중력이 존재하는 등방성 난류에서 작은 입자의 유동

조성기†·여경민*·이창훈**

Behavior of small particles in isotropic turbulence in the presence of gravity

Seonggee Cho, Kyongmin Yeo and Changhoon Lee

Key Words: Isotropic turbulence(등방성 난류), Settling velocity(침강 속도), heavy paticle(무거운 입자), gravity(중력)

Abstract

The motion of small heavy particles in homogeneous isotropic turbulence in the present of gravity is investigated using Direct Numerical Simulations (DNS) at moderate Reynolds number. The Lagrangian velocity and acceleration statistics of particles and of flow for a wide range of Stokes number, defined as the ratio of the particle response time to Kolmogorov time scale of turbulence, were obtained for the direction of the gravity and normal direction, respectively. It is found that particles lose their correation faster than the case without gravity. Then, a significant increase in the average settling velocity was observed for a certain range of Stokes number. Our focus is placed on gravitational effect on very small particles. Our simulations show that as the Stokes number reduces to zero, their mean settling velocity aproaches the terminal velocity in still fluid.

1. 서 론

부유 입자가 있는 난류에 대한 해석은 원자로와 연소실 내의 유동, 강둑 침전물의 퇴적, 먼지 폭풍, 구름 역학 등과 같은 유체 분야와 산업 분야에서 자주 발견되는 매우 흥미 있는 주제 주 중 하나이다. 난류 속에 부유되어 있는 입자들은 난류의 확산에 영향을 미치고 난류 특성의 변화를 일으키기도 한다. 또한 대기, 해수 환경 내의 오염물질의 확산을 조절하고 예측하는데 있어서 이러한 부유 입자를 가진 난류에 대한 연구는 더욱 중요성을 갖는다. 특히, 중력과 같은 외부 힘에 의한 입자의 침강 속도는 입자가 얼마나 오랫동안 부유된 상태를 유지하는지를 결정하는 중요한 요소이다. 가장 단순한 형태인 균질한 등방성 난류는 그것이 갖는 보편적인 특성을 잘 설명할 수 있기 때문에 그 희소성에도 불구하고 일찍부터 입자 확산에 대한 연구와 수치해석이 행해졌다.

부유입자에 대한 난류의 확산은 라그란지안 해석 기법을 도입하여 연구를 진행해왔다. 하지만 실험적인 측면에서는 입자의 궤적을 추적하며 통계량을 얻는 것이 현실적으로 어려움이 있기 때문에 Snyder, Lumley, Wells, Stock 등은 격자가 생성된 난류 내에서 입자에 대한 난류의 확산 정보를 얻어내었다. 또한, 직접수치모사(DNS)는 난류 내의 유체입자와 부유된 입자의 라그란지안 통계량을 얻는데 효과적으로 사용되었다.(Fung & Perkins, Squires & Eaton, Yeung & Pope). Wang & Maxey(1993)는 직접수치모사를 수행하여 난류

† 연세대학교 기계공학과
E-mail : dean2358@hotmail.com
TEL : (02)2123-2846 FAX : (02)312-2159
* Brown university
** 연세대학교 기계공학과

내에서 관성을 갖고 있는 부유입자의 평균 침강 속도는 Kolmogorov 크기의 종단 속도와 비교하여 상당부분 증가하며 이때, 부유 입자들은 소용돌이가 작고 변형률 속도가 높은 곳에 주로 응집하는 현상을 관찰하였다. Yang & Lei(1998)와 Aliseda 등(2002)은 이 침강 속도를 관찰하는데 있어서 난류 척도와 입자의 선택적 응집의 효과를 각각 밝혀내었다.

본 논문에서는 난류 유체 입자가 부유 입자에 미치는 영향을 고려하여 라그란지안적 관점에서 Kolmogorov 크기에 비례하는 관성과 종단 속도를 주었을 때 발생하는 유체 입자와 부유 입자의 거동의 변화를 살펴보고자 한다. 부유 입자에 의한 난류 특성의 변화는 고려하지 않았다.

2. 직접 수치 모사

입자유동해석을 위해서 등방성유동에 대한 직접 수치 모사가 수행되었다. Navier-Stokes방정식의 해를 구하기 위해서 spectral방법을 사용하였다. 공간 차분에 대해서는 주방향, 횡방향, 수직방향에 대한 dealiased Fourier방법이 사용되었고, 시간 차분으로는 3차 Runge-Kutta(RK3)방법이 사용되었다. 계산 영역은 $2\pi\times2\pi\times2\pi$이며, 사용된 격자계는 64^3이다.

