토러스를 피터슨-토러스(PT) 네트워크에 임베딩

서정현[1], 이형옥[2], 장문석[3], 한순희[4]
순천대학교 {컴퓨터과학과[1], 컴퓨터교육과[2], 컴퓨터과학과[3]}, 전남대학교 모바일 소프트웨어 전공[4]
{jhseo, oklee, jang}@sunchon.ac.kr, shhan@chonnam.ac.kr

Embedding Torus into Petersen-Torus(PT) Networks

Junghyun Seo[1], Hyeongok Lee[2], Moonsuk Jang[3], Soon-Hee Han[4]
{Dept. Computer Sci.[1], Dept. Computer Edu.[2], Dept. Computer Sci.[3]}
Suncheon National Univ., Dept. Mobile Software Chonnam National Univ.[4]

요 약

본 논문은 분지수가 상수인 토러스를 피터슨-토러스 네트워크에 임베딩 가능함을 보인다. 토러스 T($5m,2n$)는 $PT(m,n)$에 연장율 5, 밀집율 5 그리고 확장율 1에 임베딩 가능함을 보였다. 추가로 토러스를 PT에 평균 연장율 3이하에 임베딩 가능함을 보였다. 널리 알려진 토러스 네트워크를 연장율과 밀집율을 5이하에 PT에 임베딩 함으로써 웜홀 라우팅 방식과 store-and-forward 방식 모두에서 임베딩 알고리즘이 사용 가능하고, 일대일 임베딩을 함으로써 시뮬레이션시 프로세서 작업 처리량을 최소화 하였다.

1 서론

상호연결망은 멀티컴퓨팅 시스템에서 프로세서간의 연결 구조를 제공하고 그 위에 작성된 병렬알고리즘의 설계에 중요한 역할을 한다. 새로운 상호연결망이 설계되면 연결망의 구조에 적합한 병렬 알고리즘들이 설계되는데 그 연구비용은 적지 않다. 서로 다른 연결망간의 임베딩은 설계된 알고리즘들을 재사용 할 수 있게 함으로써 알고리즘 설계 연구에 드는 비용을 절감할 수 있다. 임베딩에 관여되는 두 개의 연결망의 구조에 따라 임베딩 알고리즘 작성의 난이도가 결정된다.

상호연결망은 그래프 $G=(V,E)$로 모델링 될 수 있다. 상호연결망의 프로세서는 노드집합 $V(G)$로 표현되고 프로세서간의 통신링크는 에지집합 $E(G)$로 표현된다. 상호연결망 G가 H에 임베딩 되면 G에서 설계된 병렬 알고리즘을 상호연결망 H에 적용할 수 있다. 상호연결망 G(guest)를 상호연결망 H(host)에 임베딩 f 한다는 것은 $V(G)$를 $V(H)$에 사상하고 에지 $E(G)$를 상호연결망 H의 경로(path)에 사상하는 것이다. 임베딩을 평가하는 척도는 확장율(expansion), 부하계수(load factor), 연장율(dilation), 밀집율(congestion)이 있다[4]. 그래프 G의 에지 e의 연장율은 H상에서의 경로 $\rho(e)$의 길이를 말하고, 임베딩 f의 연장율은 G의 모든 에지의 연장율 중 최대값이다. 연장율의 최소값은 1이며, 연장율이 크면 G에서 설계된 알고리즘이 H에서 적용될 때 연장율 만큼 메시지 전송 시간이 길어진다. 그래프 H의 에지 e'의 밀집율은 e'에 포함되는 $\rho(e)$의 개수를 말하고, 임베딩 f의 밀집율은 H의 모든 에지의 밀집율 중 최대값이다. 밀집율의 최적은 1이며, 밀집율이 크면 전송 트래픽이 많이 발생한다[1,2]. 연장율이 크면 store-and-forward 방식의 라우팅에서는 전송시간이 길어지므로 웜홀(wormhole) 라우팅 방식이 적합하고, 밀집율이 크면 웜홀 방식에서 메시지 데드락(dead-lock)의 가능성이 증가한다.

