

# 하이퍼큐브를 피터슨-토러스(PT) 네트워크에 임베딩

서정현<sup>1</sup>, 이형욱<sup>2</sup>, 장문석<sup>3</sup>

순천대학교 {컴퓨터과학과<sup>1</sup>, 컴퓨터교육과<sup>2</sup>, 컴퓨터과학과<sup>3</sup>}

{jhseo, oklee, jang}@suncheon.ac.kr

## Embedding Hypercube into Petersen-Torus(PT) Networks

Junghyun Seo<sup>1</sup>, Hyeongok Lee<sup>2</sup>, Moonsuk Jang<sup>3</sup>

{Dept. Computer Sci.<sup>1</sup>, Dept. Computer Edu.<sup>2</sup>, Dept. Computer Sci.<sup>3</sup>} Suncheon National Univ.,

### 요 약

본 논문은 차원이 증가함에 따라 분지수가 증가하는 하이퍼큐브 연결망을 분지수가 고정인 피터슨-토러스(PT) 네트워크에 임베딩 가능성을 보였다. 하이퍼큐브  $Q_{\log_2 n^2 + 3}$ 을  $PT(n, n)$ 에 확장율 10/8, 연장율 1.5n+2 그리고 밀집율 4n에 임베딩 하였다. 확장율은 1에 근접하도록 사상알고리즘이 설계되었고, 밀집율과 연장율은 분지수가 증가하는 하이퍼큐브의 특성 때문에  $O(n)$ 에 비례한다.

### 1 서론

멀티컴퓨팅을 위한 상호연결망은 망을 구성하는 노드와 에지의 구성에 따라 트리 부류, 메쉬 부류, 하이퍼큐브 부류 그리고 스타그래프 부류로 나눌 수 있다. 새로운 상호연결망이 설계되면 연결망의 구조에 적합한 병렬 알고리즘들이 설계되는데 그 연구비용은 적지 않다. 서로 다른 연결망간의 임베딩은 설계된 알고리즘들을 재사용 할 수 있게 함으로써 알고리즘 설계 연구에 드는 비용을 절감할 수 있다. 멀티 컴퓨팅을 효과적으로 이용하기 위해서 링, 트리, 메쉬, 하이퍼큐브와 같은 공통적인 위상 구조를 다른 많은 연결망에 임베딩하는 문제가 연구 되었다[1,2,3].

상호연결망은 멀티컴퓨팅 시스템에서 프로세서간의 연결 구조를 제공하고 그 위에 작성된 병렬알고리즘의 설계에 중요한 역할을 한다. 상호연결망은 그래프  $G=(V, E)$ 로 모델링 될 수 있고, 상호연결망의 프로세서는 노드집합  $V(G)$ 로 표현되고 프로세서간의 통신링크는 에지집합  $E(G)$ 로 표현된다.  $|V(G)|$ 는 노드의 개수이다. 상호연결망  $H(host)$ 에서  $G(guest)$ 를 시뮬레이션 하기 위해,  $G$ 를  $H$ 에 효과적으로 임베딩  $f$  한다는 것은  $V(G)$ 를  $V(H)$ 에 효과적으로 사상하는 것이다. 임베딩을 평가하는 척도는 확장율(expansion), 부하계수(load factor), 연장율(dilation), 밀집율(congestion)이 있다[4].

$|V(H)|/|V(G)|$ 를  $f$ 의 확장율  $e$ 라고 한다.  $e$ 가 1보다 적으면 다대일 임베딩이라고 하고,  $e$ 가 1보다 같거나 크고 2보다 적으면 일대일 임베딩이라고 한다. 다대일 임베딩에서 임베딩 함수  $f$ 에 의해서  $H$ 의 임의의 하나의 노드로 사상되는  $G$ 의 노드의 수의 최대값을  $f$ 의 부하계수  $l$  이라고 한다. 확장율이 1보다 큰 경우 그래프  $G$ 의 하나의 노드를 그래프  $H$ 의 여러 개의 노드에 사상하는 것을 일대다 사상

이라고 하고, 연장율을 줄이기 위해 사용된다[5].