2.1 지배방정식

rotational 형태의 Navier-Stokes와 연속 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=-\frac{\partial P}{\partial x_i}+H_i+\nu\nabla^2 u_i+f_i, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0, \tag{2}$$

여기서, f_i는 외부에서 작용하는 힘을 나타낸다. 작은 스케일의 난류의 특성은 통계학적 균질성, 등방성, 그리고 일반성이다. 균질한 등방성 난류는 난류의 가장 단순한 형태이며 작은 스케일에서의 보편적인 특성을 지니고 있지만 통계학적으로는 고정되어 있지 않다. 그래서 통계학적으로 고정된 속도장을 유지하기 위해 위와 같이 외부에서 힘을 가하게 된다. 본 연구에서는 Eswaran and Pope(1988)가 제시한 Uhlenbeck-Ornstein(UO) random processes에 기초를 둔 forcing방법을 사용하였다.

2.2 입자 추적 기법

2.2.1 3-dimensional 4-point Hermite interpolation

일반적으로 입자의 위치는 계산 도메인의 그리드 포인트의 위치와 일치하지 않는다. 그래서 필수적으로 입자의 위치에서의 유체량 즉, 속도, 압력, 가속도 등을 구하기 위해서 정확도가 높은 내삽법을 사용한다. 모든 파수 영역에서의 속도 정보를 직접 합을 이용하여 임의의 지점에서의 속도를 구하는 Spectral 내삽법은 가장 높은 정확도를 갖는 방법이지만 그 계산비용적인 측면에 있어서는 비효율적이기 때문에 라그란지안 통계량을 얻는데 적합성이 떨어진다. 최근에 Choi et al.(2004)은 한 방향에 대한 6th-order 라그란지안 다항식을 이용한 내삽법과 2-point Hermite 내삽법 등을 비교하여 Chebyshev 다항식을 조합한 4th-order Hermite 내삽법을 제시하였다. 이는 다른 내삽법에 비해 정확도와 시간적인 측면에서 충분한 적합성을 가진다. 그러므로 4-point Hermite 내삽법을 3차원으로 확장하여 입자의 위치에서의 유체의 량을 구하였다.

$$\begin{aligned}u(x,y,z)=&\sum_{n=1}^{4}\sum_{m=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}u(l,m,n)H_lH_mH_n\\&+\frac{\partial u(l,m,n)}{\partial x}G_lH_mH_n+\frac{\partial u(l,m,n)}{\partial y}H_lG_mH_n\\&+\frac{\partial u(l,m,n)}{\partial z}H_lH_mG_n+\frac{\partial u^2(l,m,n)}{\partial x\partial y}G_lG_mH_n\\&+\frac{\partial u^2(l,m,n)}{\partial x\partial z}G_lH_mG_n+\frac{\partial u^2(l,m,n)}{\partial y\partial z}H_lG_mG_n\\&+\frac{\partial u^2(l,m,n)}{\partial x\partial y\partial z}G_lG_mG_n,\end{aligned} \tag{3}$$

4-point Hermite 내삽법에 대한 기저함수를 살펴보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}H_1(\xi)&=(11\xi^7-52\xi^6+59\xi^5+50\xi^4-124\xi^3+56\xi^2)/108\\H_2(\xi)&=(27\xi^7-81\xi^6-54\xi^5+270\xi^4+27\xi^3-297\xi^2)/108+1\\H_3(\xi)&=(-27\xi^7+108\xi^6-27\xi^5-270\xi^4+108\xi^3+216\xi^2)/108\\H_4(\xi)&=(-11\xi^7+25\xi^6+22\xi^5-50\xi^4-11\xi^3+25\xi^2)/108,\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}G_1(\xi)&=(3\xi^7-15\xi^6+21\xi^5+3\xi^4-24\xi^3+12\xi^2)h/108\\G_2(\xi)&=(27\xi^7-108\xi^6+54\xi^5+216\xi^4-189\xi^3-108\xi^2)h/108+h\xi\\G_3(\xi)&=(27\xi^7-81\xi^6-27\xi^5+189\xi^4-108\xi^2)h/108\\G_4(\xi)&=(3\xi^7-6\xi^6-6\xi^5+12\xi^4+3\xi^3-6\xi^2)h/108,\end{aligned} \tag{5}$$

$\xi=(x-x_2)/h,\xi=(x-x_2)/h$ 또는 $\xi=(x-x_2)/h$ 이고, h 그리드 크기를 나타낸다.

