

웨이블릿 변환을 이용한 충격력을 받는 외팔 보의 동적 변형 특성 연구

박호영* · 유흥희†

Study on the Dynamic Deformation Characteristics of a Cantilever Beam Undergoing Impulsive Force Using Wavelet Transformation

Ho Young Park and Hong Hee Yoo

Key Words : Dynamic deformation characteristics(동적 변형 특성), Impulsive force(충격력), Wavelet transform(웨이블릿 변환)

Abstract

Dynamic response characteristics of a beam undergoing impulsive force are investigated using the wavelet transform method in this study. When an impulse is applied to an arbitrary position of a beam, it will generate a structural deformation wave. The characteristics of the wave are changing in the domain of time and space. The maximum amplitude of each natural frequency mode and the time to reach the maximum amplitude are obtained in this study. The effects of the location of impulse on the variations of the dynamic characteristics is also investigated.

1. 서론

보 구조물에 충격 하중이 가해지면 변형을 일으키며 이에 의해 파동이 발생하게 된다. 이러한 파동들은 경계면에 도달하면 반사등을 일으켜 복잡하게 변화되므로 정적 하중이나 긴 주기를 가지는 하중과는 전혀 다른 동적 응답이 나타난다. 또한 이러한 충격 하중은 구조물에 순간적인 국부 변형을 야기 시키며 이는 구조물의 강도와 강성을 변화시켜 구조물의 안정성에 영향을 미치므로 구조물의 안전설계를 위해서는 이러한 충격 문제에 대한 연구가 매우 중요하다. 앞서 말했듯이 보 구조물에 충격 하중이 가해지면 각각의 모드에 해당하는 파동이 발생하게 되며 이러한 파동들은 주파수에 따라 전파 속도가 다른 분산적인 성질을 가지고 있으므로 시간에 따라 복잡하게 변화하고 그로 인한 구조물의 동적 변형 응답 또한 시간에

따라 복잡하게 변화한다. 따라서 구조물의 동적 변형 응답을 정확히 해석 하기 위해서는 시간에 따른 각 고유진동 주파수 모드 별 구조물의 동적 변형 응답을 구할 수 있어야 한다. 본 논문의 목적은 보의 경계조건들과 충격력이 작용하는 위치 변화에 따른 각 고유진동 주파수 모드 별 최대 변형이 발생하는데 소요되는 시간 및 그때의 최대 변형량을 wavelet transform method 를 이용하여 각각의 파동 별로 도출한 후 그 주요 특성들을 분석하고 규명하는데 두고 있다. 이러한 연구들을 하기 위해 본 논문에서는 Rayleigh-Ritz assumed mode methods 를 적용하여 보 구조물을 모델링 하였으며 kane 의 방법에 의해 충격력을 받는 보 구조물을 굽힘 방향 운동 방정식을 유도 하였다. (참고문헌[1-10]).

본 논문의 구성은 다음과 같다. 서론에 이어서 다음 절에서는 충격력을 받는 보의 모델링 과정을 설명한 후에 3 절에서는 웨이블릿 변환(wavelet transform) 이론에 대해서 설명하였다. 다음 4 절에는 웨이블릿 변환(wavelet transform)을 이용하여 보의 경계조건들과 충격력이 작용하는 위치 변화에 따른 동적 특성 변화에 관한 해석결과를 수록하고 주요 의미들을 논의하였다. 마지막 절에서는 본 논문에서 얻어진 핵심적인 결과들을 요약하고 주

† 정회원, 한양대학교 기계공학부
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr
TEL : (02)2220-0446 FAX : (02)2293-5070

