

최소자승법과 Level-set 방법을 이용한 3차원 슬로싱 유동의 수치해석

최형권†

Numerical analysis of three-dimensional sloshing flow using least-square and level-set method

Hyoung-gwon Choi

Key Words : Least square(최소자승법), Level set(레벨셋), Sloshing problem(슬로싱 문제), Three-dimension(3차원)

Abstract

In the present study, a three-dimensional least square/level set based two-phase flow code was developed for the simulation of three-dimensional sloshing problems using finite element discretization. The present method can be utilized for the analysis of a free surface flow problem in a complex geometry due to the feature of FEM. Since the finite element method is employed for the spatial discretization of governing equations, an unstructured mesh can be naturally adopted for the level set simulation of a free surface flow without an additional load for the code development except that solution methods of the hyperbolic type redistancing and advection equations of the level set function should be devised in order to give a bounded solution on the unstructured mesh. From the numerical experiments of the present study, it is shown that the proposed method is both robust and accurate for the simulation of three-dimensional sloshing problems.

1. 서론

슬로싱 문제는 자유표면을 포함하는 대표적인 문제로 슬로싱 문제의 정확한 해석을 위해서는 자유표면의 시간에 따른 변화를 정확히 예측하여야 한다. 자유표면의 거동을 수치적으로 해석하는 방법은 오랜 기간 동안 매우 많은 연구자들에 의하여 연구되어 왔다. 전통적인 방법으로는 volume of fluid (VOF)⁽¹⁾나 front-tracking 방법⁽²⁾ 및 body fitted method 방법⁽³⁾ 등이 있다. Level-set 방법은 1990년 대 초에 제안된⁽⁴⁾ 이후 수 많은 연구자들에 의해서 자유표면의 수치해석을 위한 기법으로 이용되고 있다.

Level-set 방법은 VOF 방법과 함께 대표적인 자유표면포착(interface capturing) 방법으로 배경격자

계에서 정의된 level-set 함수의 분포로부터 자유표면이 포착된다. 임의의 지점에서의 Level-set 함수의 값은 상경계면까지의 최단거리로 정의되며, 매 시간마다 갱신되는 상경계면을 포착하기 위해서는 level-set 함수의 이송방정식을 해석해야 한다. 또한, level-set 함수의 이송방정식을 풀 후에 자유표면이 갱신이 되면 임의의 지점에서의 level-set 함수의 값은 일반적으로 상경계면까지의 최단거리라는 조건을 위배하게 된다. 따라서, level-set 함수의 이송방정식을 풀 후에 임의의 지점에서의 level-set 함수의 값을 상경계면까지의 최단거리라는 조건이 만족하도록 수정할 필요가 있다. 이 작업을 위해 풀어야 할 식이 redistance 방정식이다. 선행연구⁽⁴⁾ 결과에 따르면 다상유동의 해석에서 질량 보존을 만족하기 위해서는 Redistance 방정식의 정확한 해법이 매우 중요하다.

본 연구에서는 저자에 의해서 제안된⁽⁵⁾ 최소자

† 회원, 서울산업대학교 기계공학과

E-mail : hgchoi@smut.ac.kr

TEL : (02)970-6312 FAX : (02)949-1458

승 가중잔류법을 이용하여 Level-set 방법의 쌍곡선형 미분방정식 (이송방정식, Redistance 방정식)을 해석하여 기존의 수치해석 결과와 성능을 비교한 후에, 자유표면을 포함하는 비압축성 유동장의 해석에 적용한다. 비압축성 유동장은 4 단계 분리유한요소법⁽⁶⁾을 이용하여 해석한 코드를 확장하여, 3 차원 슬로싱 문제의 해석에 적용하고자 한다.

본 논문의 2 장에서는 최소자승 가중잔류법을 이용한 level-set 방법의 수치해석 및 Redistance 방정식의 경계조건에 대하여 간략히 설명한다. 3 장에서는 제안된 최소자승 가중잔류법의 검증에 위하여 표준예제를 해석한 결과를 기존의 수치해석 결과와 비교하여 논의한다. 마지막으로, 3 차원 직육면체 탱크내의 슬로싱 문제를 해석한 수치 결과를 제시한다. 4장에서는 결론을 서술한다.

