

보조변수법과 복소변수를 연동한 설계 민감도 해석 연구

김현기[†] · 조맹효^{*}

Adjoint Variable Method combined with Complex Variable for Structural Design Sensitivity

Hyungi Kim; Maenghyo Cho

Key Words : Complex Variable(복소변수), Adjoint Variable Method(보조변수법), Semi-Analytic Method(준해석적 방법), Sensitivity(민감도)

Abstract

Among various sensitivity evaluation techniques, semi-analytical method is quite popular since this method is more advantageous than analytical method and global finite difference method. However, SAM reveals severe inaccuracy problem when relatively large rigid body motions are identified for individual elements. Such errors result from the numerical differentiation of the pseudo load vector calculated by the finite difference scheme. In the present study, the adjoint variable method combined with complex variable is proposed to obtain the shape and size sensitivity for structural optimization. The complex variable can present accurate results regardless of the perturbation size as well as easy to be implemented. Through a few numerical examples of the static problem for the structural sensitivity, the efficiency and reliability of the adjoint variable method combined with complex variable is demonstrated.

1. 서론

민감도 해석은 설계 변화율에 기초한 최적화 기법에 항상 필요하며, 그 신뢰도는 구조 설계에 필수적으로 요구된다.

민감도 해석기법에는 크게 직접미분 방법과 보조변수법으로 나뉘어진다. 직접미분 방법에서는 해석적방법, 유한차분법, 준해석적 방법 등이 있다. 해석적 방법은 가장 정확한 민감도 결과값을 얻을 수 있고, 증분값과 무관하다는 잇점이 있으나, 요소 형태에 크게 영향을 받기 때문에 복잡한 요소에 대해서는 계산 자체가 어렵다는 문제가 있다. 이 때문에 유한차분법 또는 준해석적 방법과 같은 수치미분 방법들이 주로 사용되고 있다. 유한차분법은 요소형태에 의존하지 않고, 계산이 간단하다

[†] 한국항공우주연구원

E-mail) shotgun1@kari.re.kr

^{*} 서울대학교 기계항공공학부

E-mail) mhcho@snu.ac.kr

TEL) 02-880-1693, FAX) 02-886-1693

는 장점이 있으나 민감도 결과값이 증분값(perturbation size)에 크게 의존하며, 시간 측면에서도 매우 비효율적이다. 기존의 준해석적 방법은 유한 차분법의 간편함과 해석적 방법이 갖는 해의 정확성을 모두 고려하는 방법으로 강성행렬의 미분항이 포함되는 가상하중벡터의 계산에서는 유한 차분법을 주로 사용한다.

준해석적 방법은 유한 차분법에 의해 계산된 미분항에서 truncation 오차가 발생하기 때문이며, 유한요소 모델 자체가 정확한 민감도 결과를 제시할 만큼 충분히 정확하지 못한 문제점이 있는데, 이것의 근본적인 원인이 구조물에서 발생하는 강제 모드에 기인하는 것으로 보고되었다.⁽¹⁻⁴⁾ 최근에는 Van Keulen 에 의해서 Curved shell 요소내의 변위장을 순수변형부와 강제모드부로 분리하여 전체 민감도 중에서 강제 모드부의 영향을 해석적 방법으로 도출하는 민감도 해석기법을 제안하였다.^(5,6) Olhoff 등은 Exact numerical differentiation method(EDM)를 제안하여 증분율에 의한 오차를 상당부분 개선하였고⁽⁷⁾, Oral 은 Von Neumann 급수를 이용한 반복법으로 증분값이 큰 구간에서의 민

감도 해석결과를 개선할 수 있음을 보였다.⁽⁸⁾

보조변수법은 설계변수가 구속조건 보다 많은 경우 직접미분에 비해 훨씬 유리하다. 설계변수와 무관한 보조변수가 미리 계산되어 buffer에 저장되므로 설계변수가 증가할수록 계산시간의 효율성은 증가된다. 보조변수법에서 강성행렬의 미분은 주로 해석적 방법이 사용되고 있는데, 이를 수치적 미분으로 대체하여 정확한 민감도 계산을 수행한다면 보다 효율적인 민감도 해석이 가능하다. 이와 관련하여 Cho와 Kim은 iterative 방법과 수치미분을 연동한 보조변수법을 제안하였다.⁽⁹⁾ 이 방법은 강제모드 분리를 채용하여 수치미분에서 증분을 때문에 발생하는 truncation 오차와 round-off 오차를 감소시켰다.

