

T-스플라인 유한요소해석을 이용한 트림 곡면 해석

김현중[†] · 서유덕 · 윤성기^{*}

Trimmed surface analysis based on T-spline FEM

Hyun-Jung Kim, Yu-Deok Seo and Sung-Kie Youn

Key Words : Trimmed surface (트림곡면), CAD (컴퓨터 원용설계), NURBS, T-spline (T-스플라인), Spline FEM (스플라인 기반 유한요소해석)

Abstract

In this present work, trimmed surface analysis for the 2D elasticity problem is presented. The main benefit of the proposed method is that no additional modeling for analysis of a trimmed surface is necessary. As the first attempt to deal with a trimmed surface in spline FEM, the information of the trimming curve and trimmed surface exported from CAD system is directly utilized for analysis. For this, trimmed elements are searched through employing projection scheme. For the integration of the trimmed elements, NURBS-enhanced integration scheme which is used in NEFEM is adopted. The quadtree refinement of integration cell is performed for the complicated trimmed cases. The information of trimming curve is used for obtaining integration points as well as constructing stiffness matrix. The robustness and effectiveness of the proposed method are investigated by presenting various numerical examples.

1. 서 론

NURBS (Non Uniform Rational B-Spline)는 기하학적 형상을 표현하기 위한 매개변수 형태의 표현 방법으로, 복잡한 형상의 정의가 간편하고 매개변수 변화만으로 다양한 형상의 표현이 가능하기 때문에 현재 CAD (Computer Aided Design) 분야에서 널리 사용되고 있다. 현재 공학분야의 대표적 해석기법이라고 할 수 있는 유한요소법(FEM)은 기하학적 형상과 해의 공간을 다항식 형태 (polynomial basis)로 표현한다. 이러한 두 시스템의 표현 방법의 차이는 CAD 모델로부터 유한요소모델을 별도로 만들어야 하는 번거로움을 가져오고,

그 과정에서 형상 근사(geometric error)에 의한 해의 오차를 수반한다. 뿐만 아니라 해석을 위한 추가적인 요소생성 작업도 필요하다. 만약 유한요소 해석의 형상함수로 CAD의 형상표현 방법인 스플라인(spline)을 사용한다면, 근사과정 없이 CAD 모델을 해석에 직접 사용할 수 있기 때문에 해의 정확도를 향상시킬 수 있다. 또한 CAD 시스템과 해석 방법과의 자유로운 연동이 가능하기 때문에 해석을 위한 독립적인 모델을 구성하는 등의 불필요한 인력 및 시간의 낭비를 최소화할 수 있다. 이러한 노력의 일환으로 최근에 스플라인 유한요소 해석(spline FEM)이 제안되어 현재 활발한 연구^(1~4)가 진행되고 있다.

기존의 NURBS 기반 유한요소해석 방법은 해석 모델이 항상 텐서곱(tensor product) 형태의 사각형 패치(rectangular patch)로 구성되어야 한다는 한계를 갖고 있다. Fig. 1a와 같이 내부홀(inner hole)이 있는 문제의 경우, 해석을 위해서는 최소 4개의

[†] 책임저자, 회원, KAIST 기계공학과
E-mail : kim1392@kaist.ac.kr
TEL : (042)350-3074 FAX : (042)350-3095

^{*} KAIST 기계공학과

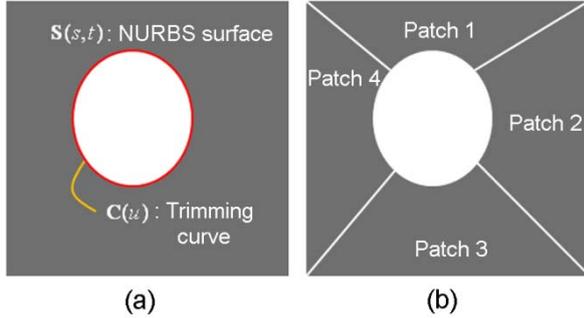


Fig. 1 (a) Trimmed NURBS surface ; (b) Analysis domain of conventional spline FEM : 4 patches

사각형 패치로 구성되어있어야 한다(Fig. 1b). 복잡한 형상을 갖는 문제의 경우 사각형 형태의 패치 조합으로 표현하는 데는 한계가 있으며, CAD 시스템에서 구현이 가능하다고 하더라도 이를 위해서는 많은 시간과 노력이 필요하다.

