

Hertz 접촉이론을 이용한 탄성체의 충돌 해석을 위한 효율적 모델링에 관한 연구

임홍석[†], 유홍희^{*}

Study on an efficient modeling for the impact analysis of a flexible body employing Hertzian contact theory

Hong Seok Lim and Hong Hee Yoo

Key Words : Hertzian contact theory(Hertz 접촉이론), impact analysis(충돌 해석), thickness deformation(두께 변형), lateral deflection(횡 변위)

Abstract

Since thickness deformation and lateral deflection often occurs during the collision of flexible bodies, they should be considered simultaneously in the impact analysis. The thickness deformation, however, cannot be considered in beam/shell theory since the thickness is assumed to be constant in the theory. So, solid elements are employed to estimate the thickness deformation. However, the CPU time increases significantly if solid elements are employed. In the present study, a modeling method for the impact analysis of a flexible body employing Hertzian contact theory is presented. The efficiency and the accuracy of the modeling method are discussed with some numerical examples.

1. 서론

구조물의 탄성 충돌 해석은 오랫동안 대두되어 온 문제이며 과거 40~50 년 동안 이 분야의 연구는 실험과 해석 모두에서 큰 발전을 이뤄오고 있다(참고문헌 [1-3] 참조). 실험적 방법은 좋은 결과를 나타내나 비용이 많이 들고 제한적인 정보만을 보여주는 반면 유한요소 해석과 같은 수치적 해석 방법은 특히 실험과 연계되었을 때 매우 효율적인 대안으로서 증명되어왔다. 따라서 충돌이 발생하는 구조물의 효율적인 모델링은 유한요소법이 제안되고 있으며 이를 이용한 상용 해석 프로그램은 최근 충돌체의 충격 동안의 복잡한 변형도 정확하게 해석할 수 있는 수준으로 발전했다. 접촉 해석 알고리즘과 다양한 재료 모델이 있는 일반적인 3-D 유한요소(FE) 프로그램인 LS-DYNA 는 다양한 속도의 충돌을 받는 여러 형태의 구조물 해석에

성공적으로 이용되었다(참고문헌 [4-8] 참조).

이러한 구조물들의 유한요소 모델링은 충돌 순간의 충돌 물체간의 변형을 반영하기 위해 주로 solid 요소를 사용하여 모델링 되었다. 그러나 충돌은 매우 짧은 시간에 발생하므로 정확한 충격력의 도출을 위해 매우 작은 time step size로 해석되어야 하며 solid 요소로 모델링 된 모델은 노드와 요소 개수가 증가하게 되므로 해석 시 많은 시간이 필요하게 된다. 반면에 모델을 보다 간략화 하여 beam/shell 요소를 사용한 경우에는 solid 요소를 사용한 경우에 비해 해석 시간은 감소하나 두께 방향 압축 변형을 고려할 수 없으므로 구조물의 충돌 해석 시 발생하는 국부 압축변형의 영향을 무시하게 된다. 따라서 본 논문에서는 유한요소모델의 충돌 해석 시 국부변형까지 고려된 충격력의 도출과 함께 해석 시간을 단축할 수 있는 효율적인 충돌 해석 모델링 방법을 제안하고자 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 서론에 이어 다음 절에서는 충돌 시 발생하는 접촉력을 구조물의 굽힘 변형과 국부 변형을 모두 고려한 수정된 Hertz 접촉 이론을 이용하여 유도하고, 유도된 충격력과 상용 FE code 인 LS-DYNA 를 연동하여 해석할 수 있는 모델링 절차를 구축한다. 3 절에서는