수치 민감도 계산 방법의 하나인 복소변수법은 주로 CFD 문제에서 폭넓게 사용되어 왔는데 간단한 전개에 의해 매우 정확하고 안정적인 민감도 결과를 제공할 수 있으며, 증분율에 의한 영향도 거의 없는 것으로 보고되어 왔다.

복소변수법과 관련하여 Lyness 등은 복소평면에서 n 차 미분의 근사 및 해석적 평가를 위해 복소변수를 채용하였다.^(10,11) Suqire와 Trapp은 1차 미분을 정확하게 계산하기 위해 복소변수를 채용하는 연구를 수행하였고⁽¹²⁾, Martins 등은 복소변수법을 사용한 민감도 계산을 위해 Fortran/C++ code를 개발하였다.^(13,14) 또한, 복소변수법은 CFD 문제의 민감도와 공력구조의 다분야 통합 설계 최적화 등에 주로 사용되어 왔다.^(15,16) 이 방법은 비선형 유한요소 프로그램에도 도입되었으며, fast Fourier transform(FFT)를 사용하는 pseudo spectral simulation codes 로 확장되어 연구되어 왔다.^(17,18)

최근에는 정상상태의 이산화 민감도 해석에서 iterative 민감도 방정식을 푸는데 사용되고 있으며, 복소변수법의 간편함과 정확성 때문에 전산유체 역학 분야에서 n 차 이상의 미분을 위해 주로 사용되고 있다.

본 연구에서는 복소변수와 보조변수법을 연동시킨 구조 민감도 계산기법을 제안한다. 이 방법은 유한요소 프로그램이 간편하고, 민감도 계산에서 문제가 되어 왔던 증분값에 거의 영향을 받지 않으며, 매우 안정적인 민감도 결과를 제공한다. 본문에서는 복소변수와 보조변수법에 대한 이론적인 소개와 민감도 계산을 위해 두 방법을 연동시킨 후 이산화 하는 과정을 제공한다. 그리고, 수치예제에서 기존 민감도 계산방법의 결과와 비교를 함으로써 제안방법의 신뢰성을 검증한다.

2. 민감도 해석 방법

정적 문제에서 선형 시스템의 지배방정식은 식 (1)로 표현된다.

$$[\mathbf{K}]_G \{\mathbf{u}\}_G = \{\mathbf{F}\}_G \quad (1)$$

여기서, $[\mathbf{K}]_G$ 은 강성행렬, $\{\mathbf{u}\}_G$ 은 전체 변위벡터, $\{\mathbf{F}\}_G$ 은 전체 하중벡터를 의미한다.

유한차분법에 의한 변위 민감도는 식 (2)와 같이 계산된다.

$$\frac{d\{\mathbf{u}\}_G}{dv_i} = \left(\frac{\{\mathbf{u}\}_G^{Perturbed} - \{\mathbf{u}\}_G^{Original}}{h} \right) \quad (2)$$

$\{\mathbf{u}\}_G^{Perturbed}$ 는 설계변수 증분량을 고려한 시스템의 변위량이고, $\{\mathbf{u}\}_G^{Original}$ 은 초기시스템의 해석으로 변위량이다. i 는 설계변수 번호, h 는 설계변수 증분량을 의미한다.

유한차분법은 매우 간편하지만, 전체시스템을 각 설계변수마다 2번씩 계산해야 하므로 전산자원과 계산비용 측면에서 비효율적인 방법이다.

이런 이유로 준해석적 방법이 민감도 해석을 위해 많이 사용되어 왔는데, 이와 관련한 전개식은 식 (3)과 식 (4)에 주어져 있다.

식 (1)을 설계변수 v_i 로 미분하면 식 (3)과 같이 전개된다.

$$\frac{d[\mathbf{K}]_G}{dv_i} \{\mathbf{u}\}_G + [\mathbf{K}]_G \frac{d\{\mathbf{u}\}_G}{dv_i} = \frac{d\{\mathbf{F}\}_G}{dv_i} \quad (3)$$

식 (3)으로부터 기존의 준해석적 방법은 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} \frac{d\{\mathbf{u}\}_G}{dv_i} &= [\mathbf{K}]_G^{-1} \left[\frac{d\{\mathbf{F}\}_G}{dv_i} - \frac{d[\mathbf{K}]_G}{dv_i} \{\mathbf{u}\}_G \right] \\ &= [\mathbf{K}]_G^{-1} \left[\frac{d\{\mathbf{F}\}_G}{dv_i} - \sum_{j=1}^n \frac{d[\mathbf{K}]_e^j}{dv_i} \{\mathbf{u}\}_e^j \right] \end{aligned} \quad (4)$$