2. 수치 해석 방법

2.1 Level-set 유한요소해석의 지배 방정식

2.1.1 비압축성 유동장의 지배 방정식

자유표면을 가지는 비압축성 유동장의 해석을 위한 level-set 지배방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\rho(\phi) \frac{Du}{Dt} = \nabla p + \nabla \cdot (2\mu(\phi)D) - \sigma\kappa(\phi)\delta(\phi)\nabla\phi + \rho(\phi)\vec{g} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

식 (1)은 4 단계 분리 유한요소법을 이용하여 이산화 된다. 식 (1)의 유한요소 공식화에 대한 자세한 설명은 참고문헌 [6]으로 대신한다. 식 (1)을 풀어서 자유표면을 가지는 유동장의 속도장을 구한 다음에는 다음 절에서 설명할 level-set 함수에 대한 이송 방정식을 풀어서 상경계면을 갱신한다.

2.1.2 Level-set 함수의 이송방정식

2.1.1 절에서 제시된 비압축성 유동장을 분리유한요소법을 이용하여 해를 구하면 발산정리를 만족하는 속도장이 얻어진다. 구해진 속도장으로부터 상경계면을 갱신하기 위해서는 다음의 이송방정식을 풀어야 한다

$$\phi_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\phi = 0 \quad (2)$$

쌍곡선형 형태인 위의 식 (2)는 Crank-Nicolson 방법을 이용하여 반이산화 한 후에 최소자승법을 적

용하여 공간이산화 한다. 최종적으로 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\int_{\Omega} \left(\frac{N_i}{\Delta t} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla N_i \right) \left(\frac{\phi^{n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \phi^{n+1} \right) d\Omega =$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{N_i}{\Delta t} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla N_i \right) \left(\frac{\phi^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^n \cdot \nabla \phi^n \right) d\Omega \quad (3)$$

식 (3)의 유도에 대한 상세한 설명은 참고문헌 [7]을 참고한다. 위의 식 (3)에서 속도장은 식 (1)의 해를 사용한다. 따라서, 지배방정식은 선형방정식으로 최소자승 유한요소 이산화는 비대칭형태의 행렬을 제공한다. Level-set 방법을 이용한 자유표면해석의 마지막 단계에서는 다음 절에서 설명되는 redistance 방정식을 풀어야 한다.

2.1.3 최소 자승법을 이용한 Redistance 방정식의 해석

$$\phi_t + C_i \cdot \nabla \phi = S_o \quad (4)$$

위의 쌍곡선형 형태의 방정식을 최소 자승법을 적용하여 유한요소 공식화하면 다음과 같은 과정을 거쳐서 최종의 식이 유도된다. 먼저, 최소자승의 정의에 의하여 다음과 같이 가중함수가 정의된다.

$$\frac{\partial R^2}{\partial \phi} = \tilde{w}_i = \frac{\partial \left(\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + C_k \cdot \nabla \phi^{n+1} - S_o \right)^2}{\partial \phi} = \frac{N_i}{\Delta t} + C_k \cdot \nabla N_i$$

위의 가중함수를 이용하여 가중잔류법을 적용하면 다음과 같은 Redistance 방정식에 대한 최소자승 가중잔류식이 유도된다.

$$\int \left(N_i N_j + N_i \Delta t C_k \frac{\partial N_j}{\partial x_k} + \Delta t C_k \frac{\partial N_i}{\partial x_k} N_j + \Delta t^2 C_k \frac{\partial N_i}{\partial x_k} C_\ell \frac{\partial N_j}{\partial x_\ell} \right) \phi^{n+1} d\Omega =$$

$$(5)$$

$$\int (N_i + \Delta t C_i \cdot \nabla N_i) (\phi^n + \Delta t S_o) d\Omega$$

식 (5)의 유도에 대한 상세한 설명은 참고문헌 [7]을 참고한다. 이전 유한요소 공식화를 이용한 선형연구들 [8,9]과 비교하여 식 (5)의 가장 중요한 특징은 유한요소 이산화에 대하여 경계조건 항이 나타나지 않는 점이다. 이에 대한 자세한 내용은 참고문헌 [8]과 [9]을 참고한다.