다중 컴퓨팅에서 메시지를 전송하는 방법으로 회선 스위칭(circuit switching) 방식과 패킷 스위칭(packet switching) 방식이 있다. 회선 스위칭 방식은 메시지를 전송하고자 할 때 목적지까지 회선을 설정하여 메시지를 전송하는 동안 두 프로세서가 전용으로 사용하도록 한다. 패킷 스위칭 방식은 store-and-forward 방식, virtual cut-through 방식, 웜홀(wormhole) 방식으로 나눌 수 있다. store-and-forward 방식은 패킷이 전송될 때 경로상에 있는 중간 노드의 기억장치에 저장하였다가 다시 전송하는 방식으로 메시지 지연시간이 길고, 많은 기억장치를 필요로 한다. 웜홀 방식은 하나의 패킷을 플릿(flit)이라는 작은 단위로 나누어 라우터의 지원을 받아 메시지의 가장 앞에 있는 헤더 플릿이 라우팅 할 경로를 결정하고, 나머지 플릿은 헤데 플릿의 뒤를 연속적으로 따르는 방식이다. 본 논문에서는 두 가지 라우팅 방식에 모두 적합하도록 연장율과 밀집율을 5 이하에 임베딩 하였다.

새로운 상호연결망이 설계되면 다른 연결망에서 개발된 알고리즘을 재사용하기 위해 새로운 상호연결망으로 임베딩하는 연구가 진행된다. 상호연결망 사이의 임베딩 연구는 메쉬, 하이퍼큐브 그리고 스타그래프를 다른 상호연결망에 임베딩하는 연구[2,3,5]가 있고, 메쉬, 하이퍼큐브 그리고 스타그래프 상호간의 임베딩에 대한 연구

† 본 연구는 지식경제부 및 정보통신연구진흥원의 대학 IT연구센터 지원사업의 연구결과로 수행되었음 (IITA-2008-C1090-0801-0001

[1,5,6,7]가 있다.

본 논문에서는 노드수가 증가함에 따라 분지수가 상수인 토러스를 PT 네트워크로 일대일 임베딩 한다. 상호연결망의 임베딩 결과로 노드 사이에 일대일 임베딩 방법은 부하계수가 1이므로 프로세서에서 작업처리 시간이 빠르다. 토러스를 PT에 확장율 2, 연장율 5, 밀집율 5이하에 임베딩 하였다. 본 논문의 구성은 2장에서 토러스와 PT를 소개한다. 3장에서 토러스를 PT 네트워크에 임베딩 하였다. 마지막으로 결론을 맺는다.

2 관련연구

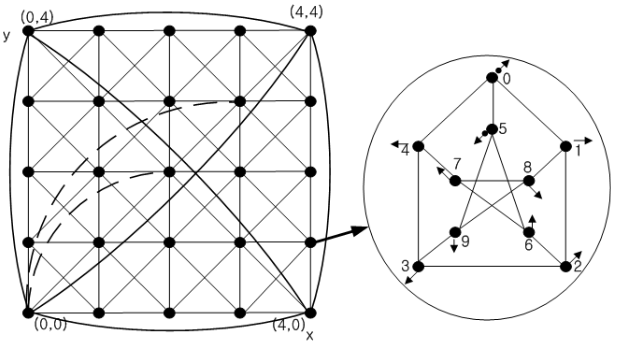
메쉬 구조는 VLSI 회로설계 분야에서 많이 이용되는 구조로 현재까지 널리 이용되고 있으며 다양한 시스템으로 상용화되었다. 낮은 차원의 메쉬는 설계하기 쉽고 알고리즘 관점에서도 매우 유용하므로 병렬처리 컴퓨터의 연결망으로 많이 쓰인다.

2.1 피터슨-토러스 $PT(m,n)$ 네트워크 정의

피터슨-토러스 $PT(m,n)(m,n \geq 2)$은 피터슨 그래프(그림 1의 (b))를 기본모듈로 하고, 기본모듈 m(x축)×n(y축)개를 격자점에 배치하고 에지 정의에 의해 연결한다. 피터슨-토러스 네트워크 $PT(m,n)=(V_{pt},, E_{pt})$이다. 본 논문에서는 $PT(m,n)$를 그림 1의 (a)와 같이 2차원 그래프에 사상시켜 설명한다. 단위 피터슨 그래프를 기본모듈이라고 하며, 기본모듈은 x와 y의 교차점에 있다. 기본모듈의 주소는 (x, y)로 나타내고 노드 주소는 (x,y,p)로 나타낸다. "노드 (x,y,p)는 기본모듈 (x,y)에 속한다"라고 말한다. 노드 주소에서 x는 기본모듈의 x축의 좌표, y는 기본모듈의 y축의 좌표, p는 기본모듈인 피터슨 그래프에 있는 노드의 주소이다. 피터슨-토러스 $PT(m,n)$의 노드정의는 다음과 같다.