식 (4)에서 요소단위의 강성행렬 미분, $d[\mathbf{K}]_e^j / dv_i$, 은 요소 수(n)만큼 수행된 후 더해지게 된다. 식 (4)의 준해석적 방법은 강제모드가 큰 경우에 증분값에 따라 신뢰할 수 없는 결과를 제공하게 되는데, 이와 관련된 오차는 $d[\mathbf{K}]_e^j / dv_i$ 를 차분으로 계산할 때 대부분 발생하게 된다. 따라서 여기서 발생하는 오차를 줄여야 하는 필요성이 요구되었으며, 이와 관련한 개선방법이 강제모드를 분리하는 방법인데, 구체적인 계산방법은 식 (5)에 주어져 있다. 그러나, 이 방법은 강제모드가 크지 않은 문제에서는 큰 효과가 없다는 단점이 있으며, 이와 관련한 해석결과는 참고문헌 (19)에 잘 나와 있다.

$$\begin{aligned} \{\mathbf{Q}\}_G &= \frac{d\{\mathbf{F}\}_G}{dv_i} - \sum_{j=1}^n \frac{d[\mathbf{K}]_e^j}{dv_i} \{\mathbf{u}\}_e^j \\ &+ \sum_{j=1}^n [\mathbf{K}]_e^j \sum_{k=1}^{r_n} \left(\alpha^k \frac{d\{\mathbf{r}_k\}}{dv_i} \right) + \{\mathbf{Q}\}_{Rigid} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, α^k , $\{\mathbf{Q}\}_{Rigid}$ 는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \alpha^j &= \frac{\{\mathbf{u}_e\} \cdot \{\mathbf{r}_j\}}{\{\mathbf{r}_j\} \cdot \{\mathbf{r}_j\}} \quad (\{\mathbf{r}_j\} \text{는 강체모드, } j: \text{강체모드 번호}) \\ \{\mathbf{Q}\}_{Rigid} &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_n} \left(\frac{\{\mathbf{r}_k\}^T (d[\mathbf{K}]_e^j / dv_i) \{\mathbf{u}\}_e^j}{\{\mathbf{r}_k\}^T \{\mathbf{r}_k\}} \{\mathbf{r}_k\} \right) \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{r_n} \left(\frac{(d\{\mathbf{r}_k\} / dv_i)^T [\mathbf{K}]_e^j \{\mathbf{u}\}_e^j}{\{\mathbf{r}_k\}^T \{\mathbf{r}_k\}} \{\mathbf{r}_k\} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

3. 보조변수법(Adjoint Variable Method)

3.1 Traditional Adjoint Variable Method

목적함수 Φ 의 설계변수 v_i 에 대한 미분은 식 (7)로 주어진다.

$$\frac{d\Phi(\mathbf{u}, v)}{dv_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial v_i} \quad (7)$$

여기서, \mathbf{u} 는 변위장, v_i 는 설계변수를 의미한다. 목적함수 Φ 는 변위장 \mathbf{u} 과 설계변수 v_i 에 의존한다.

일반적으로 보조변수법에서 보조변수 λ 는 식 (8)과 같이 정의된다.

$$[\mathbf{K}(v)]\lambda = \frac{\partial \Phi^T}{\partial \mathbf{u}} \quad (8)$$

식 (1)의 정적 방정식에서, 설계변수 v_i 에 의한 변위 민감도 식은 식 (4)에 주어져 있다. 식 (4)를 식 (7)의 목적함수 민감도에 대입하면 식 (9)로 표현된다.

$$\frac{d\Phi}{dv} = \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}} [\mathbf{K}]_G^{-1} \left[\frac{d\{\mathbf{F}\}_G}{dv_i} - \sum_{j=1}^n \frac{d[\mathbf{K}]_e^j}{dv_i} \{\mathbf{u}\}_e^j \right] \quad (9)$$

식 (9)를 식 (8)의 보조변수 정의를 사용하여 다시 표현하면 식 (10)으로 표현될 수 있다.

$$\frac{d\Phi}{dv} = \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \lambda^T \left[\frac{d\{\mathbf{F}\}_G}{dv_i} - \sum_{j=1}^n \frac{d[\mathbf{K}]_e^j}{dv_i} \{\mathbf{u}\}_e^j \right] \quad (10)$$

식 (10)에서 강성행렬의 미분은 수치적인 방법을 사용할 수 있으며, 본 연구에서는 복소변수를 사용한 미분방법을 채용한다.

