

# 다양한 변형률 에너지 함수를 사용한 전방 및 후방 십자 인대의 모델링에 관한 연구

임준택<sup>†</sup>·최덕기\*·김영은\*\*

## A study on modelling for ACL and PCL using various strain energy functions

Lim Jun-taek, Choi Deok-kee, Kim young-en

**Key Words:** Anterior Cruciate Ligament(전방 십자 인대), Posterior Cruciate Ligament(후방 십자 인대), Energy Potential Function(에너지 포텐셜 함수), Bio material(생체 재료), Hyperelasticity(초탄성)

### Abstract

The mechanical study on the anterior and posterior cruciate ligament(ACL, PCL) is of importance because the recent increase of outdoor and indoor activities is directly related to causing sport injuries on the knee joints. Constitutive models for many biological tissues have been known as hyperelastic models. The elastic behavior of ACL and PCL may be described by the free energy function which accounts for the matrix and the collagen fibers. This paper addresses a comparison of different types of the free energy function to the existing results.

### 기호설명

$F$  : 변형구배  
 $S$  : 2nd Piola-Kirchhoff 응력 (PK2)  
 $P$  : 명목응력  
 $\mathbf{X}$  : 초기 위치  
 $x$  : 변형 후 위치  
 $\mathbf{E}_I$  : Lagrangian 단위 기저 벡터  
 $\mathbf{e}_i$  : Eulerian 단위 기저 벡터  
 $\psi$  : 변형률 에너지 함수  
 $\psi^e$  : 탄성 영역의 변형률 에너지 함수  
 $\psi^v$  : 점성 영역의 변형률 에너지 함수  
 $C$  : Cauch-Green 텐서

$p$  : 정수압  
 $\lambda$  : 신장률  
 $\mathbf{N}_0$  : 섬유 방향의 단위 벡터  
 $\alpha, \beta$  : 탄성 영역 변형률 에너지 함수의 계수  
 $\eta_1, \eta_2$  : 점성 영역 변형률 에너지 함수의 계수  
 $c_1, c_2$  : 섬유 강화 모델의 계수  
 $\mathbf{1}$ : 2차 단위행렬  
 $\dot{\mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t}$   
 $I_1 = \mathbf{1} : \mathbf{C}$   
 $I_2 = \frac{1}{2} [I_1^2 - (\mathbf{1} : \mathbf{C}^2)]$   
 $I_4 = \mathbf{N}_0 : \mathbf{C}$   
 $J_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{1} : \dot{\mathbf{C}}^2)$   
 $J_5 = \mathbf{N}_0 : \dot{\mathbf{C}}^2$

---

<sup>†</sup> 회원, 단국대학교 대학원 기계공학과  
 E-mail : junt11@hotmail.com  
 TEL : (031)8005-3529