$V_{pt}=\{(x,y,p),\ 0 \leq x < m,\ 0 \leq y < n,\ 0 \leq p \leq 9\}$

$PT(m,n)$의 에지는 다음과 같이 내부에지와 외부에지로 나눈다. 같은 기본모듈에 속한 노드들을 연결하는 에지를 내부에지라고 하고, 내부에지는 피터슨 그래프의 에지를 그대로 사용한다. 서로 다른 기본모듈에 있는 노드를 연결하는 에지를 외부에지라고 하고 다음과 같이 정의한다. 아래 에지를 나타내는 수식에서 심벌 '/'는 나머지 연산자이다. ① 세로에지는 $((x,y,6),\ (x,(y+1)/n,9))$과 $((x,y,9),\ (x,(y-1+n)/n,6))$이다. ② 가로에지는 $((x,y,1),\ ((x+1)/m,y,4))$과 $((x,y,4),\ ((x-1+m)/m,y,1))$이다. ③ 사선에지는 $((x,y,2),\ ((x+1)/m,(y+1)/n,3))$과 $((x,y,3),((x-1+m)/m,(y-1+n)/n,2))$이다. ④ 역 사선에지는 $((x,y,7),\ ((x-1+m)/m,(y+1)/n,8))$과 $((x,y,8),\ ((x+1)/m,(y-1+n)/n,7))$이다. ⑤ 지름에지는 $((x,y,0),\ ((x+\lfloor \frac{m}{2} \rfloor)/m,(y+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)/n,5))$과 $((x,y,0),\ ((x-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+m)/m,(y-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+n)/n,5))$이다. 그림 1의 (a)에서 피터슨-토러스 $PT(5,5)$는 기본모듈을 격자점으로 표현하였다. 기본모듈은 이웃한 기본모듈들과 완전그래프(complete graph) 형태로 연결되어 있다. 가장자리를 제외한 모든 기본모듈은 지름에지를 제외한 에지들이 그려져 있으며, 기본모듈 (0,0)의 지름에지만 굵은 파선(짧은 선이 일정한 규칙으로 반복되는)으로 그려져 있다. 가장자리의 기본모듈들은 랩어라운드(wraparound) 에지가 생략되어 있으나 4개의 꼭지점에 있는 기본모듈은 몇 개의 랩어라운드 에지가 굵은 실선으로 그려져 있다.



(a) $PT(5,5)$ (b) 피터슨 그래프

그림 1. 피터슨-토러스 $PT(5,5)$

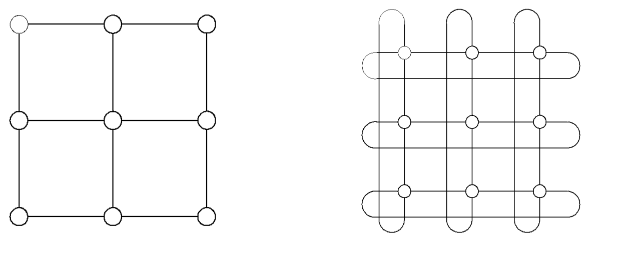
피터슨-토러스 네트워크 $PT(m,n)$의 기본모듈인 피터슨 그래프(그림 1의 (b))에서 노드 1, 4는 가로에지, 노드 6, 9는 세로에지, 노드 2, 3은 사선에지, 노드 7, 8은 역사선에지, 노드 0, 5는 지름에지와 결합된 노드들이다. $PT(m,n)$은 노드수 $10mn$, 에지 수 $20mn$ 그리고 분지수(degree) 4를 가지는 정규그래프(regular graph)이다. $PT(m,n)$는 $m=n$인 경우 지름이 $1.5n+2$이고, bisection width가 n^2+5n이다[9].

2.2 토러스(메쉬)

토러스는 메쉬에 랩어라운드(wraparound) 에지를 추가한 연결망이다. m-차원 메쉬 $M_m(N)$는 N^m개의 노드와 mN^m-mN^{m-1}개의 에지로 구성된다. 각 노드의 주소는 m-차원 벡터로 표현될 수 있고, 임의의 두 노드의 주소가 한 개의 차원에서 1차이 날 때 그들 사이에 에지가 있다. i번째 차원이 다른 두 노드 사이의 에지들을 i-차원 에지라 할 때, 3-차원 메쉬 $M_3(4)$의 두 노드 (4,1,1)와 (4,1,2)은 3-차원 에지로 연결되어 있다. $M_m(N)$은 그래프의 곱을 이용하여 다음과 같이 정의될 수 있다.