일반적으로 CAD 시스템에서 내부 홀이 있는 문제는 곡면 트리밍(surface trimming) 방법으로 모델링을 수행한다. 본 연구에서는 별도의 사각형 형태의 패치 분할 없이, CAD 에서 제공하는 트림 곡선과 트림곡면의 정보를 해석과 연계하여 트림 곡면을 효과적으로 해석할 수 있는 방법을 제안하고자 한다.

2. 트림 곡면(trimmed surface)

2.1 트림곡면과 트림곡선

트림 NURBS 곡면은 NURBS 곡면과 이를 트림하게 될 트림곡선들로 구성된다. NURBS 곡면과 트림곡선은 식(1)과 식(2)와 같이 각각 s, t 와 u 의 서로 다른 매개변수의 공간들로 구성된다.

$$\mathbf{S}(s, t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,p}^s(s, t) \mathbf{P}_{i,j} \quad (1)$$

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}^c(u) \mathbf{Q}_i \quad (2)$$

여기서 $R_{i,p}^s(s, t)$ 과 $R_{i,p}^c(u)$ 는 각각 곡면과 곡선에서의 NURBS 형상함수이고, $\mathbf{P}_{i,j}$ 와 \mathbf{Q}_i 는 곡면과 곡선에서의 조정점이다. 트림 곡면 내에 존재하는 트림 곡선의 방향은 일정한 법칙을 따른다. 트림 곡선의 오른쪽에 위치하는 영역은 항상 트림된 영역(void region)이 된다. 즉, 내부홀이 있는 문제의 경우 트림곡선의 방향은 항상 시계방향이 된다. 본 연구에서는 트림곡면 해석시 이러한 트림곡선의 방향 특성을 이용한다.

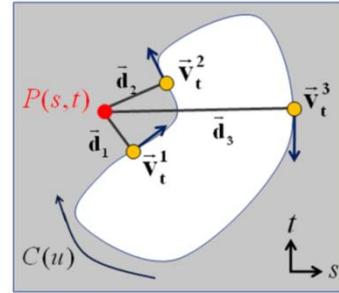


Fig. 2 Point projection from $P(s, t)$ to trimming curve in the parametric domain

2.2 임의의 점에 대한 트림영역 내/외부 존재 여부 판별 방법

Fig. 1 에 본 바와 같이 s, t 와 u 는 직접적인 관계가 없기 때문에, 임의의 점에 대해 이 점이 트림 곡선의 내부에 위치하는지 혹은 외부에 위치하는지에 대해 직관적으로 판단할 수 없다. 본 연구에서는 투영방법(projection scheme) 을 이용하여 이를 해결하였다. Fig. 2 는 트림곡면의 매개변수 영역(parametric domain)을 나타낸다. Fig. 2 의 P 점이 트림곡선 내/외부에 있는지 판별하기 위해 P 점을 트림곡선에 투영한다. 이로부터 다수의 투영점(projection points)을 얻을 수 있고, P 점과 투영점 간의 거리가 최소가 되는 근접투영점(closest projection point)을 찾을 수 있다. 근접투영점에서의 트림곡선의 미분벡터(\mathbf{v}_t^1)와 P 점에서 근접투영점까지의 벡터(\mathbf{d}_1)의 외적값이 지면 위 방향을 향하게 되면 $P(s, t)$ 는 트림곡선 외부의 점이 된다. 이는 트림곡선의 방향 특성을 알기에 가능한 판별 방법이다. 이와 같은 방법을 이용하면 임의의 점이 매개변수 영역에서 트림된 영역에 존재하는지 아닌지 판별할 수 있다.