\* 단국대학교 기계공학과  
 \*\* 단국대학교 기계공학과

---

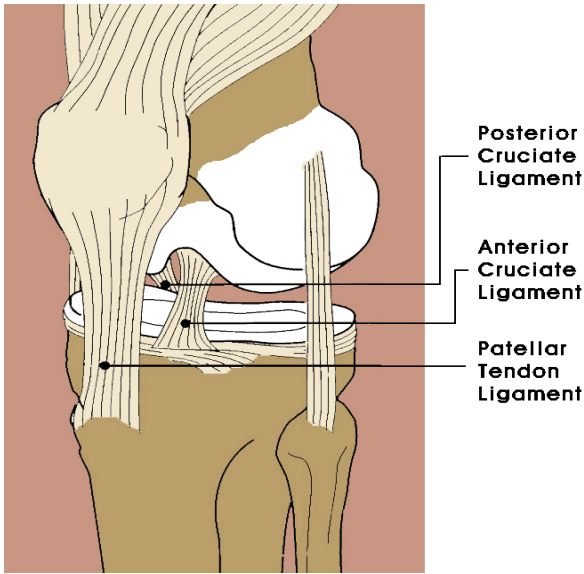


Fig. 1 Knee joints diagram

## 1. 서론

십자 인대(Cruciate ligament)는 주로 육상 경기 등에서 파열되는 경우가 많은데 빠르게 방향을 바꾸거나 다리를 땅에 두는 동작이 있는 스포츠 경기에서 인대가 파열될 수 있는 소지가 많다. 특히 전방 십자 인대(ACL)는 무릎 인대 중에 가장 자주 부상을 입는 부위이다. 스포츠에 대한 일반인의 관심이 가중됨에 따라 십자 인대 파열 환자의 경우도 꾸준히 증가해 왔다. 그러므로 십자 인대(Fig.1)와 같은 생체 재료 모델의 기계적 거동을 수학적으로 모사하는 것은 중요한 일이다. 십자 인대의 경우 비압축성이며 대변형(Large deformation)이 일어나는 재료이기 때문에 비선형 모델을 선택하여 물리적 특성을 알아보아야 한다.

Pioletti<sup>(1)(2)</sup>의 연구에서는 ACL(Anterior Cruciate Ligament), PCL(Posterior Cruciate Ligament), PT(Patellar Tendon Ligament)의 시편을 각 5개씩 사용하여 사체 실험을 통해서 기본적인 실험용 데이터를 만들었다. 그리고 연속체 역학에 기반을 둔 기구학적, 동역학적, 열역학적 접근을 통해 구성 방정식을 도출하였으며 그 과정에서 선형 탄성, 비선형 탄성, 점탄성의 다양한 가정 하에서 분석하였다. Limbert<sup>(3)</sup>의 연구에서는 Pioletti<sup>(1)</sup>의 실험 데이터를 기반으로 Neo-Hookean 모델을 사용한 새로운 에너지 포텐셜 함수를 제안하였다.

Limbert<sup>(3)</sup>의 연구에서는 직교 등방성 점탄성 재료를 가정하여 연부 조직 내에 섬유 조직이 한 방향으로 포함되어 있어서 좀 더 인대에 근접할 수 있는 재료 모델을 연구하였다. Limbert<sup>(3)</sup>가 제안한 ACL과 PCL에 대한 재료 모델은 Pioletti<sup>(1)</sup>의 실험 결과와 매우 잘 맞았으며 그 사실을 토대로 다양한 하중 조건에서 재료의 기계적인 거동을 모사하였다.<sup>(3)(4)</sup> Liu<sup>(5)</sup>는 연부 조직의 모델에 일부분에 하중을 주어 재료의 변형이 어떠한 형태로 이루어지는지 연구하였으며, Guo<sup>(6)</sup>의 연구에서는 다른 형태의 섬유 조직을 포함한 형태의 재료 모델을 제시하여 기존의 다른 연구보다 더 넓은 영역에서 기계적인 거동의 타당성을 검증하였다. 본 연구에서는 Pioletti<sup>(1)</sup>와 Limbert<sup>(3)</sup>의 자료들을 토대로 하여 연속체 역학을 기반으로 한 다양한 재료 모델의 에너지 포텐셜 함수를 Pioletti<sup>(1)</sup>의 실험 데이터에 근사함으로서 단순 인장의 하중 조건에서 섬유 강화 모델과 점탄성의 개념을 적용해 기계적인 거동을 모사하는 과정을 수행하여 타당성을 검증하고, 등방성 부분에 대한 에너지 포텐셜 함수에 대하여 실험 데이터와 비교하였다.