$M_1(N)$=길이 N인 선형 배열

$M_m(N)=M_1(N) \times M_{m-1}(N)$



(a) 3×3 메쉬 (b) 3×3 토러스

그림 2. 2차원 메쉬와 토러스

여기에서 임의의 단순그래프 G와 H의 곱은 단순그래프 $G \times H$로 나타내며, 노드들의 집합은 $V(G) \times V(H)$이다. 이때 노드 (u,v)가 노드 (u',v')와 인접할 필요충분조건은 $u=u'$이고 $vv' \in E(H)$이거나, $v=v'$이고 $uu' \in E(G)$인 경우이다. 따라서 $M_m(N)$이 노드 중복 없는 N개의 $M_{m-1}(N)$을 부그래프로 가지는 것은 당연하다. $M_m(N)$는 $m=1$일 경우 선형 배열이고 $N=2$인 경우 하이퍼큐브이다.

토러스는 메쉬의 행과 열들을 링 형태를 이루게 한 랩어라운드 에지를 추가하여 구성한 연결망이다. 예를 들어,

3×3 토러스에서 (0,2)와 (2,2)는 랩어라운드 에지로 연결되어 있다. $k×n$으로 표현되는 토러스는 $k×n$개의 노드와 $k(k-2)+n^2+k+n$개의 에지로 구성되며, 분지수는 4, 지름은 $\sqrt{n}$이다. 토러스는 메쉬의 지름을 개선하였고, 메쉬의 변형된 연결망 중에서 지름이 우수하다.[8]

3 토러스를 PT로 임베딩

그래프 G의 그래프 H에 대한 임베딩 f는 다음과 같이 정의되는 함수의 쌍(ø,ρ)을 말한다. ø는 G의 정점 집합 $V(G)$를 H의 정점 집합 $V(H)$에 대응시키는 함수이고, ρ는 G의 에지 $e=(v,w)$를 $ø(v)$와 $ø(w)$를 잇는 H상의 경로와 대응시키는 함수이다. 확장율은 G의 정점의 개수에 대한 H의 정점의 개수의 비를 말한다. 확장율이 1보다 적은 경우 다대일 임베딩이라고 하고 G에서 설계된 알고리즘을 H에서 효율적으로 사용하기 어렵다. 확장율이 1과 같거나 큰 경우 일대일 임베딩이라 하고 확장율이 1 보다 크면 G에서 설계된 알고리즘이 H에서 실행될 때 H의 모든 노드를 이용하지 못하는 비효율이 발생한다. 확장율은 1에 근접할수록 좋다. 다대일 임베딩에서 노드 $V(H)$의 하나의 노드에 사상되는 노드집합 $V(G)$의 최대 개수를 부하계수라고 하고, 부하계수가 크면 프로세서의 작업처리 시간이 증가한다. 확장율이 1보다 큰 경우 그래프 G의 한 개 노드를 그래프 H의 여러 개의 노드에 사상하는 것으로 일대다 사상이라고 한다. 일대다 사상은 임베딩의 연장율을 줄이기 위해 사용하는 방법이다[1,2]. 본 논문에서는 노드 사이의 일대일 임베딩을 대상으로 한다.

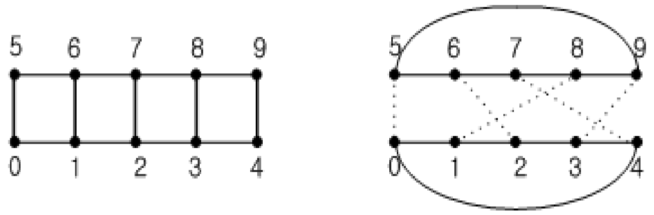
3.1 토러스(메쉬)를 PT로 임베딩

토러스를 PT에 임베딩 하는 기본전략은 5×2 메쉬를 PT의 기본모듈에 사상하는 것이다. 그림 4의 (a)는 8×5 토러스를 5×2 메쉬 단위로 쪼개어 놓은 그림이다. $j×k$ 토러스 $T(j,k)$는 jk개의 정점들과 $2jk$개의 에지들로 구성되며 $T(j,k)$ = (V_t, E_t)로 정의한다. 토러스 $T(j,k)$의 정의는 아래와 같다. 에지 정의에서 '/'는 나머지 연산자이다.