2.2 Redistance 방정식의 Dirichlet 경계조건

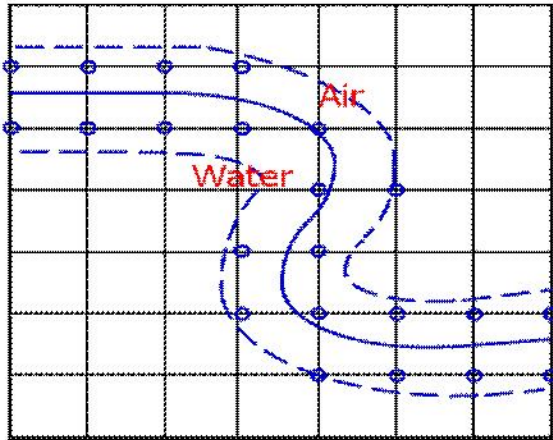


그림. 1 상 경계면에서의 Dirichlet 경계조건

2.1.3 절에서 유도된 식 (5)는 쌍곡선형 형태의 방정식으로 식 (5)의 수치해석을 위해서는 경계조건을 지정이 필수적이다. 본 연구에서는 그림. 1에서와 같이 상 경계면 근처의 절점들의 level-set 함수의 값을 고정시키는 방법으로 경계조건을 처리하였다⁽¹⁰⁾.

3. 수치해석 결과

제안된 수치기법의 검증을 위하여 먼저 잘 알려진 표준예제인 원형 유체의 확장 문제(Stretching of a circular fluid)와 2차원 댐 붕괴 문제를 해석하였다. 두 가지 표준 예제의 해석 결과 본 연구에서 제안된 수치기법은 표준 예제를 기존의 수치 기법에 비해서 효율적으로 정확하게 풀 수 있음을 확인하였다. 그림. 2는 격자계를 50×50, 100×100, 200×200, 300×300을 사용했을 때의 확장된 원형 유체의 모습을 보여준다.

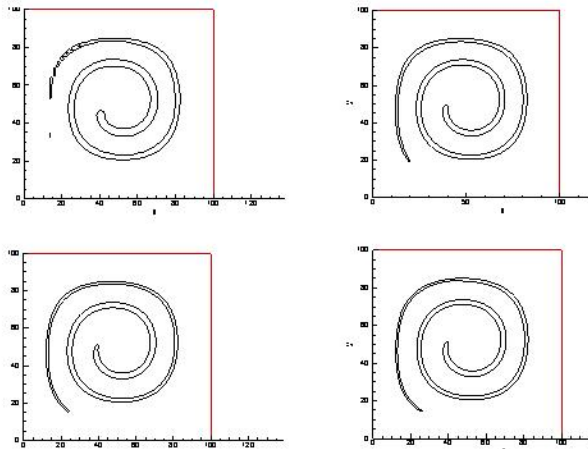


그림. 2 다양한 격자계 대한 원형 유체의 확장

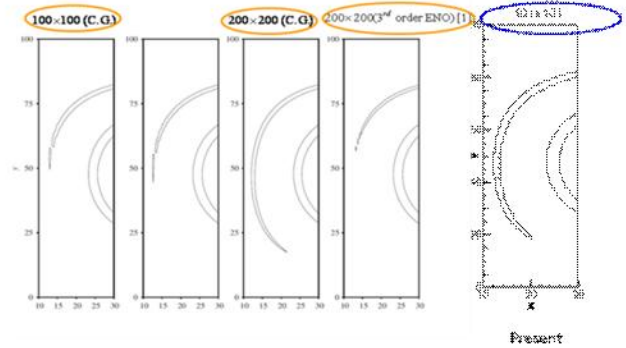


그림. 3 원형 유체의 확장 문제에서 꼬리 부분에서의 상경계면의 모양

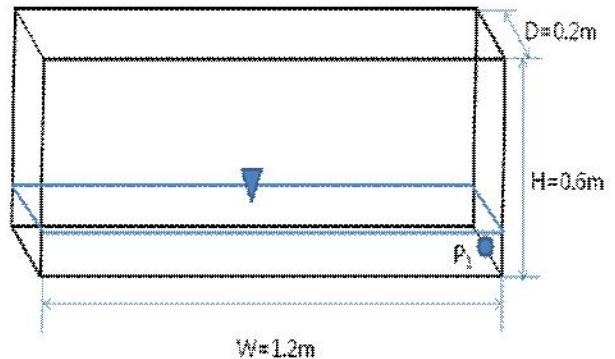


그림. 4 직육면체 탱크내의 슬로싱 문제

격자계가 조밀해 짐에 따라서 해가 수렴해 감을 볼 수 있다. 그림. 3은 원형 유체의 확장 문제를 해석한 경우에 꼬리 부분에서의 상경계면의 모양을 기존의 해석결과와 비교한다. 본 연구의 결과가 원형 유체의 확장 문제의 해석에 대하여는 기존 연구 결과보다 더 정확한 해를 줌을 알 수 있다. 표준예제의 해석 결과에 대한 보다 자세한 내용은 참고 문헌 (6)을 참고한다.