## 2. 이론

### 2.1 응력식

변형 구배(Deformation Gradient)  $\mathbf{F}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \psi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \sum_{i,I=1}^3 \frac{\partial \psi_i}{\partial X_I} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_I \quad (1)$$

또한 Cauchy-Green 변형 텐서는 다음과 같다.<sup>(7)</sup>

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (2)$$

변형률 에너지 함수  $\psi$ 는

$$\psi = \psi^e + \psi^v \quad (3)$$

로 나타낼 수 있고,  $\psi$ 를 PK2(2nd Piola-Kirchhoff) 응력으로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^e + \mathbf{S}^v = 2 \left( \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \psi^v}{\partial \mathbf{C}} \right) \quad (4)$$

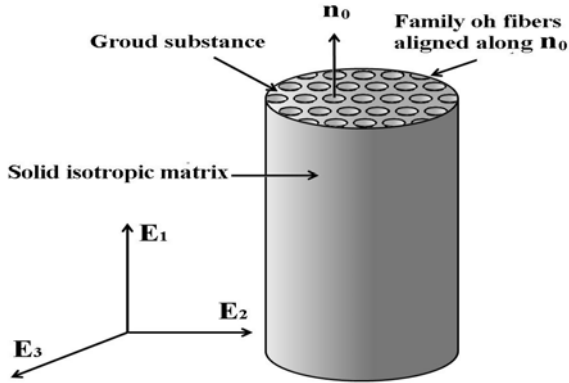
여기서,

$$\mathbf{S}^e = 2 \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{C}}, \quad \mathbf{S}^v = 2 \frac{\partial \psi^v}{\partial \mathbf{C}} \quad (5)$$

PK2 응력을 물리적으로 타당성을 갖는 명목 응

**Table 1** Used Energy Potential Function

Type	Energy Potential Function
Polynomial 1	$\psi = \alpha(I_1 - 3) + \beta(I_2 - 3)$
Polynomial 2	$\psi = \frac{\alpha}{2}(I_1 - 3) + \frac{\beta}{2}(I_1 - 3)^2 + \frac{\alpha}{2}(I_2 - 3)$
Exponential	$\psi = \alpha e^{\beta(I_1 - 3)}(I_2 - 3)$



**Fig. 2** Simplified representation of a continuum material made of an isotropic matrix reinforced by one family of fibers associated with direction  $n_0$  in the reference configuration.

력의 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$P = S \cdot F^T \quad (6)$$

### 2.2 등방성 에너지 포텐셜 함수

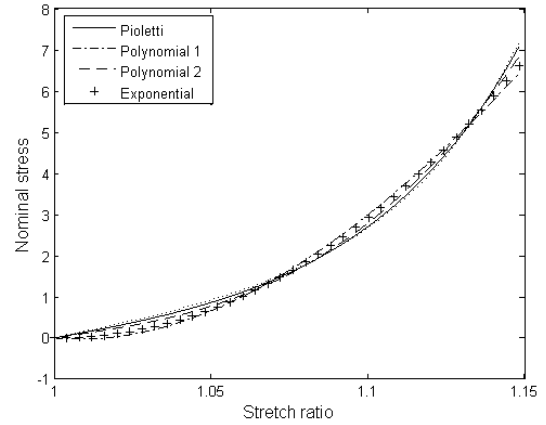
본 연구에서 사용될 등방성 에너지 포텐셜 함수(Table 1) 중 Polynomial type 1을 사용한 에너지 식은 다음과 같다.

$$\psi^e = \alpha(I_1 - 3) + \beta(I_2 - 3) \quad (7)$$

식(7)의 에너지 포텐셜 함수에 비압축성 조건을 부여하고 식(4)~식(6)의 과정을 거쳐서 PK2 응력의 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$S = 2 \frac{\partial \psi}{\partial C} = 2\alpha 1 + 2\beta(I_1 1 - C) - p C^{-1} \quad (8)$$

여기서  $p$ 는 비압축성을 가정할 때 Lagrange



**Fig. 3** ACL : Stress-stretch curves for the isotropic hyperelastic law by identification with the analytical curves from Pioletti's model. The loading scenario corresponds to uniaxial extension.

승수로 취급하여 실험과 동일한 결과를 줄 수 있는 경계 조건을 적용하고<sup>(9)</sup> Fig.2에서의  $E_1$  방향에 대한 단순 인장의 조건 하에서 PK2 응력의 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$S_{11} = 2\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda^3}\right) + 2\beta \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^4}\right) \quad (9)$$

식 (9)를 이용하여 명목 응력의 형태로 나타내면 다음과 같다.