[†] 회원, 한양대학교 기계공학과

E-mail : limit75@dreamwiz.com

TEL : (02)2299-8169 FAX : (02)2299-8169

^{*} 책임저자 한양대학교 기계공학부

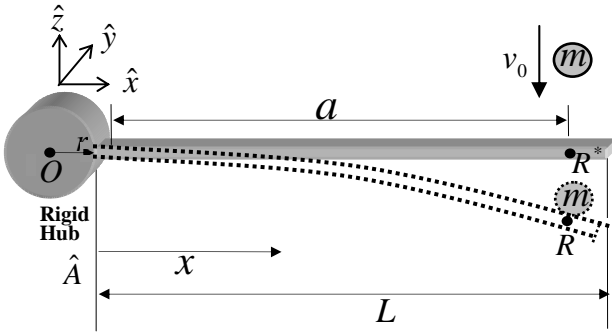


Fig. 1 Configuration of a cantilever beam

제안한 방법을 이용하여 몇 가지 예제의 해석 결과를 도출하고 이 결과를 beam/shell 모델 결과와 또 solid 모델의 결과와 비교하여 충돌 시 발생하는 접촉력의 정확성을 검증하고 해석 시간의 감소로 인한 효율성을 증명한다. 마지막 절에서는 본 논문의 결론을 수록하였다

2. 충돌 해석 모델링

2.1 접촉력 유도

본 논문에서는 beam/shell 모델을 이용해서 보다 정확한 접촉력을 구하고 빠른 충돌 해석을 하는 방법을 제안하고자 하므로 보와 구의 충돌 모델을 예제로 정하여 해석을 진행하고자 한다.

Fig. 1 은 길이 L 인 외팔 보를 보여준다. 이 보 는 고정단에 부착되어 있으며, 충돌 전 v_0 의 속 도를 가지는 구와 임의의 시간 t_I 에 충돌 위치 a 인 R 지점에서 굽힘 방향인 \hat{z} 방향으로 충돌이 발생한다. 여기서 ρ_b, ρ_s 는 보와 구의 밀도이고, E_b, E_s 은 보와 구의 강성 계수, h, b 는 보의 높 이와 폭, A 는 단면 면적, ν_b, ν_s 은 보와 구의 Poisson ratio, I 는 보의 관성 모멘트, 그리고 R_b, R_s 는 보와 구의 반지름이다. (보는 무한대의 곡률을 가지는 평판으로 가정) 여기서 하첨자 b 는 보를 나타내며 s 는 구를 나타낸다.

Hertz 접촉이론으로부터 보와 구의 자유 충돌 시의 접촉력 F_C 을 구하면, 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$F_C = \alpha \delta^{\frac{3}{2}} \quad (1)$$

여기서 δ 는 충돌하는 물체 사이의 충돌 변형 량을 나타내며 k_i 와 α 는 다음과 같다.

$$k_b = \frac{1-\nu_b^2}{\pi E_b} \quad k_s = \frac{1-\nu_s^2}{\pi E_s}$$

$$\alpha = \frac{4}{3\pi(k_b + k_s)} \sqrt{\frac{R_b R_s}{R_b + R_s}}$$

$$= \frac{4}{3\pi(k_b + k_s)} \sqrt{R_s} \quad (\because R_b = \infty)$$

굽힘 방향으로만 충돌이 일어나므로 굽힘 방향 만 고려하고 충돌 발생 시간 이후부터 충돌 종료 시까지 발생하는 접촉력 F_C 는 충돌 시간 동안 시간에 따라 변하게 되므로 준정적 과정으로 가정 하여 매 해석 단계마다 개선된 접촉력 F_C 를 적 용하게 된다.

접촉력을 구하기 위해서는 충돌 물체 사이의 충돌 변형량 δ 를 구해야 한다. 그러나 해석 과정 에서 이전 time step 에서 얻어진 δ 를 다음 해석 time step 에 적용하게 되어 도출한 접촉력은 실제 현상에 비해 시간적으로 뒤로 늦춰져 나타나게 된 다. 충돌은 충돌 발생 순간에 변위의 변화보다 속 도의 변화가 더 빠르게 나타나므로 접촉력이 실제 현상보다 늦춰져 도출되는 문제점은 접촉력을 계 산할 때 δ 를 직접 적용하지 않고 $\dot{\delta}$ 를 이용하여 충돌 물체 사이의 상대 속도 $\dot{\delta}$ 을 구하고 $\dot{\delta}$ 를 이용하여 수정된 δ 으로 접촉력을 도출함으로 해 결할 수 있다. Hertz 접촉이론을 이용한 충돌 물체 사이의 상대속도 $\dot{\delta}$ 는 다음과 같은 식으로 구할 수 있다.