3.1 3차원 탱크 내의 슬로싱 문제

본 절에서는 본 연구의 주 과제인 3차원 슬로싱 해석 결과를 제시한다. 그림. 4에 주어진 3차원 탱크 내의 슬로싱 문제를 해석한다. 20%가 물로 채워진 그림. 4에 주어진 탱크는 다음과 같은 주기 운동(sway motion)을 한다.

$$x = A_m \sin(2\pi t / T) \quad (7)$$

여기서 A_m 은 좌우 왕복운동의 진폭을 나타내며 T

는 주기를 나타낸다. 본 연구에서는 진폭은 0.06 m

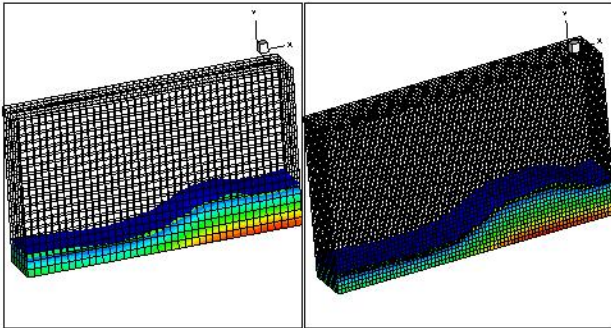


그림. 5 성긴 격자와 조밀한 격자계에서의 자유 표면 및 압력의 분포

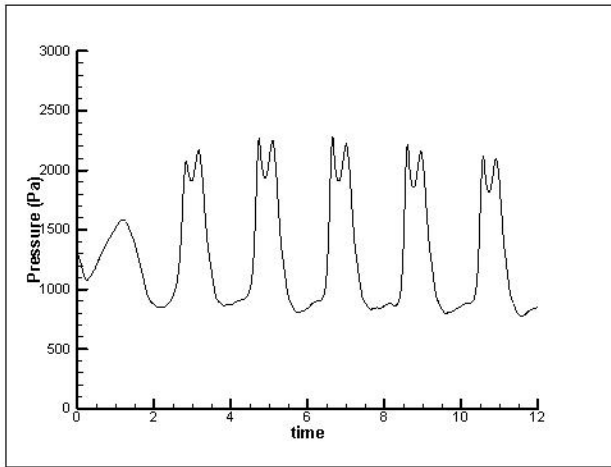


그림. 6 성긴 격자계(40×20×6)에서의 P₁에서의 시간에 따른 압력의 변화

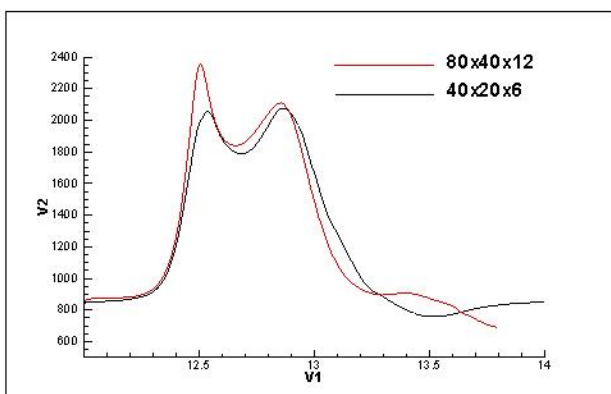


그림. 7 성긴 격자와 조밀한 격자계에서의 시간에 따른 P₁에서의 압력변화

이고 주기는 1.94 s로 주어지는 경우에 대한 수치 해석을 수행하고 기존의 수치해석⁽¹¹⁾ 및 실험⁽¹²⁾과 비교한다. 그림. 5는 성긴 격자계(40×20×6)와 조밀한 격자계(80×40×12)에서 수치해석을 수행하여 동

