

수학적 최적화 문제를 이용한 MGA의 성능평가 및 매개변수 연구

Performance Evaluation and Parametric Study of MGA in the Solution of Mathematical Optimization Problems

조 현 만* · 이 현 진** · 류 연 선*** · 김 정 태**** · 나 원 배***** · 임 동 주*****

Cho, Hyun-Man · Lee, Hyun-Jin · Ryu, Yeon-Sun · Kim, Jeong-Tae · Na, Won-Bae · Lim, Dong-Joo

ABSTRACT

A Metropolis genetic algorithm (MGA) is a newly-developed hybrid algorithm combining simple genetic algorithm (SGA) and simulated annealing (SA). In the algorithm, favorable features of Metropolis criterion of SA are incorporated in the reproduction operations of SGA. This way, MGA alleviates the disadvantages of finding imprecise solution in SGA and time-consuming computation in SA. It has been successfully applied and the efficiency has been verified for the practical structural design optimization. However, applicability of MGA for the wider range of problems should be rigorously proved through the solution of mathematical optimization problems. Thus, performances of MGA for the typical mathematical problems are investigated and compared with those of conventional algorithms such as SGA, micro genetic algorithm (μ GA), and SA. And, for better application of MGA, the effects of acceptance level are also presented. From numerical Study, it is again verified that MGA is more efficient and robust than SA, SGA and μ GA in the solution of mathematical optimization problems having various features.

Keywords: metropolis genetic algorithm, mathematical optimization problem, metropolis criterion

1. 서 론

공학설계에서 최적화의 목적은 주어진 조건을 만족하면서 최소의 비용을 요하거나 최상의 효과를 가지는 설계를 찾고자 하는 것이다. 최적화 문제에 사용되는 확률론적 탐색기법으로는 모사 풀림(Simulated Annealing; SA), 유전알고리즘(Genetic Algorithm; GA), 타부 서치(Tabu Search; TS) 등이 있다. 그 중에서 SA와 GA는 서로 보완할 수 있는 특징들을 가진다. SA는 전역적 최적해를 찾는 능력이 뛰어나나 수렴까지 소요되는 시간이 비교적 긴 단점을 가지며, GA는 탐색성능이 우수하고 전역적 최적해 근처까지 빠른 수렴을

* 정희원 · 부경대학교 해양공학과 연구교수 Email: oldsea@nate.com
** 학생회원 · 부경대학교 해양공학과 연구원 Email: haegi07@hanmail.net
*** 정희원 · 부경대학교 해양공학과 교수 Email: ysryu@pknu.ac.kr
**** 정희원 · 부경대학교 해양공학과 교수 Email: idis@pknu.ac.kr
***** 정희원 · 부경대학교 해양공학과 교수 Email: wna@pknu.ac.kr
***** 학생회원 · 부경대학교 해양공학과 석사과정 Email: wxorhd@empal.com

하는 장점을 가지나 정밀한 최적해를 찾지 못하는 문제점을 가진다. 그러므로 SA와 GA를 조합한 하이브리드 알고리즘에 대한 연구들이 이루어져 왔다. 최근 3부재 트러스와 혼성방과제 등의 수치예제를 통해 구조물 설계최적화를 위한 메트로폴리스 유전알고리즘(Metropolis Genetic Algorithm; MGA)의 개발과 적용에 대한 연구를 수행되었다(Ryu 등, 2005; Ryu 등, 2006). 본 연구에서는 MGA의 적용범위 확장을 위해, 그 성능을 다양한 수학적 최적화 문제의 해법을 통하여 검증하고, MGA의 적용성을 높이기 위하여, Metropolis 알고리즘에서 사용되는 파라미터들에 대한 매개변수에 대한 연구를 수행하고자 한다.

2. 메트로폴리스 유전알고리즘

2.1. 유전알고리즘

유전알고리즘은 멘델의 유전법칙과 다윈의 자연선택을 토대로 한 확률론적 탐색기법이다. 해집단은 유전법칙의 메커니즘을 모방한 유전 연산자들에 의해 세대를 거듭할수록 개선된다. 주요 메커니즘으로는 무작위 선택, 적합도(fitness) 평가, 재생산, 교배, 돌연변이 등이 있고, 이러한 과정을 통해 새롭게 형성된 집단은 다시 평가되고, 최적해가 구해질 때까지 과정은 반복된다.