$$\dot{\delta} = \sqrt{\dot{\delta}_0^2 - \frac{4}{5} \beta \delta^{\frac{5}{2}}} \quad (\text{압축})$$

$$\dot{\delta} = -\sqrt{\frac{4}{5} \beta \left(\delta_{\max}^{\frac{5}{2}} - \delta^{\frac{5}{2}} \right)} \quad (\text{인장}) \quad (2)$$

여기서 $\dot{\delta}_0$ 은 충돌 직전 두 물체간 상대속도이 며 δ_{\max} 는 $\dot{\delta} = 0$ 일 때(상대 속도의 방향이 바뀌 는 순간)의 충돌 물체간 충돌 변형량을 나타낸다. 그리고 β 는 다음과 같다.

$$\beta = \frac{\rho_b AL + \rho_s \frac{4}{3} \pi R_s^3}{\left(\rho_b AL \right) \left(\rho_s \frac{4}{3} \pi R_s^3 \right)} \alpha$$

Hertz 접촉이론으로부터 유도된 식(2)는 자유 충 들의 경우이므로 이 논문에서 예제로 든 보 구조

물에는 그대로 적용할 수 없다. 예제로 든 외팔보 구조물의 경우는 강제 운동은 없고 굽힘 변형이 발생하므로 이 부분을 고려하여야 한다. 이 경우에 충돌 지점에서 발생하는 충돌 물체 간 상대 속도는 고정되어 있는 경계 조건과 보의 굽힘 변형 속도의 영향을 받게 되므로 충돌 형태에 따른 Hertz 접촉 이론으로부터 유도된 자유 충돌 물체 간 상대 속도의 보정 속도 \bar{v} 는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\bar{v} = \dot{u}_{bending} - \left[\frac{\rho_s \frac{4}{3} \pi R_s^3}{\rho_b AL} (v_s - v_s') + v_b \right] \quad (3)$$

여기서 $\dot{u}_{bending}$ 은 보 충돌 지점의 굽힘 방향 변형 속도이고 v_s 는 충돌 직전 구의 속도, v_s' 는 충돌로 인해 변화하는 구의 속도이다. 그리고 v_b 는 보 충돌 지점의 충돌 전 속도이다. 식 (3)에서 각 time step 마다 $\dot{u}_{bending}$ 과 v_s' 가 변화하므로 \bar{v} 도 이에 따라 변화하게 된다.

보정 속도 \bar{v} 를 식(2)에 적용하면 다음과 같은 수정된 충돌 물체간 상대 속도를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \sqrt{\dot{\delta}_0^2 - \frac{4}{5} \beta \delta^{\frac{5}{2}} + \bar{v}} \quad (\text{압축}) \\ \dot{\delta} &= -\sqrt{\frac{4}{5} \beta \left(\delta_{\max}^{\frac{5}{2}} - \delta^{\frac{5}{2}} \right) + \bar{v}} \quad (\text{인장}) \end{aligned} \quad (4)$$

충돌 과정은 접촉이 시작하면서 두 물체가 눌리는 압축 과정이 진행되다가 최대 상대 변위에 도달 후 두 물체가 떨어지는 인장 과정이 진행된다. 따라서 식(2), (4)에서는 충돌 물체간 상대 속도는 압축과 인장 두 단계로 구분하여 해석을 수행하며 압축과 인장 단계의 판별을 위해 다음 판별식을 이용한다.

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \sqrt{\dot{\delta}_0^2 - \frac{4}{5} \beta \delta^{\frac{5}{2}} + \bar{v}} > 0 \quad \text{압축} \\ \dot{\delta} &= \sqrt{\dot{\delta}_0^2 - \frac{4}{5} \beta \delta^{\frac{5}{2}} + \bar{v}} \leq 0 \quad \text{인장} \end{aligned} \quad (5)$$

Fig.2 는 매 해석 단계마다 접촉력을 개선하는 과정을 보여준다. 여기서 t_{step} 는 각 단계의 해석 시간 크기이다. 이러한 과정을 거쳐 구한 접촉력은 충돌로 인해 보에 작용하는 전체 접촉력이다.