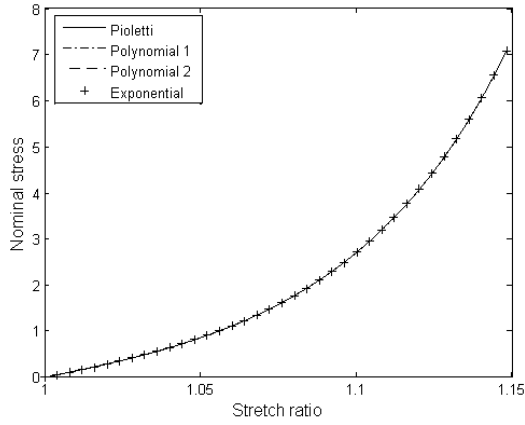
$$P_{11} = 2\alpha \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right) + 2\beta \left(1 - \frac{1}{\lambda^3}\right) \quad (10)$$

ACL일 경우

$F = \lambda E_1 \otimes E_1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} E_2 \otimes E_2 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} E_3 \otimes E_3$ 의 단순 인장 하중 조건일 때 Table1의 에너지 포텐셜 함수를 식(10)와 같은 형태로 유도하여 Pioletti<sup>(11)</sup>의 실험 데이터에 최소자승법으로 근사한 명목 응력과 신장률간의 관계를 Fig.3에서 보는 바와 같이 나타낸 그래프이다. 대체적으로 유사한 형태를 보였으며 근소한 차이지만 Polynomial Type보다는 Exponential Type의 경우가 조금 더 맞는 것으로 판단된다.

### 2.3 섬유 강화 모델

본 연구에서는 Fig.2에서 보는 바와 같이 십자 인대를 인대섬유들로 구성되어있다고 가정하였다. 따라서 2.2절에서 언급한 모델에 섬유 강화 모델이 포함시킨 에너지 포텐셜 함수에 의한 모



**Fig. 4** ACL : Stress-stretch curves for the fiber-reinforced isotropic hyperelastic law by identification with the analytical curves from Pioletti's model. The loading scenario corresponds to uniaxial extension along the fiber direction.

텔링이 필요하다고 생각된다. Limbert<sup>(3)</sup>의 연구에서 제시된 섬유 강화 모델을 Table 1의 등방성 에너지 포텐셜 함수에 첨가하여 타당성을 연구하였다. 즉 Limbert<sup>(3)</sup>는 기존의 등방성 에너지 포텐셜 함수를  $\psi_m$ , 섬유 강화 모델을  $\psi_f$ 라고 하여 다음과 같이 정의 하였다.

$$\psi^e = \psi_m^e(I_1) + \psi_f^e(I_4) \quad (11)$$

또한 섬유 강화 모델을

$$\psi_f^e = \frac{c_1}{2c_2} [e^{c_2(I_4-1)^2} - 1] \quad (12)$$

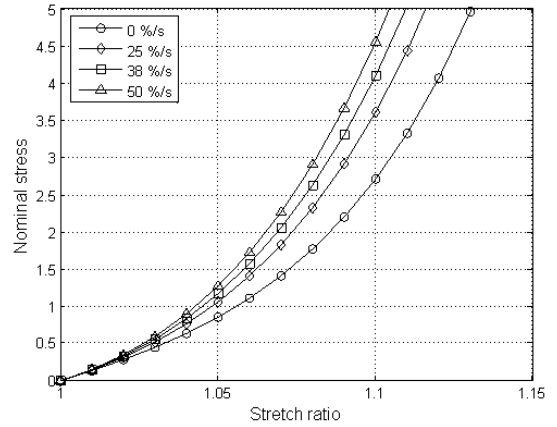
라고 정의하면 식(11)을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\psi^e = \alpha(I_1 - 3) + \beta(I_2 - 3) + \frac{c_1}{2c_2} [e^{c_2(I_4-1)^2} - 1] \quad (13)$$