3.2 Combining with Complex Variable Method

3.2.1 Review of complex variable method

유한차분법 또는 준해석적 방법과 비교해서

복소변수법에 의한 미분은 증분율이 민감도 결과에 주는 영향이 거의 없다. 식 (11)은 임의의 x_0 에서 차분법에 의해 함수의 미분식을 보여주고 있다. 이 경우에는 설계변수의 증분량 h 에 따라 round-off 오차 또는 truncation 오차가 발생하므로 민감도 결과가 크게 달라질 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_0)}{\partial b_i} &= \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \\ &= f^{(1)}(x) + h \frac{f^{(2)}(x)}{2!} + h^2 \frac{f^{(3)}(x)}{3!} + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, 식 (11)의 truncation 오차는 다음과 같다.

$$O(h) = - \left(h \frac{f^{(2)}(x)}{2!} + h^2 \frac{f^{(3)}(x)}{3!} + \dots \right)$$

설계변수 증분량 h 대신 복소 설계변수인 ih 를 사용하면 subtractive cancellation 오차를 제거함으로써 정확한 민감도 결과를 얻을 수 있다.

식 (12)는 복소변수 ih 에 의한 급수전개식을 보여주고 있다.

$$\begin{aligned} f(x+ih) &= f(x) + ihf^{(1)}(x) + h^2 \frac{f^{(2)}(x)}{2!} - ih^3 \frac{f^{(3)}(x)}{3!} + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

식 (13)과 같이, 식 (12)의 허수부를 증분량 h 로 나누면 정확한 1차 미분식이 계산된다. 구체적인 수학적 논의와 전통적인 민감도 방법과의 비교는 참고문헌 (14,15)에 자세히 나와 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial h} &= \frac{\text{Im}[f(x+ih)]}{h} \\ &= \left[f^{(1)}(x) - h^2 \frac{f^{(3)}(x)}{3!} + h^4 \frac{f^{(5)}(x)}{5!} - \dots \right] + O(h^2) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{여기서, } O(h^2) = h^2 \frac{f^{(3)}(x)}{3!} - h^4 \frac{f^{(5)}(x)}{5!} + \dots$$

3.2.2 Adjoint Variable Method using CVM

보조변수법은 구속조건보다 설계변수가 더 많은 최적화 문제에 적합한 방법이다. 특히, 다중하중 조건에서는 보조변수법이 보다 효율적인 방법이므로 민감도 계산에서 폭넓게 사용되어 왔다. 그러나, 보조변수법에서 해석적인 미분에 의한 민감도 수행은 상당히 번거로운 일이며 유한요소 형태에 따라 해석적 미분을 수행하는 것은 쉽지 않은 일이다. 만약 수치적인 방법으로 정확한 미분이 가능하다면 매우 효율적인 방법일 것이며, 계산시간 측면에서도 매우 유리하다고 할 수 있다. 본 연구에서는 보조 변수법에서 복소변수를 이용하여 수치 미분을 수행한다. Mindlin 요소에서 복소변수를 사용한 요소단위 강성행렬의 미분이 식 (14)에 주어져 있다. v_i 는 설계변수를 의미한다.

$$\frac{d[\mathbf{K}]_e}{dv_i} = \frac{d\left(\int_A [\mathbf{B}_i]^T [\mathbf{D}_i] [\mathbf{B}_i] J ds dt\right)}{dv_i} + \frac{d\left(\int_A [\mathbf{B}_B]^T [\mathbf{D}_B] [\mathbf{B}_B] J ds dt\right)}{dv_i} + \frac{d\left(\int_A [\mathbf{B}_S]^T [\mathbf{D}_S] [\mathbf{B}_S] J ds dt\right)}{dv_i} \quad (14)$$

식 (14.a)는 in-plane part에 대한 미분으로, 식 (15)에 각 항에 대한 전개과정을 나타내었다.

$$\frac{d\left(\int_A [\mathbf{B}_i]^T [\mathbf{D}_i] [\mathbf{B}_i] J ds dt\right)}{dv_i} = \left(\int_A \frac{d[\mathbf{B}_i]^T}{dv_i} [\mathbf{D}_i] [\mathbf{B}_i] J ds dt\right) + \left(\int_A [\mathbf{B}_i]^T [\mathbf{D}_i] \frac{d[\mathbf{B}_i]}{dv_i} J ds dt\right) + \left(\int_A [\mathbf{B}_i]^T [\mathbf{D}_i] [\mathbf{B}_i] \frac{dJ}{dv_i} ds dt\right) \quad (15)$$

