데 연장율 비용이 $O(n)$임을 보였다.

5. 참고 문헌

[1] S. B. Akers and B. Krishnamurthy, "A Group-Theoretic Model for Symmertric Interconnection Network," IEEE Trans. Comput., Vol. 38, No. 4, pp. 555-565, 1989.

[2] P. Berthome, A. Ferreira and S. Perennes, "Optimal Information Dissemination in Star and Pancake Networks," IEEE Trans. on Parallel and Distributed Syst., Vol. 7, No. 12, pp. 1292-1300, 1996.

[3] K. Day and A. Tripathi, "A Comparative Study of Topological Properties of Hypercubes and Star Graphs," IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, Vol. 5, No. 1, pp. 31-38, Jan. 1994.

[4] T-Y. Feng, "A Survey of Interconnection Networks,", IEEE computer, pp. 12-27, December 1981.

[5] Z. T. Chou, C. C. Hsu, and J. P. Sheu, "Bubblesort Star graphs: A New Interconnection Network," 9th International Parallel Processing Symposium, pp. 41-48, 1996.

[6] 이형옥, 허영남, 임형석, "RFM Graphs: 그래프 결합을 이용한 새로운 상호연결망," 정보처리학회논문지 5권 10호, pp. 2615-2626, 1998.