2.2.2 유체 입자에 대한 운동 방정식

유체 입자의 운동경로는 입자에 대한 운동 방정식의 적분에 의해 구할 수 있고 다음과 같다.

$$\frac{dX(t,X_0)}{dt} = V(t,X_0), \tag{6}$$

여기서, X_0, X, V는 각각 초기위치와 시간 t에서의 유체입자의 위치와 속도를 나타낸다. Navier-Stokes의 해를 구할 때와 마찬가지로 시간 차분에 대해서는 RK3를 적용하였고, 공간 차분에 대해서는 계산비용을 절감하기 위해 4th-order 중심 차분 방법을 사용하였다.

2.2.3 부유 입자에 대한 운동 방정식

난류에서 부유 입자에 대한 운동 방정식은 high-order항을 제외하면 다음과 같다.(Maxey & Riley)

$$m_p\frac{dV_i}{dt} = (m_p - m_f)g_i + m_f\frac{Du_i}{Dt} - \frac{1}{2}m_f\frac{d}{dt}(V_i - u_i) - 6\pi a\mu(V_i - u_i), \tag{7}$$

여기서 m_p는 입자의 질량, m_f는 부유 입자가 위치한 곳의 유체의 질량, g_i는 중력가속도, a는 부유 입자의 반경을 나타낸다. (7)의 오른쪽에 있는 항들을 살펴보면 각각 부력, 유체의 가속도, 부유 입자의 질량에 의한 관성력, Stokes 저항을 의미하고 있다. (7)식을 m_p로 나누고 부유 입자의 밀도가 유체 입자의 밀도보다 충분히 크다고 가정하면 즉, $\rho_p \gg \rho_f$이면 무거운 입자에 대한 운동 방정식은 다음과 같이 단순하게 표현할 수 있다.

$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{1}{\tau_p}(u_i - V_i) + g_i, \tag{8}$$

$\tau_p(\equiv 2\rho_p a^2/9\mu)$는 입자의 특성 시간스케일로 입자의 반응시간(particle response time)이라 한다 (Crowe, Sommerfeld & Tsuji, 1993). 중력에 의한 침강을 고려하여 표현한 식은 다음과 같다.

$$\frac{d(W_i - w)e^{t/\tau_p}}{dt} = -e^{t/\tau_p}\frac{d(u_i + w)}{dt}, \tag{9}$$

여기서, W_i는 유체 입자와 부유 입자와의 상대속도($\equiv V_i - u_i$)나타내고 $w(\equiv \tau_p g)$는 침강속도를 의미한다. 그리고 앞에서와 마찬가지로 RK3를 적용하여 계산을 수행하였다.

3. 부유입자에 대한 라그란지안 분석

3.1 라그란지안 상관관계 함수

부유 입자에 대한 확산을 알아보기 위하여 라그란지안 상관관계 함수를 조사하였다. 속도와 가속도의 라그란지안 상관관계 함수는 다음과 같다.

$$\rho(t) = \frac{< u(t_0)u(t+t_0) >}{< u^2(t_0) >} \tag{10}$$

$$\rho^a(t) = \frac{< a(t_0)a(t+t_0) >}{< a^2(t_0) >} \tag{11}$$

괄호 <>은 조화 평균된 값을 의미하고 t_o는 기준 시간을 의미한다. 난류 유체의 Kolmogorov microscale에 상응하는 Stokes number($St = \tau_p/\tau_\eta$)와 w/v_η 두 가지 매개변수를 고려하였다.

Fig 1.은 침강 속도와 난류 유체의 특성속도인 Kolmogorov 속도의 비 w/v_η를 1로 고정시키고 Stokes number를 0.1에서 100까지 변화시키면서 속도와 가속도에 대한 라그란지안 상관관계 함수

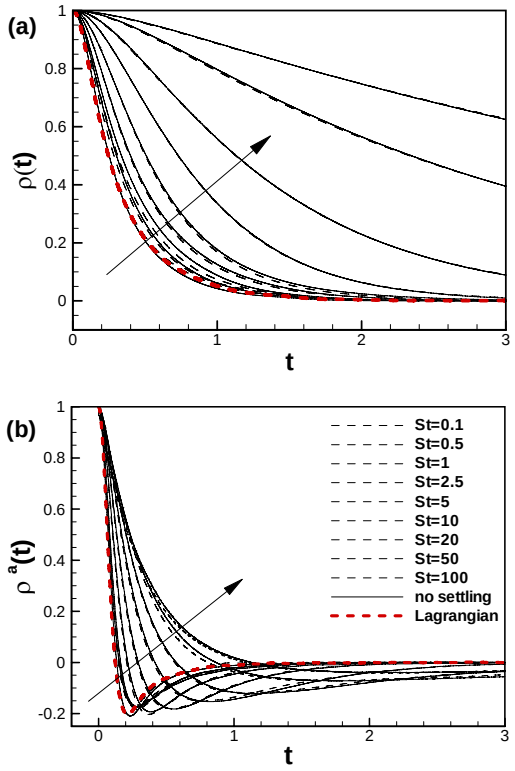

Fig 1 Lagrangian autocorrelation function of velocity and acceleration at various $0.1 \le \mathrm{St} \le 100$