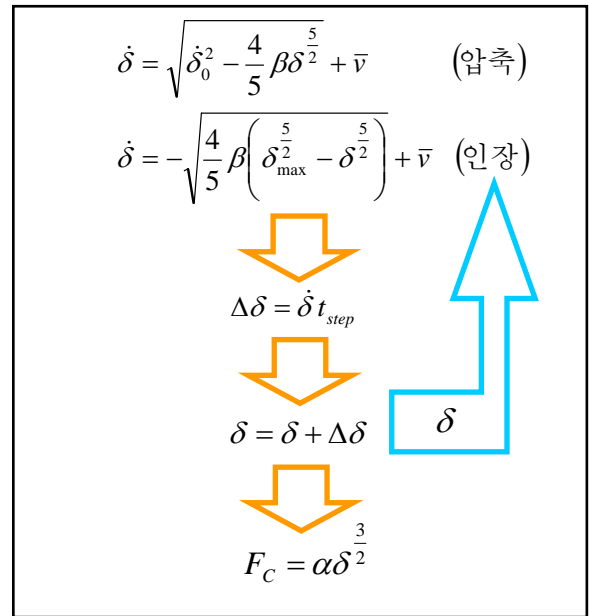


Fig. 2 Contact force analysis process

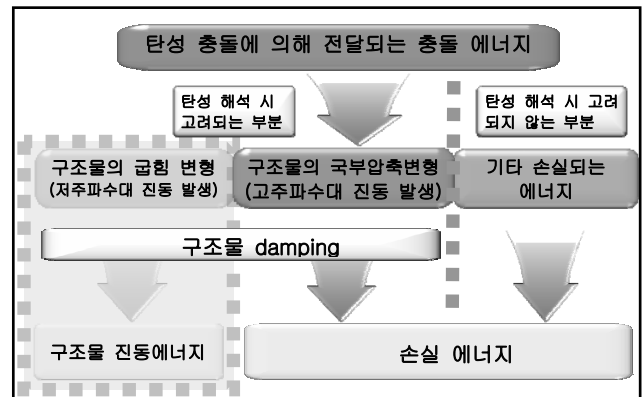


Fig. 3 Impact energy of structures flow chart

Fig.3 은 충돌에 의해 발생한 에너지의 흐름을 나타내고 있다. 충돌에 의해 발생한 에너지는 탄성 해석으로 고려되는 부분만을 보았을 때 구조물의 굽힘 변형과 구조물의 국부 압축 변형으로 나누어 작용하게 된다. 그런데 보에서는 굽힘 변형만을 고려할 수 있고 국부 압축 변형은 고려할 수 없다. 따라서 굽힘 변형만을 보기 위한 보 모델링에서는 Hertz 접촉 이론으로 구한 접촉력을 모두 보에 적용하면 보의 국부 압축 변형에 사용되는 충돌 에너지까지 보의 굽힘 변형에 적용되는 충돌 에너지로 간주하게 되어 실제보다 많은 에너지가 보의 굽힘 변형에 적용되게 된다. 이러한 문제점을 보완하기 위해서는 식(1)을 이용하여 구한 접촉력에서 보의 국부 압축에 사용되는 힘을 제외한 나머지 접촉력만이 보에 작용하는 접촉력으로 적용해야 보다 정확한 결과를 도출할 수 있다. 국부 압축에 사용되

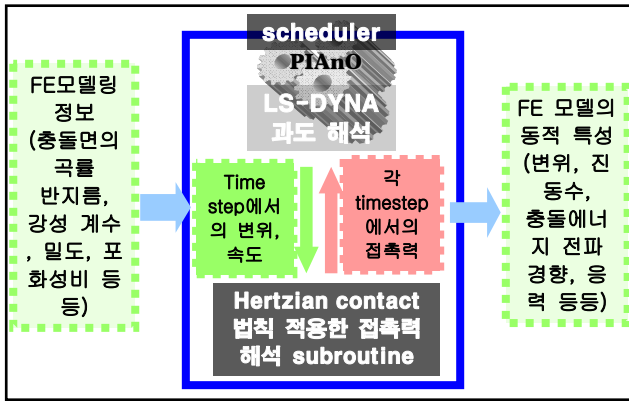


Fig. 4 Impact analysis process

는 힘은 전체 충돌 변형량 중 보의 압축 변형량 구하고, 접촉이 일어나는 면적과 보의 두께를 단면 면적과 길이로 갖는 bar 를 가정하여 계산한 강성 계수를 이용하여 다음과 같이 표현하였다.