$V_t=\{(a,b)\,|\,(0\le a<j,\ 0\le b<k)\}$

$E_t=\{((a,b),((a\pm1+j)/j,b)),((a,b),(a,(b\pm1+k)/k))\,|\,(0\le a<j,\ 0\le b<k)\}$

보조정리 1 5×2 메쉬는 피터슨 그래프에 연장율 2, 밀집율 2 그리고 확장율 1에 임베딩 가능하다.



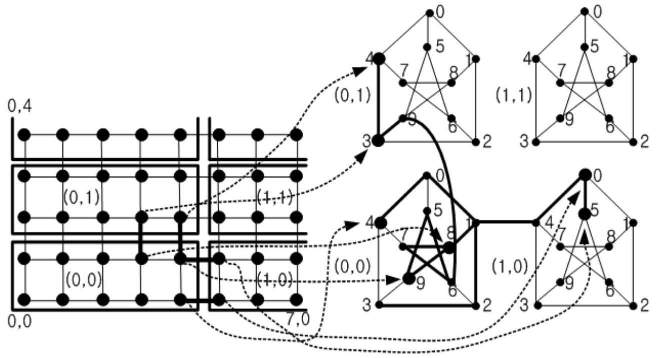
(a) 5×2 메시 (b) 피터슨 그래프의 서브 그래프

그림 3. 5×2 메쉬를 피터슨 그래프에 사상

증명 그림 3에서 5×2 메쉬의 노드를 메쉬의 주소와 같은 주소를 가진 피터슨 그래프의 노드로 일대일 사상하면 확장율 1에 사상된다. 5×2 메쉬의 노드 주소를 a라고 하면, 5×2 메쉬의 (a, $a+1$) 에지들이 사상된 피터슨 그래프의 경로의 최대 길이는 1이다($0\le a\le9$). 5×2 메쉬의 (a, $a+5$) 에지들이 사상된 피터슨 그래프의 경로길이는 에지 (0, 5)에서 경로길이 1이고, 나머지 에지에서 사상된 피터슨 그래프의 경로길이는 2이다. 5×2 메쉬의 에지 (1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9)들이 사상된 피터슨 그래프의 경로를 보면, 경로길이는 2이고 피터슨 그래프의 에지 (1, 2), (6, 7), (2, 6), (3, 4), (8, 9), (3, 9)에서 밀집율이 2이다. □

정리 1 토러스 $T(5m,2n)$는 $PT(m,n)$에 연장율 5, 밀집율 5 그리고 확장율 1에 임베딩 가능하다.

증명 토러스 $T(5m,2n)$의 노드수는 $10mn$이고 $PT(m,n)$의 노드수는 $10mn$이다. 그러므로 확장율 1에 임베딩 가능하다. 토러스의 노드를 (a,b)라고 한다($0\le a<5m, 0\le b<2n$). 토러스의 노드 (a,b)를 PT의 노드 ($\left\lfloor \frac{a}{5} \right\rfloor$, $\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor$, p)에 사상한다. 그림 4의 (a)에서 네모박스 안의 10개의 토러스의 노드들을 토러스 기본모듈이라고 하고 PT의 기본모듈로 사상한다. (숫자, 숫자)로 표시된 주소가 토러스의 기본모듈이 사상될 PT의 기본모듈의 주소이다. 보조정리 1과 같이 토러스 기본모듈의 10개 노드들은 PT 기본모듈의 10개 노드로 사상되는데, 그 주소 p는 다음과 같다. b가 짝수이면 $p=(a/5)$이고, b가 홀수이면 $p=(a/5)+5$이다. 수식에서 '/'는 나머지 연산자이다.



(a)토러스 (b) 피터슨-토러스

그림 4. 토러스를 PT에 임베딩

토러스 기본모듈을 PT 기본모듈로 사상하는 것은 보조정리 1의 증명에 보였으므로 토러스의 기본모듈과 기본모듈을 연결하는 에지의 사상에 대해 살펴본다. 토러스의 기본모듈과 기본모듈사이의 에지는 두 가지로 구분할 수 있는데, b가 홀수 일 경우 에지 ((a,b), ($a,b+1$))와 $a/5=4$ 일 경우 에지 ((a,b), ($a+1,b$))가 있다. $x=\left\lfloor \frac{a}{5} \right\rfloor$, $y=\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor$라고 한다.