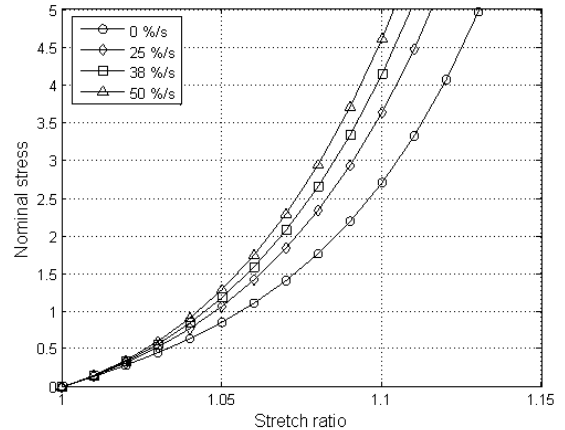
식(13)을 식(4)~식(6)을 이용해 명목 응력의  $E_1$  방향의 성분을 구하면 다음과 같다.

$$P_{11} = 2\alpha\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right) + 2\beta\left(1 - \frac{1}{\lambda^3}\right) + 2c_1 e^{c_3(\lambda^2-1)^2} (\lambda^2 - 1) \quad (14)$$

Fig. 4는 Table 1의 등방성 에너지 포텐셜 함수를 식 (14)에 각각 적용하여 Pioletti<sup>(1)</sup>의 실험치와 비교한 것이다.



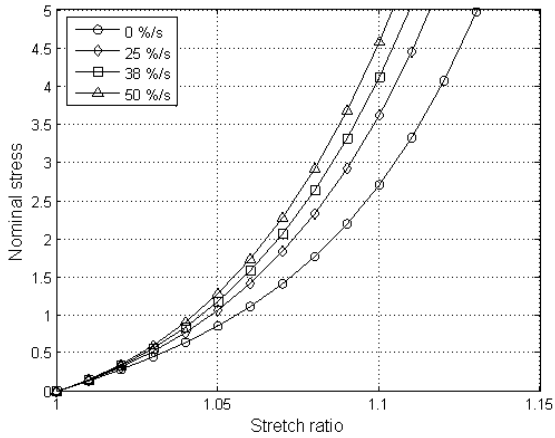
**Fig. 5** ACL : Polynomial type 1 : Stress-stretch curves for the fiber-reinforced isotropic hyperviscoelastic law by identification with the analytical curves from Pioletti's model. The loading scenario corresponds to uniaxial extension along the fiber direction.



**Fig. 6** ACL : Polynomial type 2 : Stress-stretch curves for the fiber-reinforced isotropic hyperviscoelastic law by identification with the analytical curves from Pioletti's model. The loading scenario corresponds to uniaxial extension along the fiber direction.

## 2.4 점성 요소가 포함된 모델

십자 인대의 모델링에서 변형률 속도에 관한 영향을 알아보기 위해서 에너지 함수에서 점성 요소의 항을 고려하였다. Pioletti<sup>(1)</sup>의 실험데이터와 비교하기 위해서 Limbert<sup>(3)</sup>가 제안한 섬유 강화 모델이 포함된 점성 항을 Table1의 에너지 포



**Fig. 7** ACL : Exponential type : Stress-stretch curves for the fiber-reinforced isotropic hyperviscoelastic law by identification with the analytical curves from Pioletti's model. The loading scenario corresponds to uniaxial extension along the fiber direction.