$$F_{CB} = \alpha \delta^2 - \frac{\pi a^2}{hk_b} \frac{k_s}{k_s + k_b} \delta \quad (6)$$

여기서 a 는 접촉면의 반경으로 다음과 같다.

$$a = \left[\frac{3\pi F_c (k_s + k_b) R_s}{4} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (7)$$

2.2 LS-DYNA 와 연동된 충돌 해석 절차

앞 절에서 구한 접촉력을 이용하여 충돌 해석을 수행하기 위해서는 구조물의 운동 방정식을 구하고 접촉력을 적용하여 해석을 수행하여야 한다. 그러나 복잡한 구조물에 대해서는 운동 방정식을 유도하는 것이 쉽지 않기 때문에 기존 상용 구조 해석 프로그램인 LS-DYNA 와 연동하여 해석을 수행하고자 한다.

참고문헌[9]에서는 이와 유사하게 FE 모델과 modal approach 를 연동한 해석 방법을 소개하고 있다. 이 방법은 구조물에 대해 충돌 부분의 일부분만을 FE 모델로 구성하고 modal approach 를 이용하여 변위와 속도를 구한 후 이 정보를 이용하여 FE 모델로부터 접촉력을 도출하고 이렇게 얻은 접촉력을 다시 modal approach 로 적용하여 변위와 속도 정보를 얻는 방법이다. 이 방법은 전체 구조물에서 충돌이 일어나는 영역은 매우 작으므로 일부 구간만을 FE 모델로 구성하여 접촉력을 구하고 전체 구조물의 거동은 기존 운동 방정식을 사용하여 구한다. 이러한 방법은 정확한 접촉력을 얻을 수 있고 해석 시간을 단축할 수 있다는 장점

이 있으나 복잡한 구조물에 대해서는 운동 방정식을 구성하는 것이 쉽지 않으므로 다양한 경우에 대해 적용하기는 어렵다. 그러나 제안하고 있는 충돌 해석 절차는 간략화된 모델인 beam/shell 요소를 사용한 FE 모델로부터 변위, 속도 등의 필요한 구조물의 동적 거동 정보를 구하고 beam/shell 요소에서는 고려할 수 없는 두께 방향 국부 압축 변형을 고려한 접촉력을 도출하여 구조물 모델에 적용함으로써 복잡한 구조물에 대해서 적용 가능한 효율적인 방법을 보여준다.

Fig. 4 는 LS-DYNA 와 연동한 충돌 해석 절차를 나타내고 있다. FE 모델링에 필요한 정보를 입력 정보로 입력하고 해석 과정에서는 LS-DYNA 에서 각 time step 마다 충돌 지점의 변위와 속도를 접촉력 해석 subroutine 에 제공하게 되고 subroutine 에서는 이 정보를 이용하여 접촉력을 도출하여 다시 LS-DYNA 에 제공하여 모델에 적용하게 된다. 이러한 해석 절차를 거쳐 최종적으로는 일반 충격 해석의 결과로서 얻을 수 있는 FE 모델의 동적 특성에 대한 정보를 얻을 수 있다. 또한 각 해석 time step 마다 LS-DYNA 와 접촉력 subroutine 은 서로 정보를 주고 받아야 하므로 이를 위해 scheduler 기능을 하는 PIAnO 프로그램을 사용하였다.

