

< 학술논문 >

인장하중 하에서 복합재 적층 패치의 3 차원 응력 해석

이재훈[†] · 조맹효^{*} · 김흥수^{**} · Michel Grédiac^{***}

Three-dimensional stress analysis of composite laminates patches under extension load.

Jaehun Lee, Maenghyo Cho, Heung Soo Kim and Michel Grédiac

Key Words : Interlaminar Stresses(층간응력), Free Edge(자유경계), Composite Laminates(복합 적층판), Patch(패치), Repair(보수)

Abstract

A stress distribution of composite laminates patches is obtained by using the Kantorovich method when the substrate is under uniaxial load. The analysis is based on the stress function approach and uses the complementary virtual work principle. The three-dimensional stresses satisfy the traction free conditions at the free edges and the top surfaces of the patch. The stress of the bottom surfaces of the patch is obtained from equilibrium equation of patch and substrate. To demonstrate the efficiency and validity of the proposed analysis, numerical examples for cross-ply and quasi-isotropic laminates are included. The present method provides accurate stresses in the interior and near the free edges of composite laminate patches.

1. 서 론

고강도, 고강성, 경량화를 요구하는 기계/항공 구조물에 복합재 적층 패치를 이용함으로써 기판(substrate)에 발생하는 응력집중을 두드러지게 감소시킬 수 있다. 이러한 접착이음 구조물에서 복합재 적층 패치의 응력분포를 정확히 예측하는 것은 중요한 문제이다. 패치는 단순한 가정 하에서 과거부터 Volkersen[1]과 Goland, Reissner[2]에 의해 분석되었다. 근래에는 Mathias 와 Grédiac[3]에 의해 패치의 응력해석이 단축 인장문제뿐만 아니라 2축 인장문제로 확장되었다.

접착 패치는 판과 기판구조의 강도를 높이는 데

에 유용하기 때문에 패치 해석의 중요성은 근래에 들어 더욱 확대되고 있다. 복합재 구조 해석 분야에서는 현재에도 유한요소를 이용한 접근 방법이 많이 이용되지만, 패치의 자유경계 면에서의 응력 집중이나 특이성 문제에 있어서 층간 응력을 예측하는 부분에서는 여전히 간략하고 정확한 해석적 방법이 선호된다.

복합재 적층 판을 해석하는데 있어서 Spliker 와 Chou[4]는 응력 기반 방법에서 자유경계 면의 하중자유조건(traction free)의 중요성을 설명하였다. 응력 기반 방법은 응력함수를 면내(in-plane) 응력함수와 면외(out-of-plane) 응력함수로 나누며, 자유경계에서의 층간응력은 응력함수를 가정하는 근사값으로 계산된다. Kassapoglou 와 Lagace[5]는 힘과 모멘트 평형의 적분 형태를 이용하여 응력을 계산하였다. 하지만 이는 두께 방향으로 점단위의(pointwise) 자유경계 조건을 만족시키지 못하였으며, 그로 인해 면외 응력함수로 예측된 응력을 신뢰할 수 없었다. Yin[6,7]은 각 층에서 연속적인 면외 응력함수와 층간응력을 조각적(piecewise) 다항

[†] 책임저자, 회원, 서울대학교 기계항공공학부 대학원

E-mail : spin9900@snu.ac.kr

TEL : (02)880-1695 FAX : (02)886-1693

^{*} 교수, 서울대학교 기계항공공학부

^{**} 교수, 대구가톨릭대학교 기계자동차공학부

^{***} 교수, 프랑스블레즈파스칼대학교

식으로 근사하였다.

Flanagan[8]은 면의 응력함수를 양 끝이 고정된 보의 고유모드로 가정하는 방법을 제안하였다. 면내 응력함수는 최소 여에너지(complementary minimum energy) 원리에 의해 결정된다. 그러나 Flanagan의 방법은 각 층의 경계면에서 변위 연속 조건을 만족시키지 못한다.