텐셜 함수에 첨가하였다. Limbert<sup>(3)</sup>가 제안한 점성 영역의 에너지 포텐셜 함수는

$$\psi^v = \eta_1 J_2 (I_1 - 3) + \frac{1}{2} \eta_2 J_5 (I_4 - 1)^2 \quad (15)$$

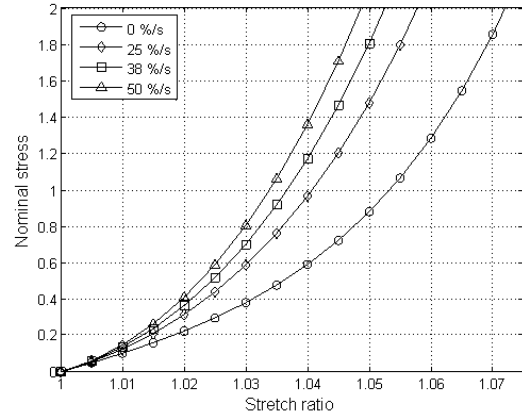
이고, 식 (15)를 식(11)에 적용하면 Table 1의 Polynimial Type 1의 등방성 에너지 함수는

$$\begin{aligned} \psi = & \alpha (I_1 - 3) + \beta (I_2 - 3) + \frac{c_1}{2c_2} [e^{c_2(I_4 - 1)^2} - 1] \\ & + \eta_1 J_2 (I_1 - 3) + \frac{1}{2} \eta_2 J_5 (I_4 - 1)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

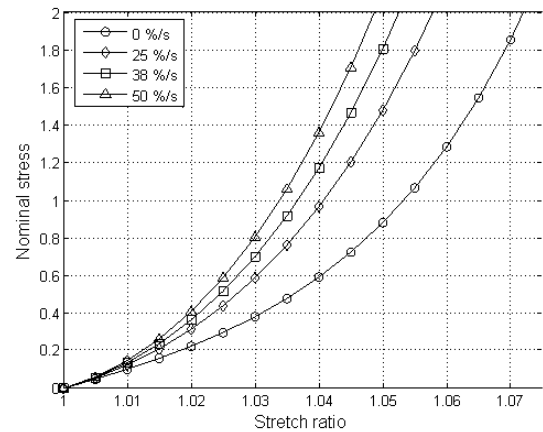
로 표현된다. 식(16)을 식(4)~식(6)의 과정을 거쳐 명목 응력으로 변환하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P_{11} = & 2\alpha \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 2\beta \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \\ & + 2c_1 e^{c_3(\lambda^2 - 1)^2} (\lambda^2 - 1) \\ & + 2\eta_1 \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) \left( 1 + \frac{1}{2\lambda^6} \right) \dot{C}_{33} + 2\eta_2 (\lambda^2 - 1)^2 \dot{C}_{33} \end{aligned} \quad (17)$$

Fig.5는 식(17)의 명목 응력을 변형률 속도의 변화에 따라 표시한 것이다. 이때 변형률 속도는 0%/s, 25%/s, 38%/s, 50%/s이다. Fig. 5~7은 ACL의 경우 각 에너지 포텐셜 함수에 관한 응력-변형률 그래프이며, Fig.8~9는 PCL인 경우의 그래프이다.



**Fig. 8** PCL : Polynomial type 1 : Stress-stretch curves for the fiber-reinforced isotropic hyperviscoelastic law by identification with the analytical curves from Pioletti's model. The loading scenario corresponds to uniaxial extension along the fiber direction.



**Fig. 9** PCL : Polynomial type 2 : Stress-stretch curves for the fiber-reinforced isotropic hyperviscoelastic law by identification with the analytical curves from Pioletti's model. The loading scenario corresponds to uniaxial extension along the fiber direction.

### 3. 결과 및 토의

Fig.4는 ACL일 때 Fig.2과 동일한 조건이나 Limbert<sup>(3)</sup>가 제시한 섬유 강화 모델을 첨가하여 식(14)의 형태로 유도하여 나타낸 그래프이다. 각각의 에너지 포텐셜 함수에 섬유 강화 모델을 첨가한 경우가 첨가하지 않은 경우보다 더 높은 일

치도를 가지며 Pioletti<sup>(1)</sup>의 실험 데이터와 매우 정확히 일치함을 알 수 있었다.