3. 수치 해석 결과

3.1 해석 모델

LS-DYNA 와 연동된 충돌 해석을 수행하기 위해 다음과 같은 FE 모델을 구성한다. Fig.1 에서 나타낸 바와 같이 정지된 외팔 보에 초기 속도를 가진 구가 충돌하는 경우로 FE 모델은 충돌 해석을 빠르게 할 수 있는 beam 요소(보) - solid 요소(구) 모델과 국부 압축 변형을 고려할 수 있는 solid 요소(보) - solid 요소(구) 모델 2 가지를 선택하여 LS-DYNA 충돌 해석을 수행하고 제안한 방법의 충돌 해석 결과와 비교한다. 각 모델의 요소의 개수는 beam 요소의 경우 100 개를 사용하였고 solid 요소는 3600 개를 사용하였다. 그리고 제안한 모델은 beam 요소(보) - solid 요소(구) 의 FE 모델을 구성하고 제안한 contact algorithm 을 통해 도출한 접촉력을 LS-DYNA 해석에 적용한다.

Table 1 에서는 사용한 재료의 물성치와 보와 구의 재원을 나타내고 있다.

3.2 충돌 시 발생하는 접촉력의 정확성 검증

Fig. 5 는 각 해석 모델의 충돌에 의한 접촉력 변화를 보여주고 있다. 이 그래프에서는 제안한 모델의 해석 결과 와 LS-DYNA 의 contact algorithm 을 이용한 FE 모델의 해석 결과는 대체로 일치하는 것을 보여준다. 그러나 제안한 모델

Table 1 Properties of the beam and the sphere

$L [m]$	$\nu_b = \nu_s$	$E_b = E_s [GPa]$
1.0	0.3	7
$I [m^4]$	$A [m^2]$	$\rho_b = \rho_s [kg/m^3]$
1.08×10^{-6}	0.0036	1000
$h [m]$	$b [m]$	$R_s [m]$
0.06	0.06	0.05

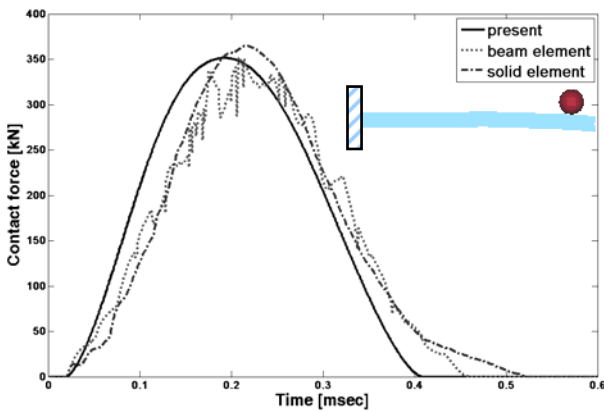


Fig. 5 Variation of contact force in contact point versus time with impact and different impact model ($t_i = 0.01ms$, $v_s = 50 m/s$, $a = 0.9 m$)

은 충돌 시 발생하는 변형 속도를 적용하여 다음 time step 에서의 변형량을 구하고 이를 이용해 접촉력을 구했으므로 변형량을 직접 다음 time step 에 적용한 LS-DYNA contact algorithm 에 비해 접촉력이 약간 빠르게 나타나 빠르게 사라지는 것을 확인할 수 있으며 동일하게 beam 요소를 사용하여 FE 모델을 구성했으나 제안한 모델은 solid 모델과 유사하게 연속적인 형태의 접촉력 변화를 보여주는 반면 기존 beam 요소를 사용하여 FE 모델의 접촉력은 불연속성이 나타나고 있다. 이러한 접촉력의 불연속성은 이후 결과에서도 확인할 수 있듯이 불필요한 수치적 noise 를 발생시킨다. Fig.6 은 전체 접촉력 F_C 와 보의 굽힘 변형에 이용되는 접촉력 F_{CB} 를 비교하고 있다. 두 접촉력 간 차이는 크지 않으므로 예제로 든 모델의 국부 압축 변형의 영향은 크지 않은 것으로 판단된다. 그러나 약 10% 정도의 접촉력 차이는 확인할 수 있고 국부 압축 변형이 보다 크게 발생하는 모델에서는 그 영향을 무시할 수 없을 것으로 예측할 수 있다.