2.2. 모사 풀림과 메트로폴리스 기준

모사 풀림은 반복적 개선법을 기본으로, 통계학의 확률적 기준을 이용하여 고체 열역학에서 가장 낮은 에너지 상태의 결정을 얻기 위한 풀림 과정을 모사한 것이다(Kirkpatrick, 1983). SA의 내부루프에서는 Metropolis 알고리즘이 수행되며, 이를 기본으로 하여 외부루프에서는 온도(T)를 낮추는 과정이 수행된다. T 는 Metropolis 알고리즘의 수용확률에 사용되어 x^{Cur} 보다 목적함수값이 큰 x^{New} 를 개선된 해로 받아들이는 수용 횟수를 제어한다.

Metropolis 알고리즘은 열탕에서 고체가 열평형상태에 도달하는 과정을 확률적으로 모사한 방법이다(Metropolis 등, 1953). 비제약 최소화문제로 변환된 목적함수 $\Phi(x)$ 를 최소화하는 문제에서 Metropolis 알고리즘은 $\{0, 1\}$ 에서 생성한 난수(R)와 수용확률(P_M)을 비교하여 새롭게 생성된 해의 수용여부를 결정한다. 이를 Metropolis 기준(Metropolis criterion)이라 하며 식 (1)과 같다(류 등, 2006).

$$P_M = \exp\left(\frac{-\Delta\Phi}{k_B T}\right) \quad (1)$$

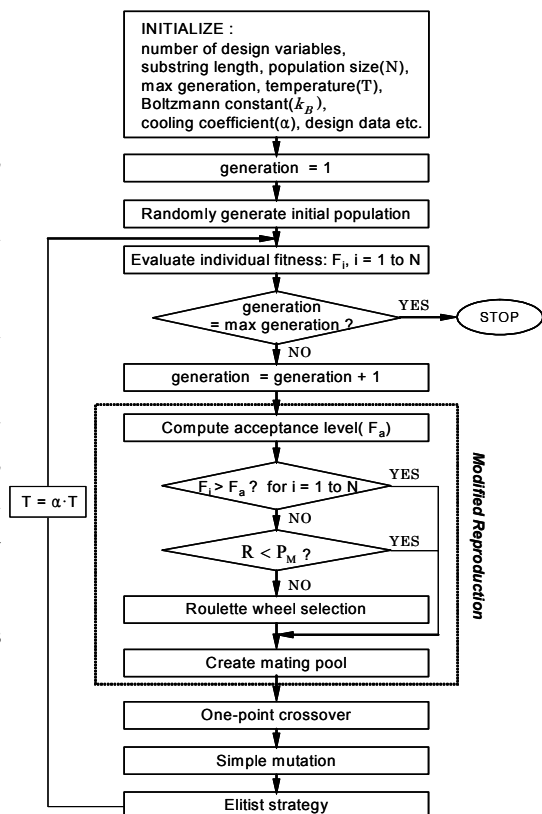


그림 1 메트로폴리스 유전알고리즘의 흐름도

여기서 k_B 는 볼츠만 상수, T 는 냉각 계수에 의해 변하는 온도이다.

2.3 메트로폴리스 유전알고리즘

MGA는 SGA의 재생산 과정에 SA의 Metropolis 알고리즘을 조합함으로 유전정보의 소실방지 및 다양성 유지를 목적으로 개발된 알고리즘이다(박, 2003). 위의 그림 1은 MGA의 흐름도를 보여준다.

이론적 관점에서 MGA의 특징은 다음과 같다.

- 1) 초기 세대에 잠재적인 유전 정보의 소실을 방지하기 위하여 Metropolis 기준을 SGA의 재생산 연산자인 룰렛휠 선택에 조합함으로 정밀한 최적해에 수렴할 높은 확률을 기대할 수 있다.
- 2) Metropolis 알고리즘의 사용으로 인해 초기 몇 세대동안은 기존의 SGA보다 수렴이 느려질 수 있지만 집단 내에서 적합도가 가장 큰 개체는 엘리트 전략으로 보존되므로 어느 정도의 초기 세대를 지난 후에는 적합도가 좋은 개체들로 이루어져 MGA는 수행된다.
- 3) MGA와 SGA는 집단 내 개체들의 적합도를 모두 평가하기 때문에 세대 당 계산하는 함수의 수는 동일하다.
- 4) MGA는 집단탐색을 수행하므로, 목적함수와 제약함수가 복잡하고 설계변수가 많은 최적화 문제에 유리하다.