Cho와 Yoon[9]은 복합재 적층 판에 단축 인장 하중이 작용하는 경우에 층간응력의 정확성을 높이기 위해서 extended Kantorovich method를 제안하였다. 이 방법으로 구해진 응력함수는 반복 연산을 통해서 층간 경계 면에서 응력과 변위 연속 조건을 만족시킨다. 또한 Cho와 Kim[10]은 적층 판의 굽힘과 비틀, 그리고 판에 열 하중이 가해지는 경우의 문제도 해결하였다.

본 연구에서는 복합재 적층 판의 해석에 사용된 Kantorovich method를 복합재 적층 패치 문제에 적용하였다. 제안된 방법은 복합재 적층 패치의 층간응력을 효과적으로 해석할 수 있으며 기존의 방법으로는 구할 수 없었던 패치의 3차원 응력 분포 또한 나타낼 수 있다. 최종적으로 수치예제를 통해 제안된 방법의 신뢰성을 검증한다.

2. 본 론

복합재 적층 패치의 구조는 Fig. 1과 같다. 패치는 정사각형으로 가정하며 각 층은 직교 이방성 재료로 x -축과 임의의 각을 이루고 있다. 하중은 기판에 가해지고 있으며 기판으로부터 접착제에 전달된 응력은 곧바로 패치에 가해진다. 또한 본 연구는 다음과 같은 가정 하에서 수행한다.

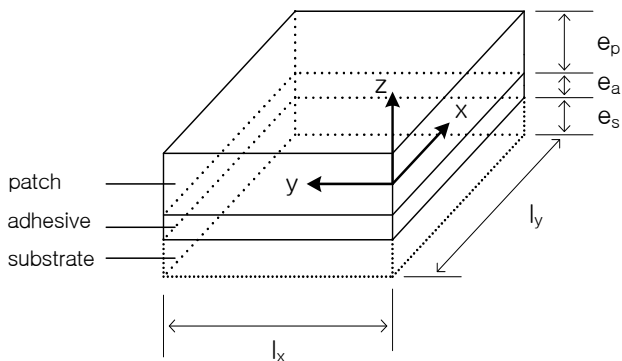


Fig. 1 Geometry of the composite patched structure

- 접착제는 무한개의 전단 스프링으로 고려한다. 찢김과 벗겨짐, 그리고 수직응력은 무시한다.
- 편심 하중에 의해서 발생하는 굽힘 모멘트는 고려하지 않는다.
- 패치와 접착제의 전단응력만을 고려하고 수직응력은 무시한다.

이러한 가정은 접착이음 구조의 해석 분야에서 Adams와 Peppiatt[11]이후 계속 사용되어왔다.

일반화된 패치의 변위장은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= Rx + U(y, z) + u_0 \\ v(x, y, z) &= V(y, z) + v_0 \\ w(x, y, z) &= W(y, z) + w_0 \end{aligned} \quad (1)$$

R 은 패치의 x -축 방향 인장을 나타내고, 상수 u_0, v_0, w_0 는 패치의 강체 변위를 뜻한다. 좌표축은 다음과 같이 정규화 된다.

$$\eta = z/h, \quad \xi = y/h \quad (2)$$

본 연구는 응력 함수를 이용한 접근이며 여의 가상 일의 원리(principle of complementary virtual work)을 사용한다. 점단위의 평형방정식을 만족시키기 위해 식(3)과 같이 Lekhnitskii[12] 응력 함수를 도입한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} &= \sigma_2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = \sigma_3, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \xi} = -\sigma_4, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} &= -\sigma_5, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = \sigma_6 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, F 와 Ψ 는 다음과 같이 동차해와 특이해로 구성된다.

$$\begin{aligned} F &= F_h + F_p = \sum_{i=1}^n f_i(\xi)g_i(\eta) + F_p(\xi, \eta) \\ \Psi &= \Psi_h + \Psi_p = \sum_{i=1}^n p_i(\xi)g_i(\eta) + \Psi_p(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (4)$$

함수 f_i 와 p_i 는 면내 응력함수이며, g_i 는 면외 응력함수이다. 응력함수의 특이해는 접착제의 바닥면으로부터 전달되는 전단응력을 나타낸다. σ_4 와 σ_5 는 접착제의 응력에서 직접적으로 전달되기 때문에 특이해의 형태는 식(5)과 같이 경계조건을 만족하는 2차 다항식과의 곱으로 표현된다.