* 한양대학교 대학원 기계공학과

** 한양대학교 기계공학부

요 결론을 수록하였다

2. 운동 방정식 유도

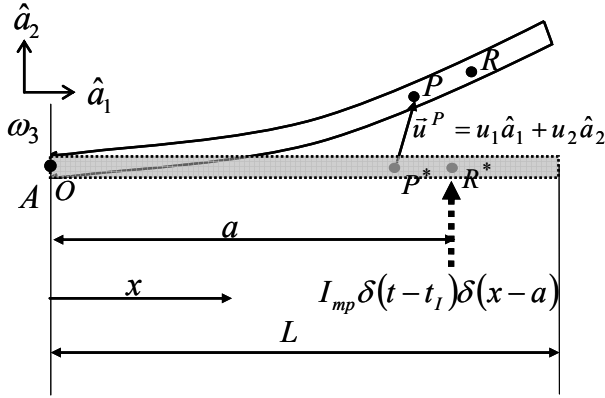


Fig. 1 Configuration of a flexible beam

Fig.1 은 임의의 충격력을 받는 길이 L 인 외팔 보를 보여준다. 이 보 한쪽 끝 단은 부유 기준 좌표계(floating reference frame) A의 기준 점인 O 점에 부착되어 있으며, 충격력은 R 점에서 굽힘 방향으로 $I_{mp} \delta(t-t_1) \delta(x-a)$ 과 같은 형태로 충격량 I_{mp} 와 dirac delta function 을 사용하여 시간과 공간에 대하여 지정된 순간에만 작용하도록 정의하였다. 보 위의 임의의 한 점인 P 점의 탄성변형 변위는 직교방향 변수인 u_1, u_2 로 나타내어 진다. 여기서 ρ_b 는 보의 단위 길이당 질량이고, E 는 탄성 계수 그리고 I 는 보 단면관성모멘트이다. 충격력을 받는 외팔 보의 운동 방정식을 Kane 의 방법으로 이용하여 유도하기 위해 P 점의 속도는 변수 μ_1 와 u_2 를 사용하여 식(1)과 같이 나타낼 수 있고, P 점의 가속도는 선형화 하여 식(2)와 같이 얻을 수 있다.

$$\vec{v}^P = [v_1 + \dot{\mu}] \hat{a}_1 + [v_2 + \dot{u}_2] \hat{a}_2 \quad (1)$$

$$\vec{a}^P = [\dot{v}_1 + \ddot{\mu}] \hat{a}_1 + [\dot{v}_2 + \ddot{u}_2] \hat{a}_2 \quad (2)$$

여기서 v_1 과 v_2 는 각각 \hat{a}_1 과 \hat{a}_2 방향으로 O 점에 작용하는 병진 속도를 나타낸다. 일반관성력 F_i^* 는 P 점의 속도와 가속도를 이용하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$F_i^* = - \int_0^L \rho_b \left(\frac{\partial \vec{v}^P}{\partial \dot{q}_{1i}} \right) \cdot \vec{a}^P dx \quad (i=1,2,\dots,\mu_1)$$

$$F_{i+\mu_1}^* = - \int_0^L \rho_b \left(\frac{\partial \vec{v}^P}{\partial \dot{q}_{2i}} \right) \cdot \vec{a}^P dx \quad (i=1,2,\dots,\mu_2) \quad (3)$$

일반작용력 F_i 는 보의 탄성에너지 U 에 의한 일반작용력 F_i^U 와 충격력에 의한 일반작용력 F_i^I 로 이루어진다. 운동방정식에서 보에 작용하는 충격력은 충격량 I_{mp} 와 Dirac delta function 을 이용하여 나타낼 수가 있으며, 이 충격력에 의한 일반작용력은 이 함수에 P 점의 편속도를 내적 한 후 보 전체 길이에 대해 적분을 하는 방법으로 유도할 수 있다.

$$F_i^U = - \frac{\partial U}{\partial q_{1i}} = - \left(\int_0^L EA \phi_{1i,x} \phi_{1j,x} dx \right) q_{1j}$$

$$(i=1,2,\dots,\mu_1)$$

$$F_{i+\mu_1}^U = - \frac{\partial U}{\partial q_{2i}} = - \left(\int_0^L EI \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} dx \right) q_{2j}$$

$$(i=1,2,\dots,\mu_2) \quad (4)$$

$$F_i^I = 0 \quad (i=1,2,\dots,\mu_1)$$

$$F_{i+\mu_1}^I = \int_0^L \left(\frac{\partial \vec{v}^P}{\partial \dot{q}_{2i}} \right) \cdot (I_{mp} \delta(t-t_1) \delta(x-a)) \hat{a}_2 dx$$

$$= \int_0^L \phi_{2i} \hat{a}_2 \cdot (I_{mp} \delta(t-t_1) \delta(x-a)) \hat{a}_2 dx$$

$$= I_{mp} \delta(t-t_1) \phi_{2i}(a) \quad (i=1,2,\dots,\mu_2) \quad (5)$$

$$F_i = F_i^U + F_i^I \quad (i=1,2,\dots,\mu_1 + \mu_2) \quad (6)$$

여기서 μ_1 과 μ_2 는 변형 변수 s 와 u_2 를 위한 일반 좌표의 수이다.