3. 트림곡면해석

3.1 트림 요소 검색

2.2 절에서 설명한 방법을 이용하여 트림곡선이 지나가는 요소를 검색한다. 트림요소 검색 단계는 크게 두 단계로 이루어진다. 첫 번째 단계는 Fig. 3 에 보인 바와 같이, 요소 중앙점에서 트림곡선으로 투영하여 근접투영점과 중앙점과의 거리(d_i)를 계산하여 트림요소를 판별하는 단계이다.

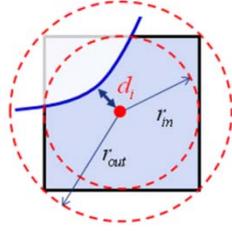


Fig. 3 Searching trimmed elements : Projection from the center point of elements to trimming curve

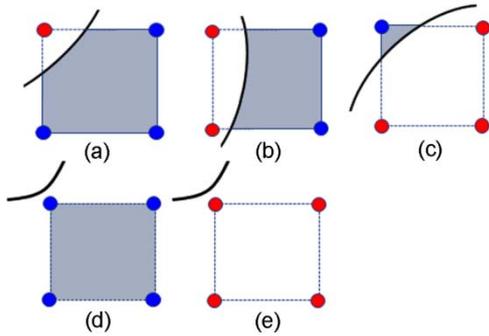


Fig. 4 (a), (b) and (c) : Trimmed elements ; (d) and (e) : Non-trimmed elements

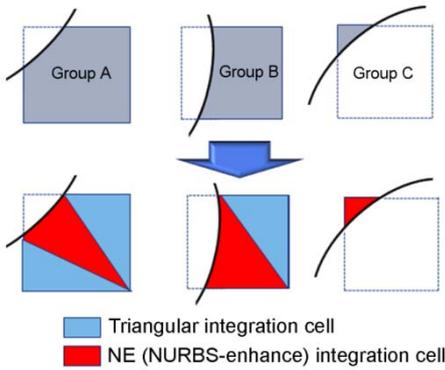


Fig. 5 The grouping of the trimmed elements and trimmed element decomposition

r_{in} 를 요소 내접원의 반지름, r_{out} 를 요소 외접원의 반지름이라 하면, 크기 비교를 통해 각 요소들은 아래와 같이 세 경우로 구분될 수 있다.

경우 1: $d_i \leq r_{in} \rightarrow$ 트림 요소

경우 2: $r_{in} \leq d_i \leq r_{out} \rightarrow$ 판단 할 수 없는 요소

경우 3: $r_{out} < d_i \rightarrow$ 트림되지 않은 요소

경우 2 는 첫 번째 단계로는 트림요소 여부를 판단할 수 없기 때문에, 2.2 절에서 설명한 판별법을 요소의 네 꼭지점에 대해 수행하여 트림요소 역에

속하지 않거나(Fig. 4d) 속하게 되면(Fig. 4e) 이는 트림되지 않은 요소이고, 그렇지 않은 경우(Fig. 4a, 4b and 4c)는 트림 요소가 된다. 위와 같은 트림요소 검색 방법은 어떠한 경우의 트림된 요소라도 검색할 수 있다.

3.2 트림 요소 적분

모든 트림요소는 Fig. 5 와 같이 요소의 네 꼭지점 판별을 통해 세 그룹으로 구분할 수 있다. 세 개의 꼭지점이 트림영역에 있으면 그룹 A, 두 꼭지점이 있으면 그룹 B, 한 꼭지점이 트림영역 안에 존재하면 그룹 C 로 분류한다. 트림 요소의 적분을 위해 Fig. 5 와 같이 트림요소분할(trimmed elements decomposition)을 수행한다. 삼각형 적분격자는 삼각형 가우스 구적법(triangular Gauss quadrature rule)을 사용하고, 한 면이 NURBS 곡선을 갖는 삼각형 적분격자의 경우 NE-적분법(NURBS-enhanced integration scheme)을 사용한다. NE-적분법은 NEFEM (NURBS-enhanced FEM)^(5,6)에 제안된 방법으로 한 면이 NURBS 곡선으로 표현되는 삼각형 격자를 정확하게 적분할 수 있는 적분 기법이다.