$$\begin{aligned}\sigma_4 &= -f_{i,\xi} g_{i,\eta} - F_{p,\xi\eta} = -f_{i,\xi} g_{i,\eta} - \sigma_4^a \times A(\eta) \\ \sigma_5 &= -p_{i,\xi} g_{i,\eta} - \Psi_{p,\xi} = -p_{i,\xi} g_{i,\eta} - \sigma_5^a \times A(\eta)\end{aligned}\quad (5)$$

여기서,

$$A(\eta) = 3\eta^2 - \eta - \frac{1}{4} \quad (6)$$

지배방정식은 보죽 가상 일의 원리에서 식(7)과 같이 나타낼 수 있다. 단축 인장응력이 작용하는 경우에는 자유경계 조건과 강제 운동을 제외하면 식(8)과 같다.

$$\iint_S u_i \delta \sigma_{ij} n_j dA = \iiint \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dx dy dz \quad (7)$$

$$\iint R \delta \sigma_{xx}^p dy dz = \iint \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dy dz \quad (8)$$

면의 응력함수의 기저를 가정하고 나면 면내 응력함수를 구할 수 있다. 처음 가정되는 면외 응력함수는 하중 자유경계 조건을 만족해야 하므로 패치의 윗면과 아랫면에서 σ_3 와 σ_4 는 '0'이다. 따라서 면외 응력 함수인 g_i 는 $\xi = \pm 1/2$ 일 때, $g_i = g_{i,\eta} = 0$ 이다. 이 조건은 양단이 고정된 보의 고유 모드와 같으므로, 면외 응력함수 g_i 는 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$g_i(\eta) = \cos(\beta_i \eta) + k_i \cosh(\beta_i \eta) \quad (9)$$

여기서,

$$\beta_i = \frac{\pi(4i-1)}{2}, \quad k_i = -\frac{\cos(\beta_i/2)}{\cosh(\beta_i/2)}, \quad (i \geq 1) \quad (10)$$

식(9)를 식(4)에 대입하면 면내 응력 함수인 f_i 와 p_i 로 응력을 표현할 수 있다. 이를 (8)식에 대입한 후 부분적분을 수행하면 식(11)과 같이 나타낼 수 있다. 여기서 식(11)의 계수에 대한 자세한 표현은 생략한다.

$$\begin{aligned}& \int \left[a_{ij}^{(4)} f_j^{IV} + a_{ij}^{(0)} f_j'' + a_{ij}^{(0)} f_j \right. \\ & \quad \left. + b_{ij}^{(0)} p_j'' + b_{ij}^{(0)} p_j + r_i \right] \delta f_i d\xi + \\ & \int \left[c_{ij}^{(2)} p_j'' + c_{ij}^{(0)} p_j + d_{ij}^{(2)} f_j'' \right. \\ & \quad \left. + d_{ij}^{(0)} f_j + s_i \right] \delta p_i d\xi = 0\end{aligned}\quad (11)$$

($i, j = 1, 2, \dots, n$)

면내 응력함수인 f_i 와 p_i 는 식 (12)와 같은 형태로 가정한다. 층간응력의 크기는 판의 안쪽으로 갈수록 작아지기 때문에 등차해 부분은 지수함수의 형태로 가정하며, λ^2 중 음수를 선택한다.

$$\begin{aligned}f_i &= f_i^{(H)} + f_i^{(P)} = v_{ij}^f t_j e^{-\lambda_j \xi} + f_i^{(P)} \\ p_i &= p_i^{(H)} + p_i^{(P)} = v_{ij}^p t_j e^{-\lambda_j \xi} + p_i^{(P)}\end{aligned}\quad (12)$$

특이해 부분은 식(10)에서 f_i 와 p_i 를 상수로 가정한 후 식(13)과 같이 정리하면 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} a_{ij}^{(0)} & b_{ij}^{(0)} \\ d_{ij}^{(0)} & c_{ij}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_j^{(P)} \\ p_j^{(P)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_i \\ -s_i \end{bmatrix} \quad (13)$$

($i, j = 1, 2, \dots, n$)