최종적으로 운동방정식은 일반작용력과 일반관성력의 합으로 식(7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_i + F_i^* = 0 \quad (i=1,2,\dots,\mu_1 + \mu_2) \quad (7)$$

본 논문에서는 굽힘 방향으로만 충격력이 작용하는 것으로 하고 굽힘 방향 운동 방정식만 고려하기로 한다. 따라서, 유도된 굽힘 방향 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} \left[\left(\int_0^L \rho_b \phi_{2i} \phi_{2j} dx \right) \ddot{q}_{2j} + \left(\int_0^L EI \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} dx \right) q_{2j} \right] = I_{mp} \delta(t - t_I) \phi_{2i}(a) - \dot{v}_2 \left(\int_0^L \rho_b \phi_{2i} dx \right) \quad (i = 1, 2, \dots, \mu_2) \quad (8)$$

충격력이 작용하는 보는 시간 $t = t_I$ 에서 무한대의 충격력이 발생한다. 상세하게 표현하면 $t = t_I$ 에서는 충격력에 의한 가진력이 존재하고 $t = t_I +$ 에서는 충격력에 의한 가진력이 존재하지 않는다. 따라서 $t = t_I +$ 이후의 응답은 충격력은 존재하지 않고 충격력에 의해 발생하는 초기 조건에 의해서만 응답이 발생하므로 초기 조건만으로도 충격력과 동일한 결과를 얻을 수 있다. 시간 t_I 와 $t_I +$ 에서 충격력은 변위 변화는 발생시키지 않고 속도 변화만 발생시키므로 다음과 같은 초기 조건이 주어진다.

$$q_{2i}(t_I) = q_{2i}(t_I +) \quad (9)$$

일반 좌표의 시간에 대한 미분치를 일반 속도라 정의한다. 그리고 충격력 작용 후 굽힘 방향 일반 속도를 구하기 위해 굽힘 방향 운동방정식인 식(8)의 양변을 $t = t_I$ 부터 $t = t_I +$ 까지 적분한다. $\int_{t_I}^{t_I+} \delta(t) dt = 1$ 이므로 $t = t_I +$ 에서의 일반 속도는 다음의 식을 풀어 구할 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} \left(\int_0^L \rho_b \phi_{2i} \phi_{2j} dx \right) [\dot{q}_{2j}(t_I +) - \dot{q}_{2j}(t_I)] = I_{mp} \phi_{2i}(a) \quad (i = 1, 2, \dots, \mu_2) \quad (10)$$

여기서 $\dot{q}_{2j}(t_I)$ 는 충격력이 작용하지 않은 경우의 굽힘 방향 운동 방정식을 풀어 구할 수 있다. 따라서 식(10)으로부터 구한 $\dot{q}_{2j}(t_I +)$ 을 초기 조건으로 하여 굽힘 방향 운동 방정식을 풀면 충격력에 의한 보의 움직임을 나타낼 수 있다.

그러므로 이러한 모델링을 통해 충격에 의해 나타나는 보의 굽힘 방향 변형 응답을 시간과 공간상에서 동시에 구할 수 있다.