Fig. 6 에 NURBS 곡선을 갖는 삼각형 적분격자에 대한 변환 관계를 나타내었다. Ω_{ph} 와 Ω_{pa} 는 각각 물리적 영역과 매개변수 영역을 의미한다. 이때 $\partial\Omega_{ph}$ 와 $\partial\Omega_{pa}$ 는 물리적 영역과 매개변수 영역에서 NURBS 곡선이다. 변환 \mathbf{R}^{-1} 은 Ω_{pa} 영역에서의 삼각형 적분격자(st -좌표)를 꼭지점이 각각 (0,0), (1,0), (0,1) 인 삼각형 격자(XY -좌표)로 변환하는 1 차 변환이다. 본 연구에서는 삼각형 FEM 형상함수를 사용하였다.

$$\mathbf{R} : \{X, Y\} \rightarrow \{s, t\} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} s &= (Y) s_1 + (1-X-Y)s_2 + (X) s_3 \\ t &= (Y) t_1 + (1-X-Y)t_2 + (X) t_3 \end{aligned} \quad (4)$$

따라서 XY -좌표에서 정의되는 NURBS 곡선 $\phi(u)$ 는 $\phi(u) = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{C}(u)$ 의 관계식으로 표현할 수 있다. 변환 \mathbf{Q} 는 가우스 구적법을 사용하기 위해 삼각형 영역과 사각형 영역과의 관계를 나타내는 변환식이다^(5,6).

$$\mathbf{Q} : \{u, \zeta\} \rightarrow \{X, Y\} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} X &= \phi_x(u)(1-\zeta) \\ Y &= \phi_y(u)(1-\zeta) + \zeta \end{aligned} \quad (6)$$

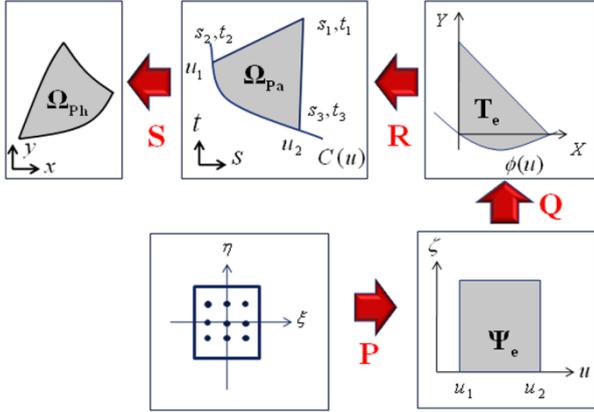


Fig. 6 Transformations of the triangular elements which has NURBS curved side

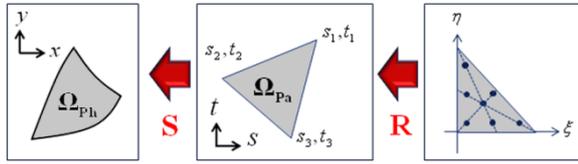


Fig. 7 Transformations of the triangular elements

여기서 주목할만한 점은 NURBS 곡선의 정보가 변환식에 반영되어 있다는 점이다. 이러한 관계에 따라 가우스 적분점은 NURBS 곡선을 갖는 삼각형 격자 내부에 배치하게 된다. 변환 P는 단순한 스케일 크기 변환이며, 가우스 적분점을 Ψ_e 영역에 배치한다.

$$\mathbf{P}: \{\xi, \eta\} \rightarrow \{u, \zeta\} \quad (7)$$

$$u = \frac{\xi}{2}(u_2 - u_1) + \frac{1}{2}(u_2 + u_1) \quad (8)$$

$$\zeta = \frac{\eta}{2} + \frac{1}{2}$$

변환식 R과 P는 1차 선형 변환관계이기 때문에 계산비용이 많이 소요되지 않는다. 기존의 스플라인 FEM과 비교했을 때 Q변환이 추가되었음을 알 수 있다.

Fig. 7은 삼각형 적분격자에 대한 변환관계식을 나타낸다. 삼각형 격자의 적분은 기존 스플라인 FEM에서 사각형 요소의 적분 방법과 동일하며, 삼각형 가우스 구적법을 사용한다.