경우 1. b가 홀수 일 경우

b가 홀수 일 경우 토러스의 에지 ((a,b), ($a,b+1$))의 노드 (a,b)는 PT의 노드 ($x,y,(a/5)+5$)에 사상되고, 노드 ($a,b+1$)는 PT의 노드 ($x,y+1,a/5$)에 사상된다. $a/5$가 0일 때 토러스의 에지 ((a,b),($a,b+1$))가 사상되는 PT의 경로는 ($x,y,5$), ($x,y,6$), ($x,y+1,9$), ($x,y+1,5$), ($x,y+1,0$)이고 경로길이는 4이다. $a/5$가 1일 때 토러스의 에지 ((a,b),($a,b+1$))가 사상되는 PT의 경로는 ($x,y,6$), ($x,y+1,9$), ($x,y+1,8$), ($x,y+1,1$)이

고 경로길이는 3이다. a/5가 2일 때 토러스의 에지 $((a,b),(a,b+1))$가 사상되는 PT의 경로는 $(x,y,7)$, $(x,y,6)$, $(x,y+1,9)$, $(x,y+1,3)$, $(x,y+1,2)$이고 경로길이는 4이다. a/5가 3일 때 토러스의 에지 $((a,b),(a,b+1))$가 사상되는 PT의 경로는 $(x,y,8)$, $(x,y,7)$, $(x,y,6)$, $(x,y+1,9)$, $(x,y+1,3)$이고 경로길이는 4이다. a/5가 4일 때 토러스의 에지 $((a,b),(a,b+1))$가 사상되는 PT의 경로는 $(x,y,9)$, $(x,y,5)$, $(x,y,6)$, $(x,y+1,9)$, $(x,y+1,3)$, $(x,y+1,4)$이고 경로길이는 5이다. 따라서 토러스의 에지 $((a,b),(a,b+1))$는 연장율 5에 임베딩 가능하다. 토러스의 에지 $((a,b),(a, b+1))$가 사상되는 PT의 5개의 경로는 모두 에지 $((x,y,6), (x,y+1,9))$를 포함하므로 밀집율 5에 임베딩 가능하다.

경우 2. $a/5=4$인 경우

b가 짝수이고 $a/5=4$인 경우 토러스의 에지 $((a,b)$, $(a+1,b)$의 노드 (a,b)는 PT의 노드 $(x,y,4)$에 사상되고, 노드 $(a+1,b)$는 PT의 노드 $(x+1,y,0)$에 사상된다. 토러스의 에지 $((a,b),(a+1,b))$가 사상되는 PT의 경로는 $(x,y,4)$, $(x,y,0)$, $(x,y,1)$, $(x+1,y,4)$, $(x+1,y,0)$이고 경로길이는 4이다. $a/5=4$이고 b가 홀수 일 경우 토러스의 에지 $((a,b),(a+1,b)$의 노드 (a,b)는 PT의 노드 $(x,y,9)$에 사상되고, 노드 $(a+1,b)$는 PT의 노드 $(x+1,y,5)$에 사상된다. 토러스의 에지 $((a,b)$, $(a+1,b)$가 사상되는 PT의 경로는 $(x,y,9)$, $(x,y,8)$, $(x,y,1)$, $(x+1,y,4)$, $(x+1,y,0)$, $(x+1,y,5)$이고 경로길이는 5이다. 따라서 토러스의 에지 $((a,b)$, $(a+1,b))$는 연장율 5에 임베딩 가능하다. 토러스의 에지 $((a,b)$, $(a+1,b)$에 대응하는 PT의 2개의 경로는 모두 에지 $((x,y,1)$, $(x+1,y,4))$를 포함하므로 밀집율 2에 임베딩 가능하다□

따름정리 1 토러스 T$(5m,2n)$는 $PT(m,n)$에 평균연장율 3 이하에 임베딩 가능하다.