3. 수치예제

3.1. 수치예제 정의

본 연구에서는 그 중 서로 다른 특징을 가지는 7개의 함수 최적화 문제를 사용하였으며, 채택된 함수와 해, 설계변수 범위는 표 1에 나타내었다.

표 1 수학적 최적화 문제를 위해 채택된 함수

기호	함수명	함수	x	f	설계변수	
					하한	상한
F1	Sphere	$f = 1 + \sum_{i=1}^4 x_i^2$	(0, 0, 0, 0)	1	-5.12	5.12
F2	Rosenbrock	$f = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 1$	(1, 1)	1	-2	2
F3	Easom	$f = 2 - \cos x_1 \cos x_2 \exp(-(x_1 - \pi)^2(x_2 - \pi)^2)$	(π , π)	1	-50	50
F4	Ackley	$f = 21 + e - 20e^{-0.2\sqrt{0.5(x_1^2 + x_2^2)}} - e^{0.5(\cos 2\pi x_1 + \cos 2\pi x_2)}$	(0, 0)	1	-30	30
F5	Rastrigin	$f = 21 + x_1^2 + x_2^2 - 10 \cos(2\pi x_1) - 10 \cos(2\pi x_2)$	(0, 0)	1	-5.12	5.12
P1	(제약 최적화 문제)	$f = x_1^2 + (x_2 - 1)^2$ St. $g = x_2 - x_1^2 = 0$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$	0.75	-1	1
P2	(제약 최적화 문제)	$f = 1.095825 - \frac{\sin^3(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2)}{x_1^3(x_1 + x_2)}$ St. $g_1 = x_1^2 - x_2 + 1 \leq 0$	(1.227, 4.245)	1	0	10

3.2. 수치예제 결과 및 고찰

3.2.1 수렴 신뢰성

MGA, SGA, μ GA의 수렴 신뢰성을 비교하기 위하여, 각 시험 함수에 대하여 GA들을 100회 반복 수행하여 목적함수값의 폭에 대한 빈도를 그림 2에 나타내었다. 그리고 반복 수행하여 얻은 목적함수값의 폭은 표 2에 나타내었다. 이 결과로부터 MGA는 SA와 GA를 단독으로 수행했을 때보다 그리고 μ GA보다 우수한 성능을 보였으며, 국부적 최소로의 수렴 가능성을 가지는 SGA의 단점을 잘 보완하고 있음이 확인되었다. 즉

MGA는 최적해로의 수렴이 어려운 다양한 특징의 수학적 최적화 문제에서 높은 적용성을 보였다.

표 2 함수의 최적해 범위

기호	최적해 범위		
	MGA	SGA	μ GA
F1	[1, 1.0005]	[1, 1.0064]	[1, 1.1278]
F2	[1, 1.0840]	[1, 2.0000]	[1, 1.1103]
F3	[1, 2.0000]	[1, 2.0000]	[1, 2.0000]
F4	[1, 1.0030]	[1, 3.5869]	[1, 1.6637]
F5	[1, 1.0000]	[1, 2.2358]	[1, 1.0050]
P1	[0.7500, 0.8125]	[0.7500, 1.0000]	[0.7500, 0.9904]
P2	[1, 1.0590]	[1, 1.1215]	[1, 1.0958]