식(12)에서 계수 t_j 는 자유경계에서 $\sigma_2 = \sigma_4 = \sigma_6 = 0$ 인 조건으로부터 구할 수 있다. 여기서 계산된 면내 응력함수를 식(3)과 (4)에 대입하면 식(14)와 같이 나머지 응력을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \left(v_{ij}^f t_j e^{-\lambda_j \xi} + f_j^{(P)} \right) g_{i,\eta\eta} \\ \sigma_3 &= \left(v_{ij}^f t_j \lambda_j^2 e^{-\lambda_j \xi} \right) g_i \\ \sigma_4 &= \left(v_{ij}^f t_j \lambda_j e^{-\lambda_j \xi} \right) g_{i,\eta} \\ \sigma_5 &= \left(v_{ij}^p t_j \lambda_j e^{-\lambda_j \xi} \right) g_{i,\eta} + \sigma_5^a (3\eta^2 - \eta - 1/4) \\ \sigma_6 &= \left(v_{ij}^p t_j e^{-\lambda_j \xi} + p_j^{(P)} \right) g_{i,\eta\eta} + \int \sigma_5^a d\xi \times (6\eta - 1)\end{aligned}\quad (14)$$

바닥면으로부터의 전단응력과 단축 인장응력이 작용할 때 패치의 x -방향 응력은 패치와 기관의 평행방정식으로 구할 수 있다. 이 해는 Mathias 와 Grédiac 이 식(15)와 같이 구하였다.

$$\begin{aligned}\sigma_1^p(x) &= \frac{C}{A} \left[\cosh(\sqrt{A}x) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1 - \cosh(\sqrt{A}l_x)}{\sinh(\sqrt{A}l_x)} \sinh(\sqrt{A}x) - 1 \right] \\ \sigma_5^a(x) &= e_p \frac{C}{\sqrt{A}} \left[\sinh(\sqrt{A}x) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1 - \cosh(\sqrt{A}l_x)}{\sinh(\sqrt{A}l_x)} \cosh(\sqrt{A}x) \right]\end{aligned}\quad (15)$$

여기서,

$$A = \frac{G_a}{e_a} \left(\frac{1}{E_x e_p} + \frac{1}{E_s e_s} \right) \quad (16)$$

$$C = \frac{G_a}{e_a e_p} \left((\alpha_p - \alpha_s) \Delta T - \frac{\sigma_{xy}^\infty}{E_s} \right)$$

식(15)에서 계산된 두 응력을 식(11)과 (14)에 대입하면 전체 패치의 응력분포가 계산된다.

3. 수치 예제

패치의 크기는 자유경계에서 발생하는 국부적인 현상들을 효과적으로 나타내기 위해 실제 크기보다 작게 설정하였다. 단축 인장응력은 알루미늄으로 이루어진 기판에 x -축 방향으로 작용하며 크기는 $100MPa$ 이다. 재료의 물성치와 치수는 Table 1과 같다.

Table 1 Material properties & Geometric data

Material properties	Geometric data
$\nu_a = 0.3$	$l_x = 0.02 \text{ (m)}$
$\nu_s = 0.25$	$l_y = 0.02 \text{ (m)}$
$\nu_{xy} = 0.28$	$e_a = 0.15 \times 10^{-3} \text{ (m)}$
$\nu_{yx} = 0.0159$	$e_s = 1 \times 10^{-3} \text{ (m)}$
$E_s = 73.8 \times 10^9 \text{ (Pa)}$	$e_p = 0.25 \times 10^{-3} \text{ (m)}$
$E_a = 4.2 \times 10^9 \text{ (Pa)}$	
$E_x = 181 \times 10^9 \text{ (Pa)}$	
$E_y = 10.3 \times 10^9 \text{ (Pa)}$	
$G_p = 7.17 \times 10^9 \text{ (Pa)}$	