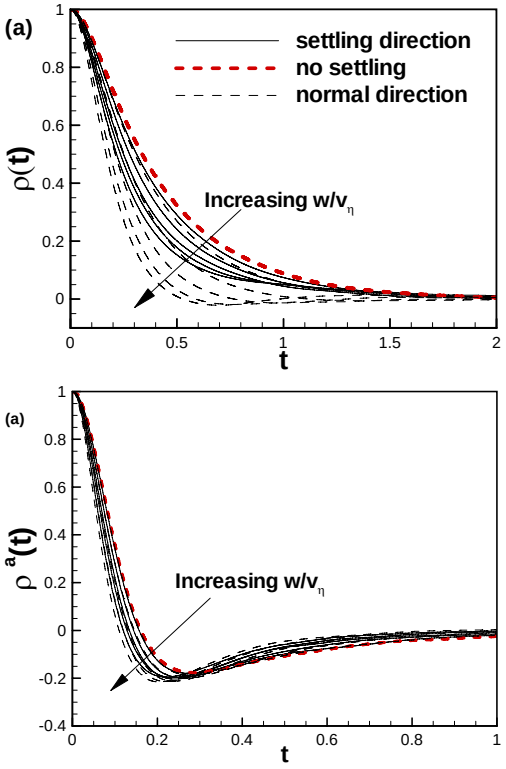

Fig 2 Lagrangian autocorrelation function of velocity and acceleration at various $1 \le w/v_\eta \le 5$

의 결과를 나타낸 것이다. Fig.2 는 반대로 $St = 1$로 고정하고 w/v_η를 1부터 5까지 변화시켰을 때 속도와 가속도의 라그란지안 상관관계 함수를 나타낸 것이다. 두 경우 모두 중력의 영향이 커지면 커질수록 입자의 상관관계는 감소하고 침강 방향의 상관관계는 그 외 방향에 비하여 조금 더 유지되는 것을 알 수 있다. 이는 Csanady와 Yudine이 제시한 것과 같이 부유되어 있는 작고 무거운 입자들은 침강하는 속도 즉, 중력의 영향으로 인하여 유동장 내의 난류구조와 같은 소용돌이(eddy)들을 뚫고 지나가려 하기 때문이다. (Crossing trajectory effect)

3.2 침강 속도의 증가

중력의 영향으로 인한 부유 입자의 평균 침강 속도 V_m의 증가를 조사하였다. Stokes number를 10^{-3}부터 5까지 변화시키면서 난류가 없는 유체 내에 부유되어 있는 입자의 평균 침강 속도와 비교하였다. 부유 입자의 평균 침강 속도비율에 대한 식은 다음과 같다.

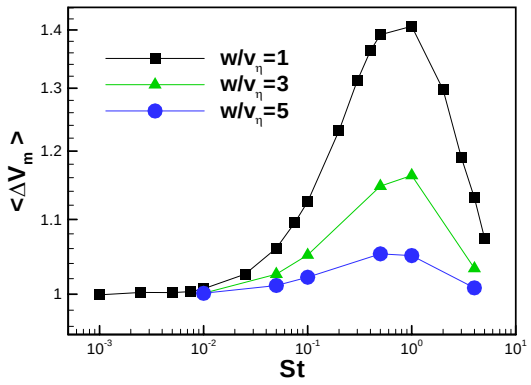

Fig. 3 Increasement of settling velocity rate

$$< \Delta V_m > = \frac{(V_m - w)}{w} + 1 \qquad (12)$$

식 (12)에서 오른쪽 마지막 항은 도표를 로그스케일로 표현하기 위해서 추가하였다. Fig 3.에서 보는 것과 같이 평균 침강 속도비는 $St = 1$ 주변에서 가장 큰 증가율을 보였고 $St = 1$ 전후로 그 증가율이 감소하는 것을 알 수 있다. 이것은 Wang & Maxey(1993)가 제시한 것처럼 Stokes number가 1일때 작은 소용돌이(eddy)와 같은 난류 구조 주위에서 부유입자들이 선택적으로 집중하는 현상이 가장 크기 때문이다. 침강 속도비 w/η를 3과 5로 증가시킬수록 평균 침강속도 증가율이 줄어드는 것을 확인하였다.