본 논문에서는 하이퍼큐브 네트워크를 PT 네트워크로 일대일 임베딩 한다. 일대일 임베딩에서는 부하계수가 1이므로 프로세서에서 작업처리 시간이 빠르다. 확장율은 1에 근접하도록 임베딩 되었고, 망이 확장될 때 에지의 수가 증가하는 특성 때문에 연장율과 밀집율은 비례해서 증가한다. 본 논문의 구성은 2장에서 PT 네트워크와 하이퍼큐브 네트워크를 소개한다. 3장에서 하이퍼큐브를 PT 네트워크에 임베딩 하였다. 마지막으로 결론을 맺는다.

### 2 관련연구

하이퍼큐브는 모든 노드의 에지수가 같은 정규 연결망이고, 노드-에지 대칭 구조를 가지고 있으며 intel Ncube, Paralex 등과 같은 병렬컴퓨팅 시스템에서 상용화되었다. 하이퍼피터슨 네트워크는 피터슨 그래프를 하이퍼큐브 방식으로 연결하여 하이퍼큐브보다 지름(diameter)과 망비용(network cost)에서 우수한 성질을 갖는 연결망이다. 이진트리 검색 알고리즘, 정렬 알고리즘, 산술식 표현법, 디렉터리 구조 등의 다양한 문제를 위한 좋은 해결책을 얻기 위해 유용하다.

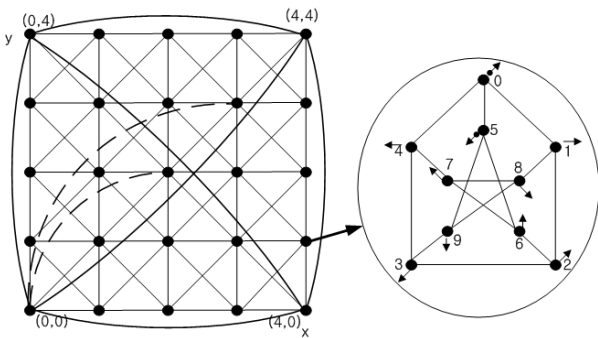
#### 2.1 피터슨-토러스 $PT(m, n)$ 네트워크 정의

$PT(m, n)(m, n \geq 2)$ 은 피터슨 그래프(그림 1의 (b))를 기본모듈로 하고, 기본모듈  $m(x축) \times n(y축)$ 개를 격자점에 배치하고 에지 정의에 의해 연결한다. 피터슨-토러스 네트워크  $PT(m, n) = (V_{pt}, E_{pt})$ 이다. 본 논문에서는  $PT(m, n)$ 를 그림 1의 (a)와 같이 2차원 그래프에 사상시켜 설명한다. 단위 피터슨 그래프를 기본모듈이라고 하며, 기본모듈은  $x$ 와  $y$ 의 교차점에 있다. 기본모듈의 주소는

$(x,y)$ 로 나타내고 노드 주소는  $(x,y,p)$ 로 나타낸다. “노드  $(x,y,p)$ 는 기본모듈  $(x,y)$ 에 속한다”라고 말한다.  $x$ 는 기본모듈의  $x$ 축의 좌표,  $y$ 는 기본모듈의  $y$ 축의 좌표,  $p$ 는 기본모듈인 피터슨 그래프에 있는 노드의 주소이다. 피터슨-토러스  $PT(m,n)$ 의 노드정의는 다음과 같다.  
 $V_{pt} = \{(x,y,p), 0 \leq x < m, 0 \leq y < n, 0 \leq p \leq 9\}$