3.3 강성행렬 수식화

3.2 절에서 설명한 변환관계를 이용하여 트립요

소에 대한 강성행렬을 계산한다. 강성행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_e = \iint \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\xi d\eta = \sum_{k=1}^{NINT} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |\mathbf{J}^k| W^k$$

여기서 B는 변형률-변위 행렬(strain-displacement matrix)이고, D는 구성행렬(constitutive matrix), W는 가중치를 의미한다. NURBS 곡선을 갖는 삼각형 적분격자의 자코비안은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial \zeta} & \frac{\partial Y}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial X} & \frac{\partial t}{\partial X} \\ \frac{\partial s}{\partial Y} & \frac{\partial t}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{J}_P] \cdot [\mathbf{J}_Q] \cdot [\mathbf{J}_R] \cdot [\mathbf{J}_S] \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 $\mathbf{J}_P, \mathbf{J}_Q, \mathbf{J}_R, \mathbf{J}_S$ 는 다음과 같다.

$$[\mathbf{J}_P]: \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(u_2 - u_1) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$[\mathbf{J}_Q]: \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial \zeta} & \frac{\partial Y}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x(u)}{\partial u}(1-\zeta) & \frac{\partial \phi_y(u)}{\partial u}(1-\zeta) \\ -\phi_x(u) & -\phi_y(u)+1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$[\mathbf{J}_R]: \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial X} & \frac{\partial t}{\partial X} \\ \frac{\partial s}{\partial Y} & \frac{\partial t}{\partial Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_2 + s_3 & -t_2 + t_3 \\ s_1 - s_2 & t_1 - t_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$[\mathbf{J}_S]: \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum R_{,s,x} & \sum R_{,s,y} \\ \sum R_{,t,x} & \sum R_{,t,y} \end{bmatrix} \quad (13)$$

\mathbf{J}_Q 에서 다시 NURBS 곡선의 정보가 사용됨을 알 수 있다.

4. 검증 예제

4.1 구멍이 있는 무한 평면 문제

Fig. 8과 같이 정해가 존재하는, 구멍이 있는 무한 평면 문제를 해석해보았다. x 방향으로 무한대에서 단위 인장 응력을 받고 있을 때 정해는 다음과 같이 주어진다.

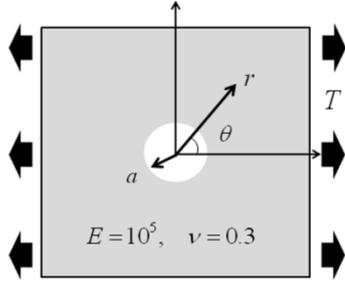


Fig. 8 Verification example : Infinite plate with a circular hole

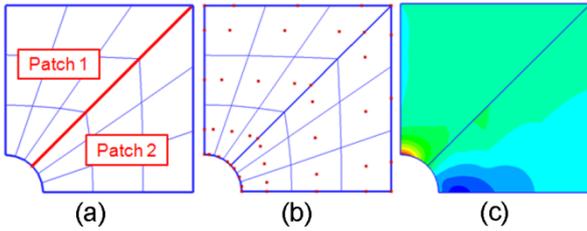


Fig. 9 Conventional spline FEM ; (a) Two patches ; (b) Mesh and control points configuration (quadratic) ; (c) Von-Mises stress contour

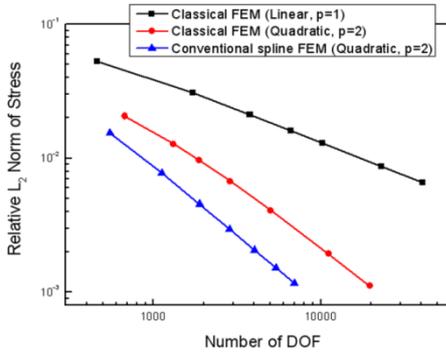


Fig. 10 Convergence behaviors of FEM and conventional spline FEM

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \theta) &= \frac{T}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{T}{2} \left(1 - 4 \frac{a^2}{r^2} + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= \frac{T}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{T}{2} \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= -\frac{T}{2} \left(1 + 2 \frac{a^2}{r^2} - 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (14)$$

$E = 10^5, \nu = 0.3, a = 1$ 로 하였다. 대칭성을 고려하여 1/4 영역만을 해석한다. 모든 경계에서 정해로부터 구해진 응력 경계 조건을 부가하였다.