3. 웨이블릿 변환

푸리에 변환은 다음 식으로 정의된다.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (11)$$

즉 시간영역(t)에서의 신호 $f(t)$ 를 주파수영역에서의 신호 $F(\omega)$ 로 변환하는 과정으로 다음과 같이 역 변환이 가능하여 신호해석 분야에서 가장 중요한 수학적 도구이다.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (12)$$

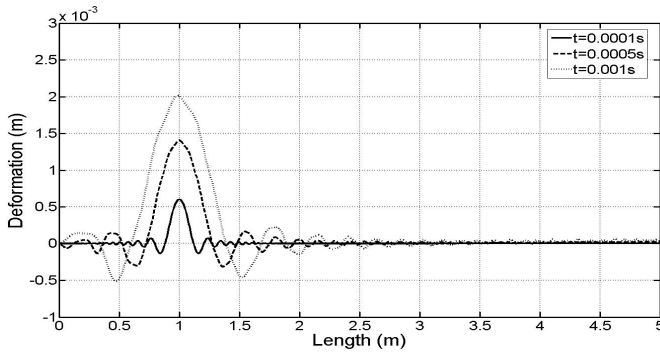
푸리에 변환은 시간 또는 공간상의 정보를 정해진 주파수 대역에서 생성되는 주기함수를 매개로 주파수 공간으로 전환을 통해 신호가 지니고 있는 주파수 성분에 대한 다양한 분석이 가능하다. 그러나 푸리에 해석은 주파수영역으로 변환할 때, 모든 시간 $(-\infty \sim \infty)$ 에 대해서 적분하기 때문에 시간과 관련된 정보를 잃어 버리는 커다란 단점을 가지고 있다. 그러므로, 다양한 시간 스펙트럼을 가지는 비정상 상태신호(non-stationary signal)들에 대한 분석은 적당하지 않다. 이러한 단점을 보완하기 위해 나온 해석 방법이 SFTF(Short time Fourier Transform)으로 식(17)으로 정의 된다.

$$STFT(s, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t-s) e^{-j\omega t} dt \quad (13)$$

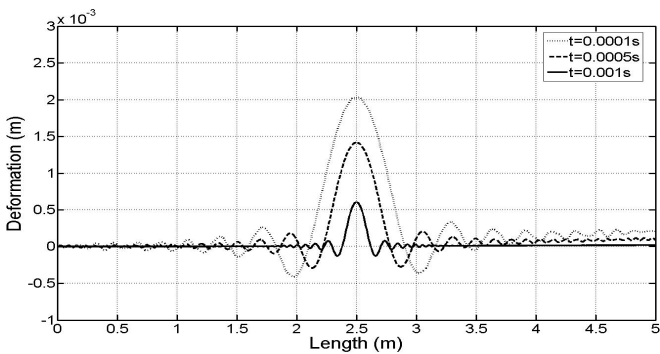
이 방법은 푸리에 변환에 창문과 같은 가우시안(Gaussian function) 함수를 적용하여 신호를 일정한 윈도우의 크기에 따라 결정되는 영역에서 시간과 주파수를 모두 알 수 있다. 하지만 적용된 창문의 크기가 제한되어 있으므로, 전체 영역에 대한 정확한 분석이 어렵다. 따라서 가변적인 윈도우를 얻을 수 있는 방법인 웨이블릿 변환이 개발되어 사용되게 되었다. 연속 웨이블릿 변환이란 연속 웨이블릿 함수를 이용해 신호를 분석하는 방법을 말하며 Morlet 과 Grossman 에 의해 정의된 연속 웨이블릿 변환은 아래 식과 같다.

$$WT(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^{a,b}(t) dt, \quad (a, b \in R, a \neq 0) \quad (14)$$

여기서 $f(t)$ 는 신호, a 는 척도인자(scale parameter), b 는 이동인자(shifting parameter)로서 실수이며 $\psi^{a,b}(t)$ 는 웨이블릿 모 함수(mother wavelet)를 아래 같이 scaling 하고 shift 시킴으로써 얻어지는 함수로 웨이블릿(wavelet) 함수라 불린다.



(a) Impact position : 1m



(b) Impact position : 2.5m

Fig. 2 Variation of deformation of beam versus time with different impulsive force position

$$\psi^{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (15)$$

식(20)에서 $\psi(t)$ 가 웨이블릿 모 함수이며 척도인자인 a 값에 의해서 웨이블릿 모 함수 크기가 변화되는데, a 가 작아질수록 $\psi(t)$ 는 수축되어 신호의 고주파성분을 찾아내고, a 가 커지면서

$\psi(t)$ 는 확장되어 신호의 저주파 성분을 분석하는데 사용된다. 식(19) 에 의해 연속 웨이블릿 변환은 다음 같이 나타낼 수 있다.

$$WT(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (16)$$

사용되는 웨이블릿 모함수의 종류는 다양하며 각각의 웨이블릿 모함수가 가지고 있는 신호분해 특징과 장점에 따라서 다양한 웨이블릿 변환이 존재하나 본 연구에서는 Matlab Wavelet Toolbox 를 사용하여 웨이블릿 변환을 하였으며 가장 일반적으로 사용되는 Morlet 웨이블릿을 사용했다.