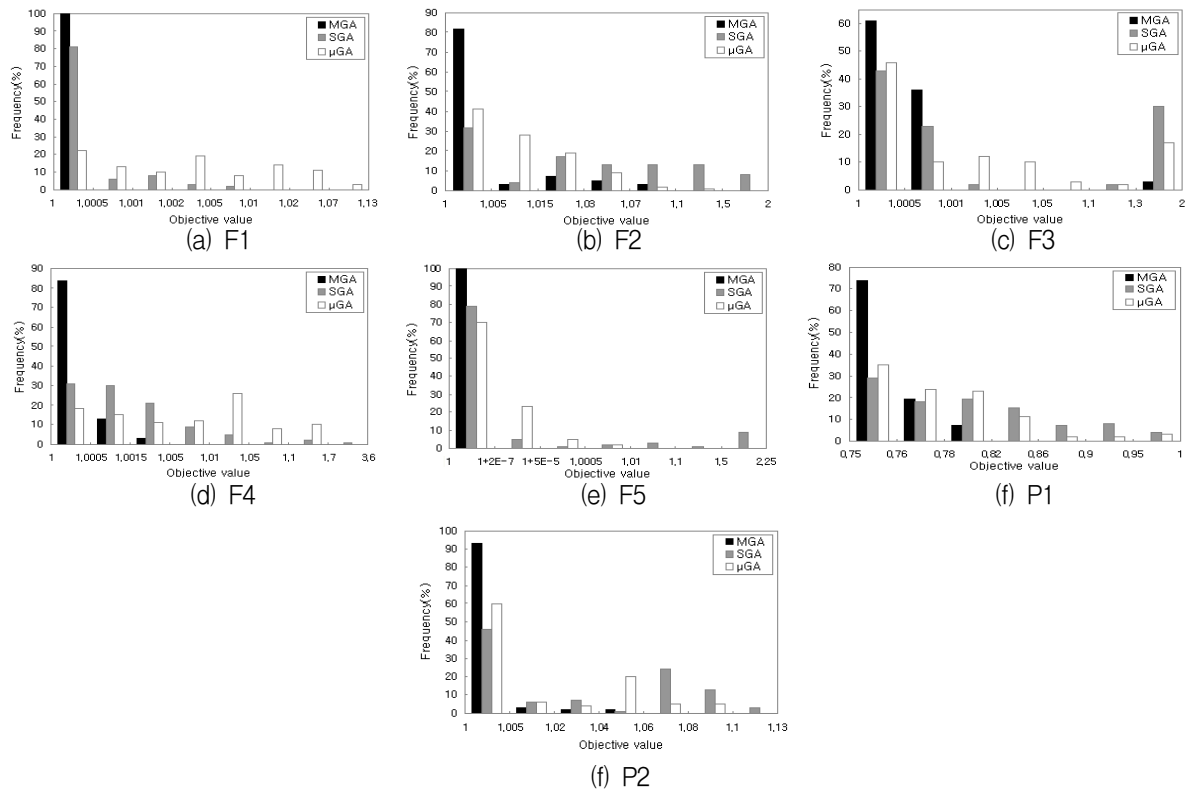


그림 2 각 함수의 최적해 분포

3.2.2 탐색 효율

MGA, SGA, μ GA의 경우 적합도가 큰 개체가 얼마나 빨리 탐색되는냐에 따라 목적함수값의 이력상태가 달라질 수 있다. 따라서 GA들의 탐색 효율을 비교하기 위하여, 반복 수행하여 얻은 세대별 최소의 목적함수값의 평균을 계산하여 그 이력상태를 그림 3에 나타내었다. 이 결과로부터 MGA는 SA와 MGA를 단독으로 수행했을 때보다 그리고 μ GA보다 우수한 성능을 보였으며, 국부적 최소로의 수렴 가능성을 가지는 SGA의 단점을 잘 보완하고 있음이 확인되었다. 즉 MGA는 최적해로의 수렴이 어려운 다양한 특징의 수학적 최적화 문제에서 높은 효율성을 보였다.