Fig.7, Fig.8 은 충돌 해석으로 얻은 보 구조물의 충돌 지점의 굽힘 방향 변위와 속도를 보여주고 있다. 이 그래프에서 제안한 모델은 solid 모델에

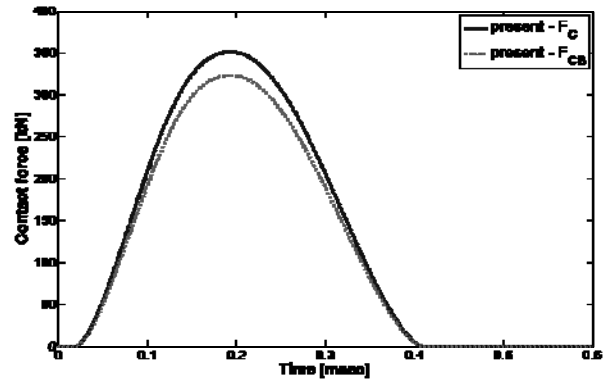


Fig. 6 Comparison of whole contact force F_C and bending deformation contact force F_{CB} ($t_i = 0.01ms$, $v_s = 50 m/s$, $a = 0.9 m$)

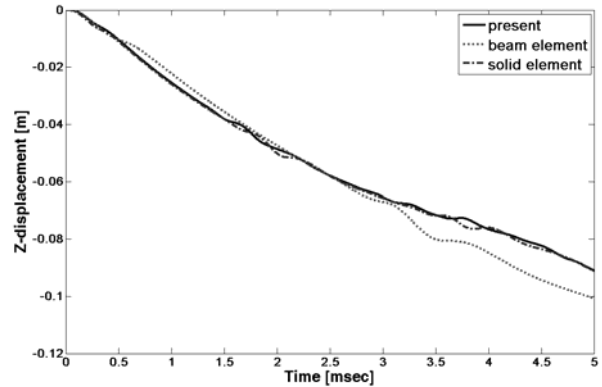


Fig. 7 Variation of displacement in contact point versus time with impact and different impact model ($t_i = 0.01ms$, $v_s = 50 m/s$, $a = 0.9 m$)

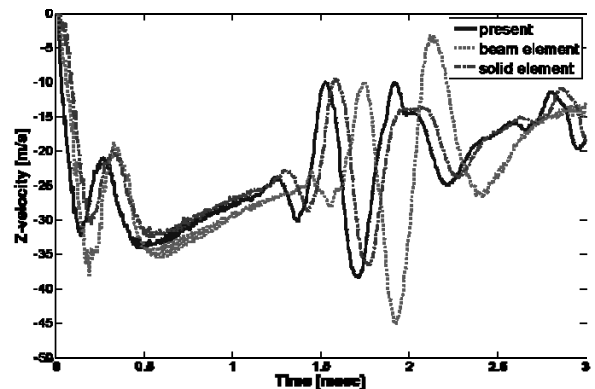


Fig. 8 Variation of velocity in contact point versus time with impact and different impact model ($t_i = 0.01ms$, $v_s = 50 m/s$, $a = 0.9 m$)

유사한 경향을 보여주며 beam 모델은 예상한 것과 같이 접촉력이 과다하게 작용했으므로 다른 모델에 비해 변위와 속도가 약간씩 더 크게 나타나는 것을 확인할 수 있다.

3.3 해석 시간 비교

Table 2 는 각 모델의 충돌 해석 소요 시간을 보여주고 있다. 해석 시간 5[ms]까지 해석을 수행하는 데 소요되는 시간은 beam 요소를 사용한 경우에 비해 solid 요소를 사용한 모델이 약 4 배의 해석 시간이 더 필요하다. 이에 비해 제안된 모델은 기본 FE 모델이 beam 요소를 사용하여 구성되었으나 다른 contact algorithm 을 사용하였으므로 LS-DYNA contact algorithm 을 사용한 beam 모델에 비해 해석 소요시간이 약간 증가한다. 간단한 보 구조물에 사용한 요소의 개수는 beam 요소 모델의 경우 100 개이고 solid 요소를 사용한 모델은 3600 개로 구조물이 복잡해질 경우 그 차이는 더 커지게 되며 이에 따라 해석 시간도 증가하게 된다. 그러나 제안한 모델은 beam 요소를 사용하여 해석 시간의 증가를 최소화 시키면서 접촉력은 solid 요소를 사용한 모델과 근사하게 도출할 수 있다는 효율성을 가진다.