4. 수치 해석 결과

4.1 충격 위치에 따른 동적 변형 특성 변화

Fig. 2 (a), (b)는 충격력이 작용하는 위치와 시간에 따른 보의 굽힘 방향 변형 량을 나타내고 있다. 서론에서도 말했듯이 파동의 분산적인 성질에 의해 파동들이 시간에 따라 복잡하게 변화하므로 충격 위치와 시간에 따라 보의 동적 변형 특성이 다르다는 것을 알 수 있다. 충격 직후 충격 지점에 나타나는 변형 량을 보면 충격 위치에 상관 없이 비슷한 크기를 보이지만 시간이 지날수록 충격 위치에 따른 변형 량이 차이가 크게 나타나는 것을 확인 할 수 있었다. 이러한 동적 변형 특성 변화를 보다 정확하게 확인하기 위하여 웨이블릿 변환을 사용하여 Fig.3 에는 각 주파수 모드에 해당하는 파동에 대한 굽힘 방향 최대 변형이 발생하는 시간을 나타내었으며, Fig.4 에는 최대 변형이 발생하는 시간에서의 굽힘 방향 최대 변형 량을 나타내었다.

4.2 웨이블릿 변환을 통한 충격 위치에 따른 동적 변형 특성 해석

Fig.3 과 Fig.4 는 각 주파수 모드에 해당하는 파동에 대한 굽힘 방향 최대 변형이 발생하는 시간과 충격 지점에서의 최대 변형 량을 나타내고 있다. 전반적인 변형 특성으로 보아 저차 모드에 해당하는 파동이 고차 모드에 해당하는 파동에 비해 영향도가 큰 것을 예측 할 수 있었으며, 충격 위치에 상관없이 고차 모드에 해당하는 파동에 의한 동적 변형 특성들은 큰 차이가 없었다. 그러나 저차 모드에 해당하는 파동에서는 고정 단 근처로 갈수록 중심점에 충격이 가해졌을 때에 비해 최대 변형이 발생하는 시간이 짧아 지고 있으며 최대 변형량 또한 작아지는 결과를 확인 할 수 있었다. 이는 충격 위치가 고정 단으로 갈수록 파장이 긴 저 주파수에 해당하는 파동의 노드 점과 가까워져서 상대적으로 변형량이 작게 나오는 것이다. 또한 저차 모드에 해당하는 파동 일수록 충격 위치에 상관 없이 변형되는 속도가 낮은 것을 확인 할 수 있었다.

5. 결론

본 논문에서는 충격력을 받는 외팔 보의 충격력 위치에 따라 다르게 나타나는 동적 변형 특성 변화를 웨이블릿 변환을 통하여 나타내었다. 충격 위치에 상관없이 최대 변형이 발생하는 시간과 최대

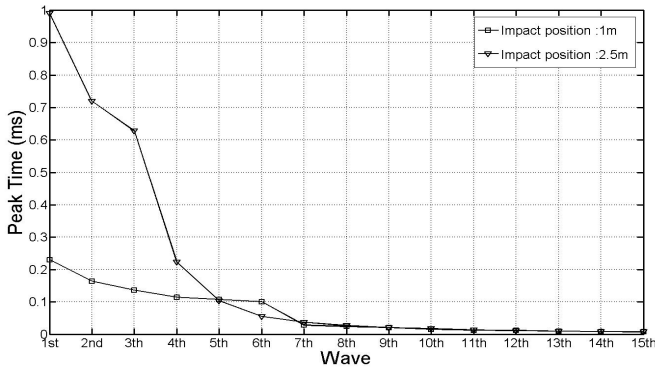


Fig. 3 Variation of Peak time of beam versus Wave with different impulsive force position