$PT(m,n)$ 의 에지는 다음과 같이 내부에지와 외부에지로 나눈다. 같은 기본모듈에 속한 노드들을 연결하는 에지를 내부에지라고 하고, 내부에지는 피터슨 그래프의 에지를 그대로 사용한다. 서로 다른 기본모듈에 있는 노드를 연결하는 에지를 외부에지라고 하고 다음과 같이 정의한다. 아래 에지를 나타내는 수식에서 심벌 ‘/’는 나머지 연산자이다. ① 세로에지는  $((x,y,6), (x,(y+1)/n,9))$ 과  $((x,y,9), (x,(y-1+n)/n,6))$ 이다. ② 가로에지는  $((x,y,1), ((x+1)/m,y,4))$ 과  $((x,y,4), ((x-1+m)/m,y,1))$ 이다. ③ 사선에지는  $((x,y,2), ((x+1)/m, (y+1)/n, 3))$ 과  $((x,y,3), ((x-1+m)/m, (y-1+n)/n, 2))$ 이다. ④ 역 사선에지는  $((x,y,7), ((x-1+m)/m, (y+1)/n, 8))$ 과  $((x,y,8), ((x+1)/m, (y-1+n)/n, 7))$ 이다. ⑤ 지름에지는  $((x,y,0), ((x + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)/m, (y + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)/n, 5))$ 과  $((x,y,5), ((x - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + m)/m, (y - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + n)/n, 5))$ 이다.

그림 1의 (a)는 피터슨-토러스  $PT(5,5)$ 에서 기본모듈을 격자점으로 표현하였다. 기본모듈은 이웃한 기본모듈들과 완전 그래프 형태로 연결되어 있다. 가장자리를 제외한 모든 기본모듈은 지름에지를 제외한 에지들이 그려져 있으며, 기본모듈 (0,0)의 지름에지만 굵은 파선(짧은 선이 일정한 규칙으로 반복되는)으로 그려져 있다. 가장자리의 기본모듈들은 랩어라운드(wraparound) 에지가 생략되어 있으나 4개의 꼭지점에 있는 기본모듈은 몇 개의 랩어라운드 에지가 굵은 실선으로 그려져 있다.



(a)  $PT(5,5)$  (b) 피터슨 그래프  
 그림 1. 피터슨-토러스  $PT(5,5)$

피터슨-토러스  $PT(m,n)$ 의 기본모듈인 피터슨 그래프 (그림 1의 (b))를 보면, 노드 1, 4는 가로에지, 노드 6, 9는 세로에지, 노드 2, 3은 사선에지, 노드 7, 8은 역 사선에지, 노드 0, 5는 지름에지와 결합된 노드들이다.  $PT(m,n)$ 은 노드수  $10mn$ , 에지 수  $20mn$ , 연결도 4 그리고 분지수 4를 가지는 정규 그래프이다.  $PT(m,n)$ 는  $m=n$  일 경우 지름이  $1.5n+2$ 이고, bisection width가  $n^2+5n$ 이다[6].

2.2 하이퍼큐브

$n$ -차원 하이퍼큐브  $Q_n$ 는  $2^n$ 개의 노드와  $n2^{n-1}$ 개의 에지로 구성된다. 각 노드의 주소는  $n$ -비트 이진수로 표현될 수 있고, 임의의 두 노드의 주소가 정확히 1 비트만 다를 때 그들 사이에 에지가 있다. 따라서 하이퍼큐브  $Q_n$ 는 분지수가  $n$ 인 정규 그래프이다. 하이퍼큐브  $Q_n$ 에서 위의 정의와 같이 주소를 붙이는 방법은  $n!2^n$ 이다[3]. 하이퍼큐브  $Q_n$ 는 다음과 같은 단순한 재귀적 구조를 가지고 있으므로 확장성이 매우 좋다. 하이퍼큐브  $Q_n$ 은 그래프의 곱을 이용하여 다음과 같이 재귀적으로 정의될 수 있다.

$$Q_1 = K_2,$$

$$Q_n = K_2 \times Q_{n-1} \text{ (단, } K_2 \text{는 노드가 두 개인 완전 그래프)}$$

하이퍼큐브  $Q_n$ 에서 노드 중복이 없는 두 개의  $Q_{n-1}$ 을 찾는 방법은  $n$ 가지인데, 두 개의  $Q_{n-1}$ 의 각 노드는 일대일로 서로 연결되어 있으며 서로 대응하는 각 노드 쌍은  $i$  번째 비트만 다르고 나머지 비트들이 같다. 따라서 하이퍼큐브  $Q_n$ 의 임의의 두 노드  $v$ 와  $w$ 에 대하여  $v$ 와  $w$ 가 인접할 때  $v$ 에 인접한 나머지 노드들과  $w$ 에 인접한 나머지 노드들은 각각 일대일로 연결되어 있다. 그림 2는 4차원 하이퍼큐브이다.