증명 토러스의 모든 기본모듈에서 PT 기본모듈로 임베딩하는 연장율이 같고 토러스의 기본모듈사이의 에지들도 연장율이 같으므로 기본모듈 하나의 연장율 평균이 전체 평균이다. 보조정리 1의 증명에 의해서 토러스의 기본모듈에 있는 11개의 에지는 PT에 연장율 1에 임베딩 되고, 4개의 에지는 PT에 연장율 2에 임베딩 된다. 정리 1의 증명에 의해서 토러스의 기본모듈 사이의 1개의 에지는 PT에 연장율 3에 임베딩 되고, 4개의 에지는 연장율 4에 임베딩 되고, 2개의 에지는 연장율 5에 임베딩 된다. 따라서 평균 연장율은 2.2이므로, 3 이하에 임베딩 가능하다. □

예를 들어, 그림 4와 같이 토러스의 노드 (4,1)은 PT의 노드 (0,0,9)에 사상되고 토러스의 노드 (4,2)는 PT의 노드 (0,1,4)에 사상된다. 토러스의 에지 ((4,1), (4,2))에 사상되는 PT의 경로는 (0,0,9), (0,0,5), (0,0,6), (0,1,9), (0,1,3), (0,1,4)이고 길이는 5이다. 토러스의 5개의 노드 (0,1), (1,1), (2,1), (3,1), (4,1)과 5개의 노드 (0,2), (1,2), (2,2), (3,2), (4,2)를 각각 순서대로 연결하는 5개의 에지들이 사상되는 PT의 5개의 경로들은 모두 PT의 에지 ((0,0,6), (0,1,9))를 포함한다.

4 결론

상호연결망 간의 임베딩은 설계된 병렬 알고리즘을 재사용 할 수 있게 하는 의미 있는 작업이다. 널리 알려진 토러스 네트워크를 연장율과 밀집율을 5이하에 PT에 임베딩 함으로써 웜홀 라우팅 방식과 store-and-forward 방식 모두에서 임베딩 알고리즘이 사용 가능하다. 또한 일대일 임베딩을 함으로써 프로세서 작업 처리량을 최소화 하였다. 토러스 T$(5m,2n)$는 $PT(m,n)$에 연장율 5, 밀집율 5 그리고 확장율 1에 임베딩 가능함을 보였고, 허니컴브 메쉬 HM_n은 $PT(n,n)$에 연장율 5, 밀집율 2 그리고 확장율 $\frac{5}{3}$에 임베딩 가능함을 보였다. 추가로 토러스를 PT에 평균 연장율 3이하에 임베딩 가능함을 보였다.

참고문헌

〔1〕 S. Bettayeb and B. Cong and M. Girou and I. H. Sudborough, "Embedding Star Networks into Hypercubes", IEEE trans. comput., VOL. 45, No. 2, pp. 186-194, Feb. 1996.

〔2〕 M. Hamdi and S. W. Song, "Embedding Hierarchical Hypercube Networks into the Hypercube", IEEE trans. on Parallel and Distributed Systems, Vol. 8, No. 9, pp. 987-902, Sep. 1997.

〔3〕 X. Shen and W. Liang and Q. Hu, "On Embedding Between 2D Meshes of the Same Size", IEEE trans. comput., VOL. 46, No. 8, pp. 880-889, Aug. 1997.

〔4〕 I. Stojmenovic, "Honeycomb Network: Topological Properties and Commnication Algorithms," IEEE trans. on Parallel and Distributed Systems, Vol. 8, No. 10, pp. 1036-1042, Oct 1997.

〔5〕 D. K. Saikia, R. Badrinath and R. K. Sen, "Embedding Torus on the Star Graph", IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, Vol. 9, No. 7, pp. 650-663, JULY 1998.

〔6〕 Z. Miller, D. Pritikin, I.H. Sudborough, "Near Embeddings of Hypercubes into Cayley Graphs on the Symmetric Group", IEEE Transactions on Computers, Vol. 43, No. 1, pp. 13-22, Jan 1994.

〔7〕 M. Y. Chan, F. Y. L. Chin, "On Embedding Rectangular Grids in Hypercubes", IEEE Transactions on Computers, Vol. 37, No. 10, pp. 1285-1288, Oct 1988.

〔8〕 K. W. Tang and S. A. Padubidri, "Diagonal and toroidal Mesh Networks", IEEE trans. comput., Vol. 43, No.7 pp. 815-826, Jul 1994.

〔9〕 서정현, 이형옥, 장문석, "멀티컴퓨팅 시스템을 위한 피터슨-토러스(PT) 네트워크", 정보과학회 논문지 게제예정