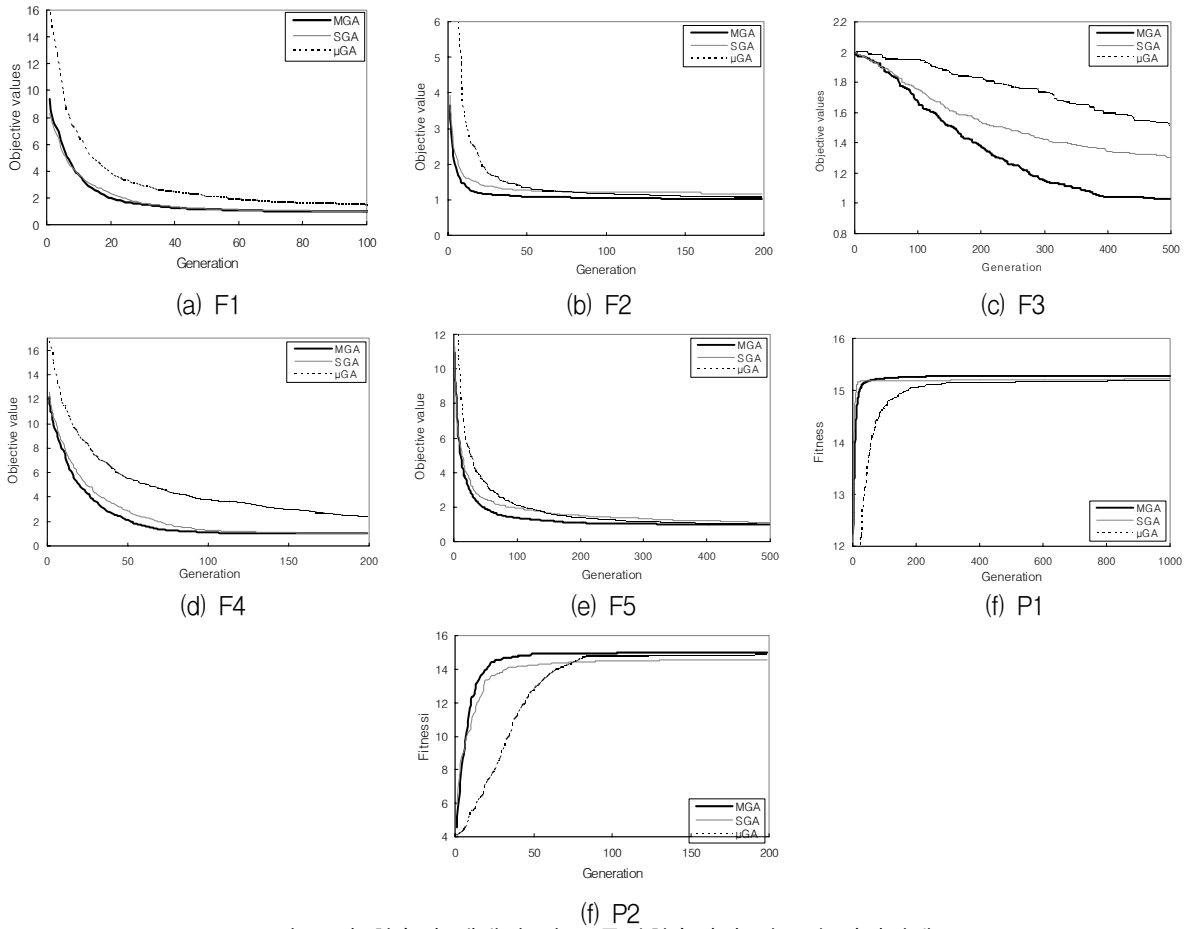


그림 3 각 함수의 세대별 최소 목적함수값의 평균치 이력상태

4. 매개변수 연구

표 3 수용기준 변화에 따른 영향

함수	F_a								비고
	$N_{1/4}$		$N_{1/2}$		$N_{3/4}$		m		
	P_{opt}	N_{opt}	P_{opt}	N_{opt}	P_{opt}	N_{opt}	P_{opt}	N_{opt}	
F1	94%	1,422	93%	1,407	83%	1,565	86%	1,583	$\alpha=0.95$
F2	78%	4,020	88%	2,391	98%	1,609	94%	2,292	$\alpha=0.99$
F3	99%	7,286	98%	7,431	98%	8,143	100%	6,024	$\alpha=0.95$
F4	68%	1,830	46%	2,015	35%	2,218	52%	2,007	$\alpha=0.95$
F5	98%	3,593	98%	3,648	94%	3,755	100%	3,460	$\alpha=0.99$

전역적 수렴성은 고정된 세대수에서 만족할 만한 해(optima range)를 구한 비율 (P_{opt})로, 국부적 수렴성은 만족할 만한 해를 구할 때까지의 함수의 계산 횟수(N_{opt})로 계산하였다. 전역적 수렴성의 측정을 위하여 적절한 세대수 사용하였다. 그리고 모든 시험 함수의 전역적 최소는 1이므로 만족할 만한 해로 전역적 최소와 1%까지 차이나는 경우를 고려하였다. 수용기준인 $N_{1/4}$, $N_{1/2}$, $N_{3/4}$ 은 보존되는 엘리트 개체의 비율이

25%, 50%, 75%가 되도록 설정한 것이고, m 은 집단 내 개체들의 적합도 평균으로 설정한 경우이다. 매개변수 연구에서 역시 모든 경우에 대하여 MGA는 100회 반복 수행하였다.