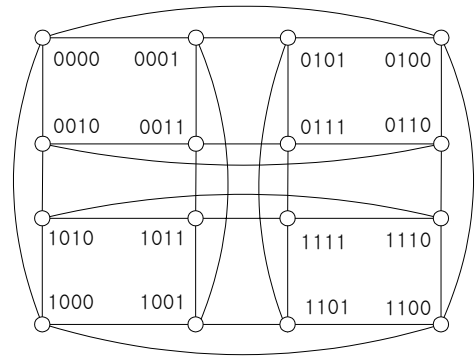


그림 2. 4-차원 하이퍼큐브  $Q_4$

하이퍼큐브의 지름은  $\log_2 n$  ( $n$ =노드 수)으로 메쉬 부류보다 큰 향상을 가져왔다. 하이퍼큐브는 노드-에지 대칭이고 이분할 그래프이다. 단순한 라우팅 알고리즘과 재귀적 성질을 가지는 그래프로서 대중적으로 연구되고, iPSC/2, iPSC/860, n-CUBE/2 시스템으로 상용화 되었다[4].

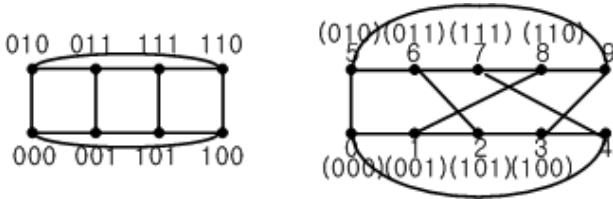
3 하이퍼큐브를 PT에 임베딩

임베딩의 기본적인 전략은 하이퍼큐브를 3차원 하이퍼큐브 조각으로 나누고, 그 조각을 PT의 기본모듈에 사상하는 것이다. 3차원 하이퍼큐브를 하이퍼큐브의 기본모듈이라고 한다. 그림 4의 (a)는  $Q_5$ 를 나타낸다. 노드의 주소는 5 비트로 이루어져 있는데 편의상 LSB(least significant bit)에서부터 3자리와 나머지(그림 4의 (a)에서는 MSB(most significant bit)에서부터 2자리)는 별도로 표현하였다.

**보조정리 1** 하이퍼큐브의 기본모듈  $Q_3$ 는 피터슨 그래프로 확장율 10/8 연결율 2 밀집율 2에 임베딩 가능하다.

**증명** 그림 3의 (b)에서 괄호안의 이진 비트스트링은 피터슨 그래프에 사상되는 하이퍼큐브  $Q_3$ 의 주소이다. 하이퍼

큐브  $Q_3$ 의 에지 (000, 100)은 피터슨 그래프의 경로 0, 4, 3으로 사상되고, 에지 (010, 110)은 경로 5, 9, 8로 사상되고, 에지 (001, 011)은 경로 1, 2, 6으로 사상되고, 에지 (101, 111)은 경로 2, 6, 7로 사상되고, 에지 (100, 110)은 경로 3, 9, 8로 사상된다. 앞 문장에 적혀 있지 않는  $Q_3$ 의 8개의 에지들은 피터슨 그래프의 에지로 사상된다.  $Q_3$ 의 8개의 에지들은 연장율은 2이고 8개의 에지는 연장율을 1이다. 하이퍼큐브의 에지 (001, 011)과 에지 (101, 111)이 사상되는 피터슨 그래프의 경로는 피터슨 그래프의 에지 2, 6을 포함하므로 밀집율 2이다.  $\square$