Fig.5는 ACL일 때 Polynomial Type 1의 경우 점성 요소를 첨가하여 Fig.4의 과정에서 구하였던 인자들을 이용해 단순 인장의 조건에서 식(17)의 그래프를 나타낸 후, 변형률 속도를 0%/s, 25%/s, 38%/s, 50%/s로 변화시키며 변형률 속도에 따른 명목 응력과 신장률간의 관계를 나타내었다. 각각의 에너지 포텐셜 함수에 Limbert<sup>(3)</sup>가 제안한 섬유 강화 모델과 점성 요소를 고려한 새로운 모델은 비교적 Pioletti<sup>(1)</sup>의 실험 데이터와 맞는 것으로 판단되었다.

Fig.6은 ACL일 때 Polynimial Type 2를 Fig.5와 같은 조건으로 식(17)의 형태로 유도하여 나타낸 그래프이다. Fig.7 역시 ACL일때 Exponential Type을 같은 방법으로 나타내었다. Fig.6~7의 경우도 모두 Pioletti<sup>(1)</sup>의 실험 데이터와 매우 비슷한 양상을 보였다.

Fig.8~9는 PCL일 때 Fig.5와 같은 조건하에서 명목 응력과 신장률 간의 관계를 변형률 속도에 따라 나타낸 그래프이다. 이 경우들 또한 Pioletti<sup>(1)</sup>의 실험 데이터와 잘 맞는 것으로 보여진다.

#### 4. 결 론

다양한 에너지 포텐셜 함수를 사용해 각각의 등방성 재료 모델에 섬유 강화 요소와 점성요소를 첨가해가면서 Pioletti<sup>(1)</sup>의 실험 데이터와 식을 비교해보았다. 이 과정에서 섬유 강화 요소가 첨가 되면 등방성 재료 모델 종류와 거의 무관할 정도로 잘 맞는 것을 알 수 있었다. 따라서 십자 인대의 모델링을 할 때 섬유 강화 모델을 쓰는 것이 보다 정확하다고 할 수 있다. 반면에 등방성 재료 모델 부분의 함수들의 교체에 대한 영향은 미비하다고 볼 수 있었다.

본 연구에서 진행했던 하중 조건은 단순 인장이지만 실제 환경에서 ACL, PCL의 역학적인 특성을 알아보기 위해서는 2축 응력의 하중 조건에서의 실제 실험이 필요하며, 보다 사실적인 모사를 위하여 더 많은 연구가 필요하다고 사료된다.

#### 참고문헌

(1) Dominique P. Pioletti, 1997, "Viscoelastic Properties of Soft Tissues: Application to Knee

Ligaments and Tendons", *Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne*, Switzerland.

(2) Dominique P. Pioletti, L.R. Rakotomanana, J.-F. Benvenuti, P.-F. Leyvraz, 1998, "Viscoelastic constitutive law in large deformations: application to human knee ligaments and tendons", *Journal of Biomechanics*, Vol.31, pp.753~757.

(3) Georges Limbert, John Middleton, 2004, "A transversely isotropic viscohyperelastic material soft connective tissues", *International Journal of Solids and Structures*, Vol.41, pp.4237~4260.

(4) Georges Limbert, John Middleton, 2006, "A constitutive model of the posterior cruciate ligament", *Medical Engineering & Physics*, Vol.28, pp.99~113.

(5) Yi Liu, Amy E. Kerdok, Robert D. Howe, 2004, "A Nonlinear Finite Element Model of Soft Tissue Indentation", *Lecture Notes in Computer Science*, Vol.3078, pp.67~76.

(6) Z. Y. Guo, X. Q. Peng, B. Moran, 2007, "Mechanical response of neo-Hookean fiber reinforced incompressible nonlinearly elastic solid", *Journal of Solid and Structures*, Vol.44, pp.1949~1969.

(7) 최덕기, 2007, *텐서를 사용한 연속체 역학 입문*, 인터뷰전.

(8) Ted Belytschko, Wing Kam Liu and Brian Moran, 2000, *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley & Sons, England.

(9) Jasbir s. Arora, 1994, *Introduction to Optimum Design*, McGraw-Hill, Singapore.