먼저 기존 스플라인 FEM의 특성을 알아보기 위해 Fig. 9a와 같이 두 개의 사각형 패치로 나누어 해석을 수행하였다. Fig. 9b는 2차의 스플라인 형상함수를 사용하였을 때 요소와 조정점을 나타

내고, Fig. 9c는 해석 결과 얻어진 응력 분포를 나타낸다. B-스플라인은 매듭점 중복도(knot multiplicity)가 k 이고, 형상함수의 차수가 p 차일 때 패치내에서 C^{p-k} 연속성을 만족한다. 따라서 FEM은 각 요소 경계에서 응력이 불연속이지만, 스플라인 FEM은 요소경계에서 응력이 연속성을 갖는다. Fig. 9c에 보인 바와 같이, 패치경계를 제외한 패치 내 모든 구간에서 응력이 연속적인 거동을 보임을 알 수 있다. 다만 패치경계에서는 스플라인 형상함수가 C^0 연속성을 갖기 때문에 응력이 불연속성을 보인다. Fig. 10은 FEM과 스플라인 FEM의 오차 높을 나타내었다. 같은 DOF를 사용하였을 경우 스플라인 FEM이 FEM보다 해의 정확도가 높음을 알 수 있다.

본 연구에서 제안한 트림곡면해석의 유용성과 수렴성을 알아보기 위해 같은 문제에 대해 해석을 수행하였다. 제안한 방법은 트림곡선에 대한 정보가 해석에 반영되기 때문에 Fig. 11a과 같이 하나의 패치만으로도 해석이 가능하다. 하나의 패치만을 사용했기 때문에 Fig. 11c의 응력분포에서 알 수 있듯이 모든 영역에서 응력이 연속적인 거동을 보인다. Fig. 12에 트림곡면해석의 수렴률을 나타내었다. 2차, 3차, 4차의 형상함수를 사용하였을 경우 제안한 방법의 수렴률이 각각 2, 3, 4로 이론적인 수렴률을 보였다.

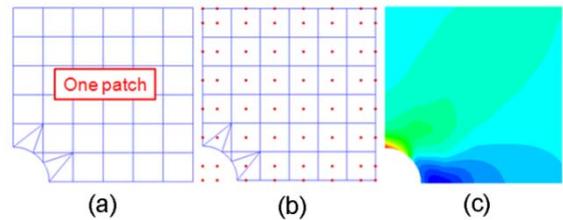
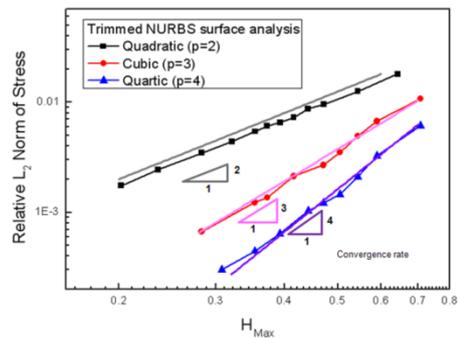


Fig. 11 Trimmed NURBS surface analysis ; (a) One patch ; (b) Mesh and control points configuration (quadratic) ; (c) Von-Mises stress contour



* H_{max} : mesh parameter
Fig. 12 Convergence behaviors of trimmed NURBS surface analysis