(a) 3차원 하이퍼큐브  $Q_3$  (b) 피터슨 그래프의 서브 그래프  
그림 3.  $Q_3$ 를 피터슨 그래프에 사상

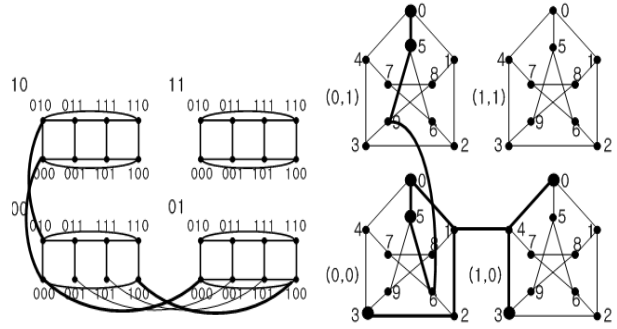
**정리 1** 하이퍼큐브  $Q_{\log_2 n^2 + 3}$ 을  $PT(n, n)$ 에 확장율 10/8, 연장율  $1.5n+2$  그리고 밀집율  $4n$ 에 임베딩 가능하다 ( $n$ 은 2의 지수 승).

**증명** 하이퍼큐브  $Q_{\log_2 n^2 + 3}$ 의 노드수는  $8n^2$ 이고,  $PT(n, n)$ 의 노드수는  $10n^2$ 이므로 확장율은 10/8이다. 하이퍼큐브  $Q_{\log_2 n^2 + 3}$ 의 노드  $u$ 의  $i$ 번째 비트를  $u_i$ 라고 한다.  $u$ 의 주소에서 LSB로부터 3번째 비트까지를 제외하고 짝수 번째 비트를 순서대로 조합한  $x(u) = u_{\log_2 n^2 + 2} \dots u_{i+2} u_i u_{i-2} \dots u_6 u_4$  이라고 하고, 홀수 번째 비트를 순서대로 조합한  $y(u) = u_{\log_2 n^2 + 3} \dots u_{i+3} u_{i+1} u_{i-1} \dots u_7 u_5$  이라고 한다 ( $i$ 는 짝수). 하이퍼큐브의 노드  $u$ 는 PT의 노드  $(x(u)_{(10)}, y(u)_{(10)}, p)$ 에 사상된다. 그림 4의 (a)에서  $x(u)=0, y(u)=0$ 인 8개의 노드들은 하이퍼큐브 기본모듈이고 PT의 기본모듈 (0,0)에 사상된다.  $x(u)=0, y(u)=1$ 은 (0,1)에  $x(u)=1, y(u)=0$ 은 (1,0)에  $x(u)=1, y(u)=1$ 은 (1,1)에 각각 사상된다. 하이퍼큐브 기본모듈을 PT의 기본모듈에 사상하는 방법은 보조정리 1의 증명에 있다.

하이퍼큐브의 에지  $(u, v)$ 에서  $u$ 와  $v$ 는 정확히 1비트 다르고,  $u_i \neq v_i$ 이다 ( $1 \leq i \leq \log_2 n^2 + 3$ ).  $i \leq 3$  일 경우 에지  $(u, v)$ 는 하이퍼큐브의 같은 기본모듈 안에 있는 노드들을 연결하는 에지이고,  $i \geq 4$  일 경우 에지  $(u, v)$ 는 하이퍼큐브의 서로 다른 기본모듈 간의 노드들을 연결하는 에지이다. 하이퍼큐브의 에지를 두 가지의 경우로 나누어 분석한다.

경우 1.  $i \leq 3$  일 경우

에지  $(u, v)$ 에서, 노드  $u$ 는 PT의 노드  $(x(u)_{(10)}, y(u)_{(10)}, p)$ 에 사상되고, 노드  $v$ 는 PT의 노드  $(x(v)_{(10)}, y(v)_{(10)}, p')$ 에 사상된다.  $i \leq 3$  이면  $x(u)_{(10)} = x(v)_{(10)}, y(u)_{(10)} = y(v)_{(10)}, p \neq p'$ 이다.  $i \leq 3$ 의 의미는 노드  $u$ 와  $v$ 가 같은 하이퍼큐브 기본모듈에 있는 노드이고, 같은 PT의 기본모듈로 사상된다는 의미이다. 이 에지들에 대한 사상은 보조정리 1의 증명에 있다.