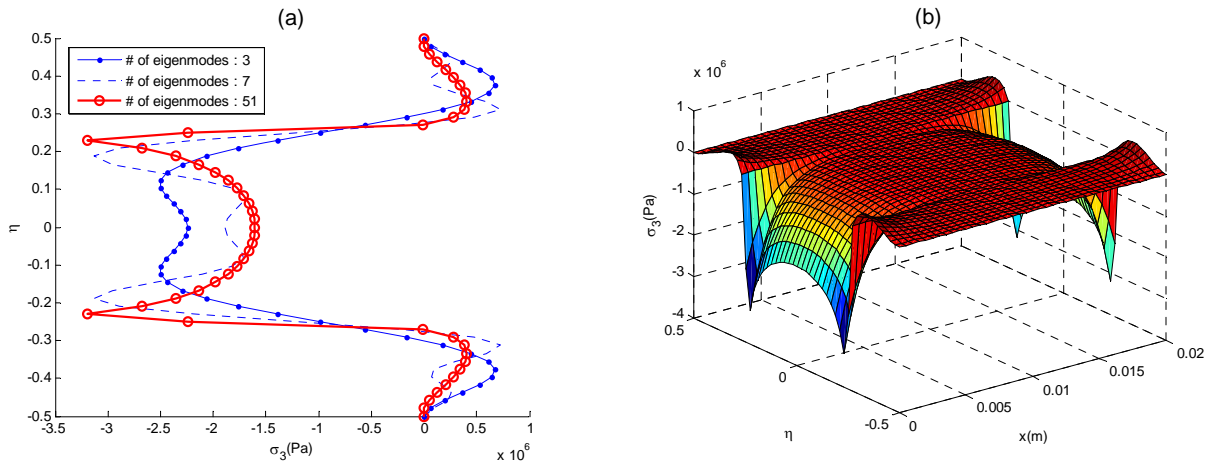


Fig. 2 (a) σ_3 at the free edge of $[0/90]_s$ laminate under uniaxial extension

(b) 3-dimensional σ_3 distribution at the free edge of $[0/90]_s$ laminate under uniaxial extension

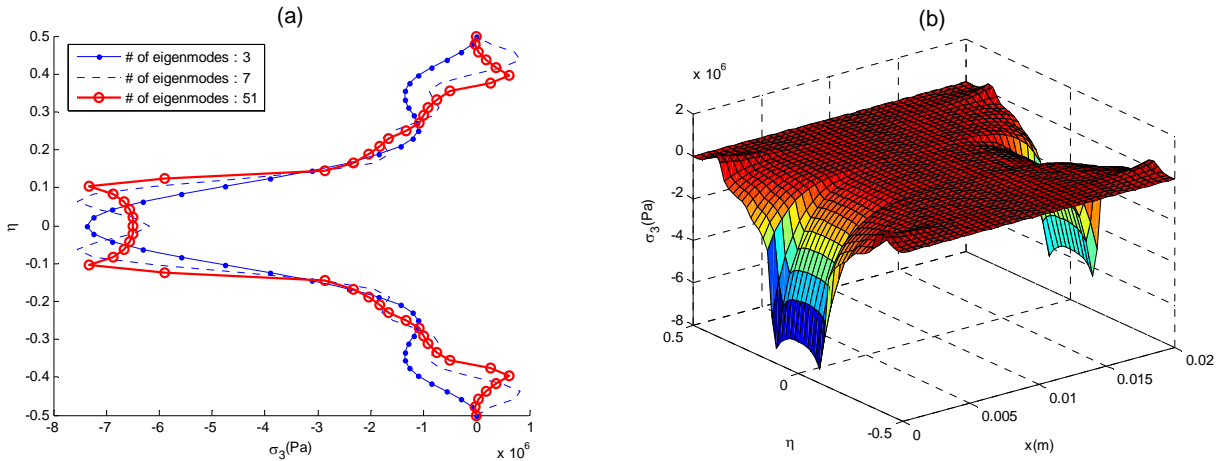


Fig. 3 (a) σ_3 at the free edge of $[45/-45/0/90]_s$ laminate under uniaxial extension

(b) 3-dimensional σ_3 distribution at the free edge of $[45/-45/0/90]_s$ laminate under uniaxial extension