위의 결과에서 아주 작은 Stokes number를 갖는 경우 입자가 아주 작아져서 난류 유체의 움직임과 완전히 같아질 것으로 예상했던 것과 달리 부유 입자의 평균 속도는 Stokes number가 줄어들수록 중력방향으로 난류가 없는 잔잔한 유체 내에서 입자가 침강하는 속도 크기에 가까워지는 것을 알 수 있었다.

4. 결 론

입자가 부유되어 있는 중력이 고려된 등방성 난류에서 유체 입자가 부유 입자에 미치는 영향을 알아보기 위하여 직접수치모사가 수행되었다. 넓은 범위의 Stokes number($0.1 < St < 100$)와 침강 속도비에 대한 부유 입자의 속도와 가속도의 상관관계를 각각 알아보았다. 부유 입자는 중력의 영향으로 그 상관관계를 더 빠르게 잃어버리는 것을 확인하였고 중력 방향의 상관관계가 그

외 방향에 비하여 조금 더 유지되는 것을 확인하였다. 입자의 평균 침강 속도가 난류가 없는 유체 내에서의 침강 속도 보다 증가하는 것을 확인하였고 Stokes number가 아주 작은 입자 즉, 크기가 매우 작은 부유 입자라 하더라도 입자 평균속도가 줄어들지 않고 계속 침강하는 것을 확인하였다. 조금 더 엄밀한 분석을 위하여 추후 다양한 크기의 Re_λ를 고려하여 그것에 따른 입자들의 상관관계와 침강속도를 비교할 필요가 있다.

참고문헌

(1) Aliseda, A., Cartellier, A., Hainaux, F. and Lasheras, J. C, 2002, "Effect of preferential concentration on the settling velocity of heavy particles in homogeneous isotropic turbulence," *J. Fluid Mech.*, Vol. 468, pp.77-105

(1) Balachandar, S., Maxey, M. R., 1989, " Methods for evaluating fluid velocities in spectral simulation of turbulence," *J. Fluid Mech.*, Vol. 83, pp.96.

(2) Choi, J. -I., Lee, C., 2003, "Lagrangian statistics in turbulent channel flow." P*hys. Fluids*, Vol. 26, pp. 883.

(3) Elgobashi, S. and Truesdell, G. C., 1993, "On the two-way interaction between homogeneous turbulence and dispersed solid particles. I: Turbulence modification," *Phys. Fluids A*, Vol. 5. No. 7, pp. 1790.

(4) Eswaran, V. and Pope, S. B., 1988, "An exam ination of forcing in direct numerical simulation of turbulence," *Comp. Fluids*, Vol. 16, pp. 257.

(5) Jung, J., Yeo, K. and Lee, C., 2008, "Behavior of heavy particles in isotropic turbulence," *Phys. Rev. E* 77, 016307

(6) Lundbladh, A. et al., 1999, *An efficient spectral method for simulation of incompressible flow over a flat plate*, Royal Institute of Technology.

(7) Maxey, M. R. and Riley, J. J., 1983, "Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow," *Phys. Fluids*, Vol. 26, No. 4, pp. 883.

(8) Pope, S. B., 2000, *Turbulence Flows*, Cambridge University. Press.

(9) Soltani, M. and Ahmadi, G., 1995, "Direct numerical simulation of particle entrainment in turbulent channel flow," *Phys. Fluids*, Vol. 7, No. 3, pp. 647.

(10) Squires, K. D. and Eaton, J. K., 1990, "Particle response and turbulence modification in isotropic turbulence," *Phys. Fluids A*, Vol. 2, No. 7, pp. 1191

(11) Squires, K. D. and Eaton, J. K., 1991, "Measurements of particles dispersion obtained from direct numerical simulations of isotropic turbulence," *J. Fluid Mech.*, Vol. 226, pp 1.

(12) Wang, L. P. and Maxey, M. R., 1993, "Settling velocity and concentration distribution of heavy particle in homogeneous isotropic turbulence," *J. Fluid Mech.*, Vol. 256, pp.27-68

(13) Yang, C. Y. and Lei, U., 1998, "The role of turbulence scales in the settling velocity of heavy particles in homogeneous isotropic turbulence," *J. Fluid Mech.*, Vol. 371, pp.179-205