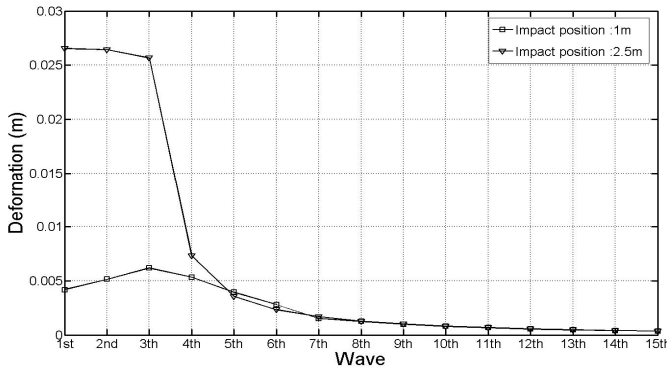


Fig. 4 Variation of Maximum deformation of beam versus Wave with different impulsive force position

변형 량 모두 저차 모드에 해당하는 파동의 경우에 크게 나타났으며 충격위치에 따라서는 고정 단으로 갈수록 중심점에 비해 최대 변형이 발생하는 시간이 짧아 지고 있으며 최대 변형량 또한 작아지는 결과를 확인 할 수 있었다. 또한 충격 위치가 고정 단으로 갈수록 1 차 모드에 해당하는 파동에 대한 변형 특성은 파동이 가지는 노드 점의 영향으로 2 차 3 차 모드에 해당하는 파동보다 최대 변형이 발생하는 시간은 길어지며 변형량은 줄어드는 것을 확인 할 수 있었다.

참고문헌

- (1) Buffinton, K. and Kane, T., 1985, "Dynamics of a Beam Moving Over Supports", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 21, pp. 617-643.
- (2) Kane, T., Ryan, R. and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol.10, pp. 139-151.
- (3) Fallahi, B. and Lai, S., 1994, "An Improved Numerical Scheme for Characterizing Dynamic Behavior of High-

- Speed Rotating Elastic Beam", *Computers & Structures*, Vol. 50, pp. 749-755.
- (4) Lai, S., 1994, "Nonlinear Finite Element Modeling of a High Speed Rotating Timoshenko Beam Structure", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 36, pp. 849-861.
- (5) Yoo, .H.H., Ryan, R.R. and Scott, R.A., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 181, No. 2, pp. 261-278.
- (6) Park, J. H. and Yoo, .H.H., 1998, "Flapwise Bending Vibration of Rotating Timoshenko beams with Concentrated Mass and Mass Moment Inertia", *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 8, No. 2, pp. 353-360.
- (7) Solberg, J.M. and Papadopoulos, P., 1998, " A finite Element Method for Contact/Impact" , *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol.30, pp. 297-311.
- (8) Bittencourt, E. and Creus, G.J., 1998, " Finite Element Analysis of Three-Dimensional Contact and Impact in Large Deformation Problems" , *Computers and Structures*, Vol.69, pp. 219-234.
- (9) Demkowicz, L. and Bajer, A., 2001, " Conservative Discretization of contact/impact problems for nearly rigid bodies" , *Computer Methods in Applied. Mechanics and. Engineering*, Vol.190, pp. 1903-1924.
- (10) Lim, H. S., and Yoo, H,H, 2006, " Dynamic Analysis of an Impulsively Forced Rodtating Cantilever Beam" , *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 16, No. 3, pp. 226-232
- (11) <http://www.mathworks.com>, Wavelet Toolbox
- (12) Louis A. K. 1997, " Wavelets : theory and applications" , John Wiley & Sons, Inc., New York.
- (13) Lee S. H., Yoon D. H., 2004, " Theory and applications of wavelet Transform" , Bo Sung Kag, Inc., South Korea.
- (14) Bedford A. and Drumheller, 1993, " *Introduce to Elastic Wave Propagation*" , John Wiley & Sons, Inc., New York.
- (15) Fahy, F.J, 1985, " *Sound and Structural Vibration : radiation, transmission and response*" , ACADEMIC PRESS, Inc., England.