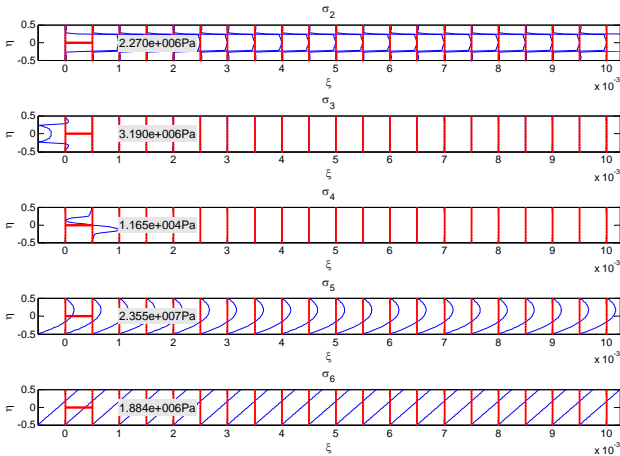


Fig. 4 $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$ and σ_6 at $x=0$ of $[0/90]_s$ laminate under uniaxial extension

Fig. 2(a)는 $[0/90]_s$ 적층 패치의 σ_3 가 $x=0$ 과 자유 경계에서 가정된 고유모드 수에 따라서 수렴하는 모습을 보여준다. 0° 판과 90° 판 사이에는 응력의 특이성이 존재하며 이는 각 층의 Poisson's ratio의 차이에서 기인한다. Fig. 2(b)는 자유경계에서 σ_3 의 3차원 응력분포를 나타낸다. σ_3 는 x -축 방향에서 패치의 양 끝으로 갈수록 증가한다. Fig. 3의 (a)와 (b)는 $[45/-45/0/90]_s$ 적층 패치의 σ_3 의 분포이다. $45^\circ/-45^\circ$ 의 층간응력은 Poisson's ratio의 차이에서가 아니라 전단-인장의 커플링에 의해 발생하기 때문에 [13] $0^\circ/90^\circ$ 의 분포와 다른 형상을 보인다.

Fig. 4와 Fig. 5는 패치의 2차원 응력분포를 나타낸 그래프이다. 모든 응력 값은 $x=0$ 에서 가장 크며, 종합적으로 대부분의 응력이 패치의 내부보다 경계에서 더욱 큰 값을 가진다.

Fig. 6는 $[0/90]_s$ 적층 패치의 $0^\circ/90^\circ$ 사이의 경계면에서 σ_3 와 σ_4 의 면내 y -축 방향 분포를 나타낸

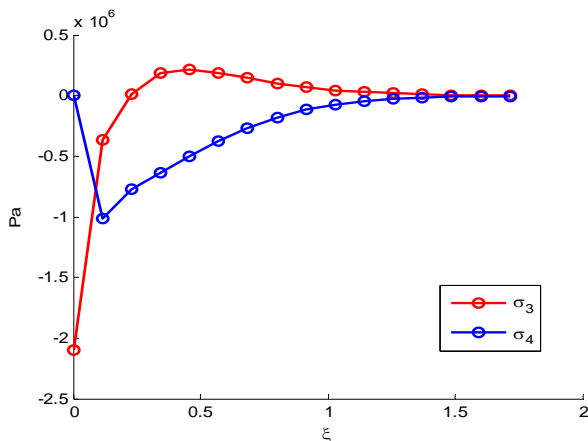


Fig. 6 σ_3 and σ_4 at the $0^\circ/90^\circ$ interface of $[0/90]_s$ laminate under uniaxial extension

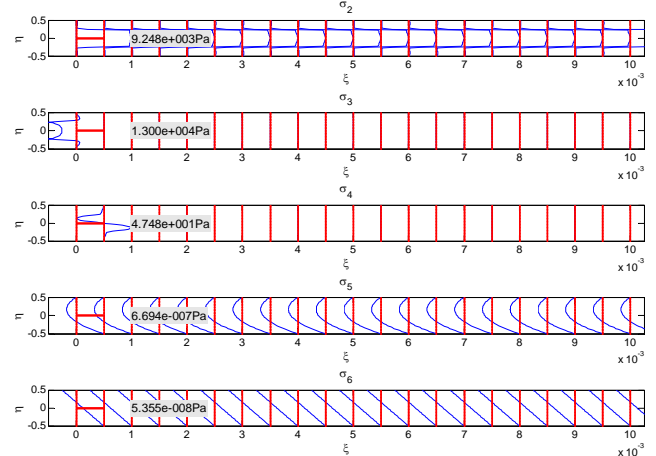


Fig. 5 $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$ and σ_6 at $x=0.01$ of $[0/90]_s$ laminate under uniaxial extension