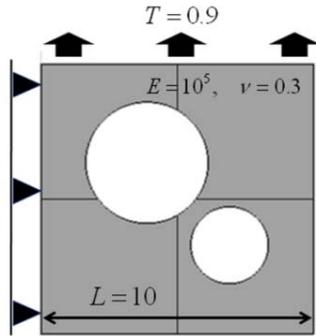


Fig. 13 Multiple-hole problem

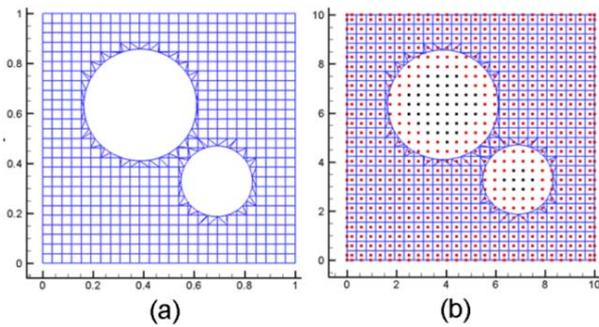


Fig. 14 The parametric domain (a) and physical domain (b) of Fig. 17

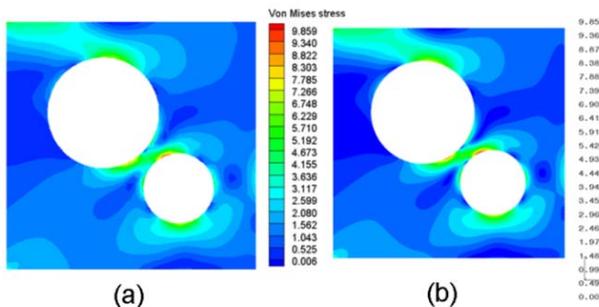


Fig. 15 Von-Mises stress contour ; (a) Trimmmed NURBS surface analysis ; (b) ABAQUS

4.2 다수의 트림곡선이 있는 예제

다수의 트림곡선이 있는 문제를 기존 방법으로 해석하기 위해서는 사각형패치를 구성하기 위해 새롭게 CAD 모델을 구성해야 한다. 이는 상당한 비용과 시간을 요구한다. 반면에 트림곡면해석은 하나의 패치로 해석이 가능하기 때문에 보다 효과적으로 해석할 수 있다. Fig. 13 은 두 트림곡선이 있는 해석 예제이다. Fig. 14a 와 Fig. 14b 는 트림곡면해석에서 사용된 매개변수 영역과 물리적 영역을 나타내었다. Fig. 15 는 트림곡면해석과 ABAQUS 로 얻어진 응력분포이다. 두 응력 분포가 비슷한 결과를 보임을 관찰할 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 스플라인 형상함수를 이용하여 트림곡면을 효과적으로 해석할 수 있는 방법을 제시하였다. 이 방법은 하나의 패치만을 이용해서 복잡한 형상을 갖는 문제를 해석하기 때문에, 도메인 내 응력 불연속 문제가 발생하지 않고, 사각형 형태의 패치로 CAD 모델을 새로 구성하는 번거로움이 없다. 트림곡면해석의 오차분석 결과 이론적인 수렴률을 보였으며, 기존의 스플라인 FEM 으로 해석하기 어려운 다수의 트림곡선이 존재하는 문제에 대해 해석이 가능하다. 제한한 트림곡면해석 방법을 이용하면 CAD 와 해석간의 데이터 교환이 자유로워 해석 및 설계 과정의 효율성 제고에 획기적인 기여를 할 수 있을 것이라 판단된다.

후기

본 연구는 한국학술진흥재단의 ‘T-스플라인 기반 CAD/CAE 통합 기법 연구’에 의하여 지원되었음.

참고문헌

- (1) Hughes, T. J. R., Cottrell, J. A. and Bazilevs, Y., 2005, “Isogeometric analysis : CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, pp 4135-4195.
- (2) Cottrell, J. A., Hughes, T. J. R. and Reali, A., 2007, “Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, pp. 4160-4183.
- (3) Cottrell, J. A., Reali, A., Bazilevs, Y., Hughes, T. J. R., 2006, “Isogeometric analysis of structural vibrations”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, pp. 5257-5296.
- (4) Bazilevs, Y., Calo, V. M., Zhang, Y., Hughes, T. J. R., 2006, “Isogeometric fluid-structure interaction analysis with applications to arterial blood flow”, *Computational Mechanics*, Vol. 38, pp. 310-322.
- (5) Sevilla, R., Mendez, S. F. and Huerta, A., 2008, “NURBS-enhanced finite element method (NEFEM)”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Published online.
- (6) Sevilla, R., Mendez, S. F., and Huerta, A., 2008, “NURBS-enhanced finite element method for Euler equations”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Published online.