(a)  $Q_5$  (b)  $PT(2,2)$   
그림 4.  $Q_5$ 를  $PT(2,2)$ 에 임베딩

경우 2.  $i \geq 4$  일 경우

에지  $(u, v)$ 에서, 노드  $u$ 는 PT의 노드  $(x(u)_{(10)}, y(u)_{(10)}, p)$ 에 사상되고, 노드  $v$ 는 PT의 노드  $(x(v)_{(10)}, y(v)_{(10)}, p')$ 에 사상된다.  $i \geq 4$ 의 의미는 노드  $u$ 와 노드  $v$ 가 하이퍼큐브의 서로 다른 기본모듈에 있고, 서로 다른 PT의 기본모듈로 사상된다는 의미이다.  $u_3 u_2 u_1 = v_3 v_2 v_1$ 이므로 하이퍼큐브의 기본모듈에서의 주소 스트링은 같다.  $x(u)$ 의  $t$  번째 비트를  $x(u)_t$ 라고 하고,  $y(u)$ 의  $t$  번째 비트를  $y(u)_t$ 라고 한다 ( $1 \leq t \leq \log_2 n^2 / 2$ ).

$i$ 가 홀수 일 경우  $x(u)_{(10)} = x(v)_{(10)}, y(u)_{(10)} \neq y(v)_{(10)}, p = p'$ 이고, 노드  $u, v$ 는 PT 기본모듈의  $x$ 값이 같은 기본모듈로 사상된다.  $p = p'$ 이므로 사상된 PT의 기본모듈에서 피터슨 그래프의 주소도 같다. 에지  $(u, v)$ 에 대응하는 PT의 경로를 보면,  $p = 2, 5, 7$ 일 경우  $(x(u)_{(10)}, y(u)_{(10)}, p), (x(u)_{(10)}, y(u)_{(10)}, 6), [(x(u)_{(10)}, y(u)_{(10)} + 1, 9), (x(u)_{(10)}, y(u)_{(10)} + 1, 5), (x(u)_{(10)}, y(u)_{(10)} + 1, 6)], \dots, (x(v)_{(10)}, y(v)_{(10)}, 9), (x(v)_{(10)}, y(v)_{(10)}, p''), (x(v)_{(10)}, y(v)_{(10)}, p)$ 이다.  $p$ 가 2이면  $p'' = 3$ ,  $p$ 가 5이면  $p'' = 5$ ,  $p$ 가 7이면  $p'' = 8$ 이다. []부분은 중간경유 모듈에서 내부경로이다. 반복구간 ...은 []부분을  $|x(u)_{(10)} - x(v)_{(10)}| - 1$  만큼 반복한다. 시작노드에서 내부경로길이 1 도착노드에서 내부경로 길이 2, 중간경유모듈에서 내부경로길이  $(|x(u)_{(10)} - x(v)_{(10)}| - 1) \times 2$ 이고, 외부경로길이는  $|x(u)_{(10)} - x(v)_{(10)}| - 1 + 1$ 이다.  $p = 3, 5, 8$ 일 경우  $(x(u)_{(10)}, y(u)_{(10)}, p), (x(v)_{(10)}, y(v)_{(10)}, p''), (x(u)_{(10)}, y(u)_{(10)}, 6), [(x(u)_{(10)}, y(u)_{(10)} + 1, 9), (x(u)_{(10)}, y(u)_{(10)} + 1, 5), (x(u)_{(10)}, y(u)_{(10)} + 1, 6)], \dots, (x(v)_{(10)}, y(v)_{(10)}, 9), (x(v)_{(10)}, y(v)_{(10)}, p)$ 이다.  $p$ 가 3이면  $p'' = 2$ ,  $p$ 가 5이면  $p'' = 5$ ,  $p$ 가 8이면  $p'' = 7$ 이다. 시작노드에서 내부경로길이 2 도착노드에서 내부경로 길이 1, 중간경유모듈에서 내부경로길이  $(|x(u)_{(10)} - x(v)_{(10)}| - 1) \times 2$ 이고, 외부경로길이는  $|x(u)_{(10)} - x(v)_{(10)}| - 1 + 1$ 이다.  $p = 0, 1, 4, 6, 9$ 일 경우  $(x(u)_{(10)}, y(u)_{(10)}, p), (x(v)_{(10)}, y(v)_{(10)}, p''), (x(u)_{(10)}, y(u)_{(10)}, 6), [(x(u)_{(10)}, y(u)_{(10)} + 1, 9), (x(u)_{(10)}, y(u)_{(10)} + 1, 5), (x(u)_{(10)}, y(u)_{(10)} + 1, 6)], \dots, (x(v)_{(10)}, y(v)_{(10)}, 9), (x(v)_{(10)}, y(v)_{(10)}, p''), (x(v)_{(10)}, y(v)_{(10)}, p)$ 이다.  $p$ 가 0이면  $p'' = 5, p''' = 5, p$ 가 1이면  $p'' = 2, p''' = 8, p$ 가 4이면  $p'' = 7, p''' = 3, p$ 가 6이면  $p'' = 6, p''' = 5, p$ 가 9이면  $p'' = 5, p''' = 9$ 이다. 에지  $((x, y, p), (x, y, p'))$ 에서  $p = p'$ 일 경우 에지가 없는 것으로 간주한다. 시작노드에서 내부경로길이 2 도착노드에서 내부경로 길이 2, 중간경유모듈에서 내부경로길이  $(|x(u)_{(10)} - x(v)_{(10)}| - 1) \times 2$ 이고, 외부경로길이는