일한 시각에서 자유표면 및 압력의 분포를 나타낸 그림이다. 둘의 결과가 정성적으로 잘 일치함을 알 수 있다. 그림. 6은 그림. 4에서 정의된 한 점 P₁에서의 시간에 따른 압력의 변화를 나타낸다. 수치해석⁽¹⁰⁾ 및 실험결과⁽¹¹⁾와 같이 두 개의 극대점이 나타남을 확인하였다. 마지막으로 그림. 7은 성긴 격자와 조밀한 격자계를 사용했을 때의 시간에 따른 점 P₁에서의 압력변화를 나타낸다. 조밀한 격자계를 사용할수록 최대 압력의 예측 성능이 개선됨을 알 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 분리유한요소법과 level-set 방법을 이용하여 3차원 슬로싱 문제를 해석하였다. Level-set 방법에서 나타나는 쌍곡선형 미분방정식의 해석을 위해서는 최소자승법을 이용하였다. 수치해석 결과 다음의 결론을 얻었다.

- (1) Level-set 방법에서 나타나는 이송방정식에는 Crank-Nicolson 방법으로 반이산화 한 후에 최소자승법을 적용하고 Redistance 방정식의 경우에는 최소자승법을 적용하여 해를 구한 결과 기존의 결과와 견줄만하거나 보다 더 안정적이고 정확한 해를 줌을 확인하였다.
- (2) 제안된 알고리즘을 3차원 슬로싱 문제에 적용한 결과 기존의 실험 및 수치해석의 결과와 비교하여 만족할 만한 해를 얻었다. 특히, 매우 성긴 격자계에서도 정성적으로 실험과 일치하는 해를 얻을 수 있었으며, 비교적 질량 보존을 잘 만족함을 확인하였다.
- (3) 본 연구에서 제안된 방법은 비정렬 격자계를 이용하면 복잡한 형상을 가지는 물체 내의 슬로싱 문제의 해석에도 바로 적용할 수 있다.

참고문헌

- (1) Hirt, C. W. and Nichols, B. D., 1981, "Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries," *J. Comput. Phys.*, 39, pp. 201-225.
- (2) Unverdi, S. O. and Tryggvason, G., 1992, "A Front Tracking Method for Viscous, Incompressible, Multi-fluid Flows," *J. Comput. Phys.*, 100, pp. 25-37.
- (3) Ryskin, G. and Leal, L. G., 1984, "Numerical solution of free-boundary problems in fluid mechanics. Part 1. The finite-difference technique," *J. Fluid. Mech.*, Vol. 148, pp. 1~17.

- (4) Sussman, M., Smereka, P. and Osher, S., 1994, "A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Phase Flow," *J. Comput. Phys.*, Vol. 114, pp. 146-159.
- (5) Choi, H. G., 2008, "Finite element analysis of free surface flows using least square/level-set formulation," *Proc. 5th International conference on computational fluid dynamics*, Seoul, Korea, July 2008.
- (6) Choi, H. G., Choi, H. and Yoo, J. Y., 1997, "A fractional 4 step finite element formulation of the unsteady incompressible Navier-Stokes equations using SUPG and linear equal-order element methods," *Comput. Methods. Appl. Engrg.*, Vol. 143, pp. 333-348.
- (7) Choi, H. G., 2008, "Numerical analysis of free surface flows using least square/level-set method," *in preparation*.
- (8) Choi, H. G., Kang, S. W. and Yoo, J. Y., 2006, "Level set based finite element method of bubble-in-liquid simulation," *Proc. 4th International conference on computational fluid dynamics*, Ghent, Belgium, July 2006.
- (9) Lin, C., Lee, H., Lee, T. and Weber, L. J., 2005, "A level set characteristic Galerkin finite element method for free surface flows," *Int J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 49, pp. 521~547.
- (10) Choi, H. G., 2008, "Numerical analysis of free surface flows using least square/level-set method," *Proc. 5th National Congress of Fluids Engineering*, Jeju, Korea.
- (11) Lee, S. H., 2004, "A validation study for tank sloshing using a Navier-Stokes solver," *Proc. 23rd International conference on offshore mechanics and arctic engineering*, Vancouver, British Columbia, Canada, June 2004.
- (12) Tanaka, Y., Ando, T., and Miyamoto, T., 2000, "Experimental Study on Sloshing Load Measured by Panel-Type Pressure Gauge," *Proc. 74th General Meeting of Ship Research Institute*, Ship Research Institute, Tokyo, Japan, June 2000, pp.137-142.