다. 그래프에서와 같이 패치의 경계에서 σ_3 의 높은 응력집중을 보여주며, σ_4 의 경우 또한 응력이 집중됨과 동시에 경계에서 응력이 '0'이 되는 모습을 보여준다. y -축 방향으로의 힘 평형을 만족시키기 위해서 σ_4 의 형상은 Fig. 6와 같이 나타나고, 모멘트 평형을 만족시키기 위해서 σ_3 의 형상은 인장과 압축이 모두 존재하는 형상을 나타낸다.

4. 결 론

본 연구에서는 Kantorovich method를 이용하여 단축 인장하중이 작용할 때의 복합재 적층 패치의 3차원 응력분포를 구하였다. 먼저 면내와 면외로 구성되는 응력함수를 도입하였고 양 단이 고정된 보의 고유모드를 이용하여 면외 응력함수를 가정하였다. 그리고 가정된 함수를 여의 가상일의 원리에 대입하여 면내 응력함수를 구하였다. 끝으로 경계조건을 적용함으로써 패치의 3차원 응력 분포를 구하였다.

제안된 방법을 이용하여 구해진 결과는 복합재 적층 패치의 층간응력의 특이성을 잘 보여주었으며 층간의 응력 연속 조건과 경계에서 하중자유조건을 잘 나타내었다. 제안된 방법은 기관의 단축 인장문제뿐만 아니라 굽힘과 비틀 문제에 있어서도 정확한 응력 분포를 나타낼 수 있을 것으로 기대된다.

후 기

Authors are gratefully acknowledging the financial support by Defense Acquisition Program Administration and Agency for Defense Development under the contract UD070041AD

참고 문헌

- (1) Volkersen, O., 1938, "Die Niekraft in Zugbeanspruchten mit Konstanten Laschenquerschnitten". *Luftfahrtforschung*, No. 15, , pp. 41-47.
- (2) Golan, M., Reissner, E., 1944, "The stress in cemented joints", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 11, pp. A17-A27.
- (3) Mathias, J.D., Grédiac, M., and Balandraud, X., 2006, "On the bidirectional stress distribution in rectangular bonded composite patches", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, No. 22, pp. 6921-6947.
- (4) Spilker, R.L., Chou, S.C., 1980, "Edge effects in symmetric composite laminates: importance of satisfying the traction-free-edge condition", *Journal of Composite Materials*, Vol. 44, pp. 2-20.
- (5) Kassapoglou, C., Lagace, P.A., 1986, "An efficient method for the calculation of interlaminar stresses in composite materials", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, pp. 744-750.
- (6) Yin, W.L., 1994a, "Free-edge effects in anisotropic laminates under extension, bending and twisting. Part 1 - A stress function based variational approach", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 61, pp. 410-415.
- (7) Yin, W.L., 1994b, "Free-edge effects in anisotropic laminates under extension, bending and twisting. Part 2 -Eigenfunction analysis and the results for symmetric laminates", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 61, pp. 416-421.
- (8) Flanagan, G., 1994, "An efficient stress function approximation for the free-edge stresses in laminates", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 31, pp. 941-952.
- (9) Cho, M., Yoon, J., 1999, "Free-edge interlaminar stress analysis in composite laminates by the extended Kantorovich method", *ALAA Journal*, Vol. 37, No. 5, pp. 656-660.
- (10) Cho, M., Kim, H.S., 2000, "Iterative free-edge stress analysis of composite laminates under extension, bending, twisting and thermal loadings", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, No. 3, pp. 435-459.
- (11) Adams, R.D., Peppiatt, N.A., 1973, "Effect of Poisson's ratio strains in adherends on stresses of an idealized lap joint", *Journal of Strain Analysis*, Vol. 8, No. 2, pp. 134-139.
- (12) Lekhnitskii, S.G., 1963, *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Holden-Day, San Francisco.
- (13) Jones, R. M. 1975, *Mechanics of Composite Materials*, McGraw-Hill, New York.