$|x(u)_{(10)} - x(v)_{(10)}| - 1 + 1$ 이다.

$y(u)_t \neq y(v)_t$ 라고 하면,  $y(u)_{(10)}$ 와  $y(v)_{(10)}$ 는  $2^{t-1}$  차이가 있고  $t$ 가 가장 큰 값  $\log_2 n^2 / 2$ 일 때  $n/2$  차이가 있다. 예지  $(u, v)$ 에서 노드  $u$ 가 사상된 PT의 노드  $(x(u)_{(10)}, y(u)_{(10)}, p)$ 과 노드  $(x(v)_{(10)}, y(v)_{(10)}, p)$  사이에는  $2^{t-1}$ 개의 외부예지가 있고, 최대 개수는  $n/2$ 개이다. PT의 두 노드 사이의 중간경유모듈과 노드  $(x(u)_{(10)}, y(u)_{(10)}, p)$ , 노드  $(x(v)_{(10)}, y(v)_{(10)}, p)$ 에서의 내부예지의 수는  $(n/2 - 1 + 2) \times 2$ 이고 외부예지의 수는  $n/2$ 이므로 (내부예지의 수 + 외부예지의 수) =  $1.5n + 2$ 이다.  $i$ 가 홀수일 때 하이퍼큐브 예지  $(u, v)$ 는 PT에 연장을  $1.5n + 2$ 에 임베딩 가능하다.  $i$ 가 짝수 일 경우  $x(u)_{(10)} \neq x(v)_{(10)}$ ,  $y(u)_{(10)} = y(v)_{(10)}$ ,  $p = p'$ 이고, 노드  $u, v$ 는 PT의 기본모듈의  $y$ 값이 같은 기본모듈로 사상된다.  $p = p'$ 이므로 사상된 PT의 기본모듈에서 피터슨 그래프의 주소도 같다. 증명은  $i$ 가 홀수 일 경우와 같다.

$i$ 가 홀수 일 경우 예지  $(u, v)$ 의 노드  $u$ 와  $v$ 가 사상되는 PT의 노드  $(x(u)_{(10)}, y(u)_{(10)}, p)$ 와 노드  $(x(v)_{(10)}, y(v)_{(10)}, p)$ 가 가장 먼 거리에 있을 때  $n/2$ 의 거리에 있고, 그 두 노드 사이에 있는  $n/2$ 개의 중간경유 기본모듈은 모두 예지  $((x, y, 6), (x, y + 1, 9))$ 를 이용한다.  $i$ 가 짝수일 경우 예지  $((x, y, 4), (x + 1, y, 1))$ 를 이용한다. 따라서 하이퍼큐브를 PT에 밀집율  $n/2 \times 8 = 4n$ 에 임베딩 가능하다.  $\square$

**정리 2** 하이퍼큐브  $Q_{\log_2 n^2 + 4}$ 을  $PT(2n, n)$ 에 확장율  $10/8$ , 연장을  $3n + 2$  그리고 밀집율  $8n$ 에 임베딩 가능하다 ( $n$ 은 2의 지수 승).