이상의 결과에서 함수의 특징에 따른 적절한 수용기준이 있음을 보였다. 이는 함수 특징에 따른 MGA의 파라미터 선택기준으로 사용될 수 있다. 그러므로 공학적 최적화 문제에서 정식화된 함수의 특징을 알 수 있을 때 그 기준에 따라 적절한 수용기준을 사용한다면, MGA는 그 성능이 최대한 발휘될 것으로 판단된다.

5. 요약 및 결론

MGA의 적용 범위를 넓히기 위하여, 본 연구에서는 수학적 최적화 문제를 이용하여 MGA의 성능을 평가하였다. 성능평가를 위한 수치예제로 서로 다른 특징을 가지는 5개의 함수 최적화 문제와 2개의 제약 최적화 문제를 사용하였고, 비교 알고리즘으로는 MGA의 기본이 되는 SGA와 SA 그리고 μ GA를 사용하였다. 그 수행결과로부터 GA들의 수렴 신뢰성과 탐색 효율을 비교·분석함으로써 MGA의 성능을 평가하였다. MGA, SGA, μ GA를 각각 100회 반복 수행한 결과, MGA는 모든 시험 문제에서 얻어진 목적함수값의 폭이 가장 작았으며 최적해로의 수렴 비율이 가장 높았다. 일부 수치예제에서 MGA는 초기에 SGA보다 느린 수렴을 보였으나 그 이후 세대에서는 더 안정적이고 빠른 수렴을 보였다. 이는 Metropolis 알고리즘의 사용으로 초기 세대들에서 적합도가 작은 개체가 대부분 받아들여짐으로 일어나는 현상임을 확인하였다. 그리고 많은 국부적 최소를 가지는 문제와 등호제약조건을 가지는 문제에서 MGA는 정밀한 최적해로의 수렴비율이 다른 GA보다 더 높았다. 즉, MGA는 다양한 특징을 가지는 수학적 최적화 문제에서 SA, SGA, μ GA보다 성능이 우수하며, 국부적 최소로의 수렴 가능성을 가지는 SGA의 단점을 잘 보완하고 있음이 확인되었다.

그리고 MGA의 적용성을 높이기 위하여, Metropolis 알고리즘에 사용되는 파라미터들 중 수용기준에 대한 매개변수 연구를 수행하였다. 수치예제로 5가지 함수 최적화 문제를 사용하였고, $N_{1/4}$, $N_{1/2}$, $N_{3/4}$, 적합도 평균의 4가지를 고려하여 모든 케이스의 전역적 수렴성과 국부적 수렴성을 비교·분석함으로써 수용기준에 따른 MGA의 영향을 평가하였다. 매개변수 연구의 결과, 시험 함수에 따른 수용기준의 적정치가 제안되었다. 이는 함수 특징에 따른 MGA의 파라미터 선택기준으로 사용될 수 있다. 정식화된 함수의 특징을 정확히 판별하기 난해한 경우나 MGA를 처음으로 사용할 경우에는 수용기준은 $N_{1/2}$ 를 제안한다.

참고문헌

- Kirkpatrick, S.** (1983) Optimization by Simulated Annealing : Quantitative Studies, J. Statis, Phys.
- Metropolis, N. et al** (1953) Equation of State Calculations by Fast Computing Machines, J. of Chem. Physics, 21. pp.1087~1092.
- Ryu Y.S. et al** (2005), Design Optimization of Composite Breakwater with Metropolis GA, Proc. of WCSMO6, Rio.
- Ryu Y.S. et al** (2006) An Efficient MGA for the Design Optimization of Composite breakwater, Proc. of CJK-OSM4.
- 류연선, 박균집, 김정태, 나원배** (2006), 구조 최적화를 위한 Metropolis 유전자 알고리즘의 개발과 효율성 평가, 한국전산구조공학회 논문집 19(1), pp.27~37.
- 박재형** (2003) 유전알고리즘을 이용한 망간단괴 수송선의 최적화와 경제성 평가, 부경대학교 대학원 공학석사 학위논문.