4. 결론

본 논문에서는 충돌이 일어나는 보 구조물과 구의 충돌 시 발생하는 접촉력을 구조물의 국부 변형이 고려한 수정된 Hertz접촉 이론을 이용하여 유도하고 유도한 접촉력 해석 subroutine을 상용 FE 해석 프로그램인 LS-DYNA와 연동하여 보다 효율적인 충돌 해석 절차를 제안하였다. 충돌 시 발생하는 접촉력은 구조물의 굽힘 변형과 국부 압축 변형을 발생시키며 두께 방향 변형을 고려할 수 없는 beam/shell 요소를 사용한 모델에서는 국부 압축 변형에 사용되는 접촉력을 굽힘 변형에 적용함으로써 실제보다 과다하게 접촉력이 작용하게 되어 동적 거동 결과에 오차가 발생하게 된다. 그러나 제안한 방법에서는 유한요소법과 근사한 접촉력을 도출하였으며 전체 접촉력에서 굽힘 변형에 사용되는 접촉력을 정확히 도출함으로써 보

Table 2 Number of element and CPU time of impact analysis with different impact model

	No. of element (element size)	CPU time
Present model	100 (0.01[m])	632 [sec]
Beam element model	100 (0.01[m])	512 [sec]
Soild element model	3600 (0.01[m])	2072 [sec]

다 정확한 구조물의 동적 거동 결과를 얻을 수 있었다. 또한 전체 구조물의 모델링을 beam/shell 요소로 구성하고 제안한 접촉력 subroutine을 적용하여 해석 소요 시간의 증가를 최소화 하면서 solid 요소를 사용한 모델과 근사한 동적 거동 결과를 얻는 효율성을 확인할 수 있다.

후 기

이 연구는 국방과학 연구소(UD070060CD)의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) Goldsmith W., 1960, Impact: the theory and physical behavior of colliding solids, Dover publication, INC., Mineola, New York.
- (2) Corbett G. G., Reid S. R., Johnson W., 1996, Impact loading of plates and shells by free-flying projectiles: a review, *International Journal Impact Engineering* Vol. 18, pp.141- 230.
- (3) Goldsmith W., 1999, Review: non-ideal projectile impact on targets. *International Journal Impact Engineering*, Vol. 22, pp.95- 395.
- (4) Guo Junyan, Shi Guangyu, Wang Yuyong, Lu Chun, 2003, Efficient modeling of panel-like structures in perforation simulations, *Computers and Structures*, Vol. 81, pp.1- 8.
- (5) Kurtaran H., Buyuk M., Eskandarian A., 2003, Ballistic impact simulation of GT model vehicle door using finite element method, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 40, pp.113- 121.
- (6) Li J., Li X. J., Zhao Z., Ou Y.X., Jiang D.A., 2007, Simulation on projectile with high rotating speed penetrating into the moving vehicular door, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 47, pp.113- 119
- (7) Mahfuz H., Zhu Y., Haque A., Abutalib A., Vaidya U., Jeelani S., Gama B., Gillespie J., Fink B., 2000, Investigation of high-velocity impact on integral armor using finite element method, *International Journal Impact Engineering*, Vol. 24, pp.203- 217.
- (8) Zukas J.A., Scheffler D.R., 2001, Impact effects in multilayered plates, *International Journal Solids Structures*. Vol.38, pp.3321- 3328.
- (9) R. Seifried, W. Schiehlen, P. Eberhard, 2005, Numerical and experimental evaluation of the coefficient of restitution for repeated impacts, *International Journal of Impact Engineering* vol. 32, pp. 508-524.
- (10) Livemore, 2006, LS-DYNA-971 User's manual, Livemore Software Technology Corporation, USA.