**증명**  $PT(2n, n)$ 의 노드수는  $20n^2$ 이고,  $Q_{\log_2 n^2 + 4}$ 의 노드수는  $16n^2$ 이다. 그러므로 확장율  $10/8$ 이다. 이것의 증명은 정리 1의 증명과 같다. 이 임베딩은 단지  $Q_{\log_2 n^2 + 4}$ 가  $Q_{\log_2 n^2 + 3}$ 을 2배로 확장했고,  $PT(2n, n)$ 은  $PT(n, n)$ 을  $x$ 축으로 2배만큼 확장한 것이다. 이 임베딩은  $HP_{\log_2 n^2 + 5}$ 을  $PT(2n, 2n)$ 에 임베딩 하는 것과 결과가 같다. 예지  $(u, v)$ 의 노드  $u$ 와  $v$ 가 사상되는 PT의 노드  $(x(u)_{(10)}, y(u)_{(10)}, p)$ 과 노드  $(x(v)_{(10)'}, y(v)_{(10)'}, p)$ 의 외부 경로길이는 최대  $n$ 이다. 내부 경로길이는  $(n + 1) \times 2$ 이므로 최대 경로길이는  $3n + 2$ 이므로 연장을  $3n + 2$ 에 임베딩 된다. 노드  $(x(u)_{(10)}, y(u)_{(10)}, p)$ 과 노드  $(x(v)_{(10)}, y(v)_{(10)}, p)$ 이 가장 먼 거리에 있을 때  $n$ 의 거리에 있고, 그 두 노드를 출발노드와 목적노드로 하는 경로의 출발점과 경로 상에 있는  $n$ 개의 기본모듈은 모두 같은 외부예지를 이용한다. 따라서 밀집율은  $n \times 8$ 이다.  $\square$

#### 4 결론

상호연결망 사이의 임베딩은 설계된 병렬알고리즘을 재사용 할 수 있게 하는 의미 있는 작업이다. 본 논문에선 널리 알려진 하이퍼큐브 네트워크를 PT 네트워크로 임베딩 하였다. 하이퍼큐브  $Q_{\log_2 n^2 + 3}$ 을  $PT(n, n)$ 에 확장율  $10/8$ , 연장을  $1.5n + 2$  그리고 밀집율  $4n$ 에 임베딩 하였다. 역으로 PT 네트워크에서 개발된 알고리즘을 다른 연결망에서 사용할 수 있도록 PT 네트워크를 다른 연결망에 임베딩 하는 것은 더 연구해볼만한 가치가 있다.

#### 참고문헌

- [1] S.K. Das and A.K. Banerjee. Hyper Petersen network: Yet another hypercube-like topology. In Proceedings of the 4th Symposium on the Frontiers of Massively Parallel Computation (Frontiers' 92), pages 270-277, McLean, Virginia, USA, October 1992. Computer Society Press.
- [2] C. H. Yeh and B. Parhami, "Routing and Embeddings in Cyclic Petersen Networks: An Efficient Extension of the Petersen Graph," 1999 International Conference on Parallel Processing (ICPP'99), pp. 258-265, 1999.
- [3] S. K. Das and A. K. Banerjee "Embeddings into Hyper Petersen networks: yet another hypercube-like interconnection Topology," VLSI Design, Vol. 2, No. 4, pp. 335-351, 1995.
- [4] Y. Saad and M. H. Schultz, "Topological Properties of Hypercubes," IEEE Trans. Comput., Vol. 37, No. 7, pp. 867-872, July 1988.
- [5] J.D. Ullman, Computational Aspects of VLSI. Rockville, md.: Computer Science Press, 1984
- [6] 서정현, 이형욱, 장문석, "멀티컴퓨팅 시스템을 위한 피터슨-토러스(PT) 네트워크", 정보과학회 논문지 게재예정