식 (15)에서 $d[\mathbf{B}_i]/dv_i$, dJ/dv_i 는 설계변수 증분량 h 와 3.2.1절의 이론을 토대로 식 (16)과 같이 구해진다. 복소변수 $x+ih$ 에 의해 계산된 $[\mathbf{B}_i]$ 의 허수부를 증분량 h 로 나누어 $d[\mathbf{B}_i]/dv_i$ 가 구해지고, 자코비언의 미분 dJ/dv_i 도 동일한 방법으로 구해진다.

$$\begin{aligned} d[\mathbf{B}_i]/dv_i &= \text{Imag}\left([\mathbf{B}_i(x+ih)]\right)/h \\ dJ/dv_i &= \text{Imag}\left[J(x+ih)\right]/h \end{aligned} \quad (16)$$

식 (14.b)와 (14.c)의 bending part와 shear part도 동일한 방법으로 복소변수를 도입하여 미분식을 계산하며, 이와 관련식은 식 (17)과 식 (18)에 나타내었다.

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\int_A [\mathbf{B}_B]^T [\mathbf{D}_B] [\mathbf{B}_B] J ds dt\right)}{dv_i} &= \int_A \left(\frac{d[\mathbf{B}_B]^T}{dv_i} [\mathbf{D}_B] [\mathbf{B}_B] + [\mathbf{B}_B]^T [\mathbf{D}_B] \frac{d[\mathbf{B}_B]}{dv_i}\right) J ds dt \\ &+ \int_A [\mathbf{B}_B]^T [\mathbf{D}_B] [\mathbf{B}_B] \frac{dJ}{dv_i} ds dt \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\int_A [\mathbf{B}_S]^T [\mathbf{D}_S] [\mathbf{B}_S] J ds dt\right)}{dv_i} &= \int_A \left(\frac{d[\mathbf{B}_S]^T}{dv_i} [\mathbf{D}_S] [\mathbf{B}_S] + [\mathbf{B}_S]^T [\mathbf{D}_S] \frac{d[\mathbf{B}_S]}{dv_i}\right) J ds dt \\ &+ \left(\int_A [\mathbf{B}_S]^T [\mathbf{D}_S] [\mathbf{B}_S] \frac{dJ}{dv_i} ds dt\right) \end{aligned} \quad (18)$$

4. 수치 예제

본 연구에서 제시한 방법의 효과와 신뢰성을 증명할 수 있는 몇 가지 수치예제를 보이고자 한다. 수치예제는 굽힘하중을 받는 Cantilever 보와 인장력을 받는 strip 에 대해 수행하였으며, 각 예제의 결과에서 GDM, TSAM, 제안한 방법(ACVM)의 민감도 해석 결과를 비교하였다.

4.1 Cantilever Beam

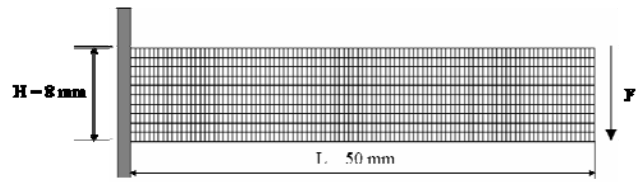


Fig. 1 Configuration of clamped beam and transverse force ($F = 1\text{N/mm}$, $E = 2.1 \times 10^5\text{N}$, $\nu = 0.3$)

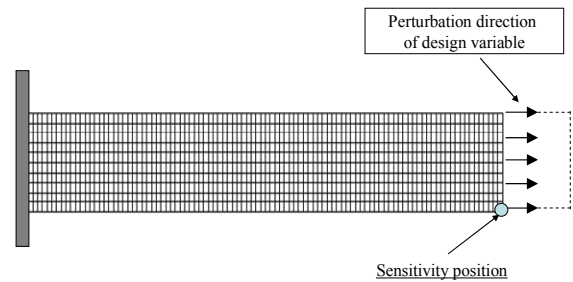


Fig. 2 Sensitivity position and the design direction by perturbation of design variable

Fig.1 은 끝단에 전단력이 가해지는 cantilever 빔의 형상을 보여준다. 해석을 위한 물성치와 하중조건은 Fig.1 에 주어져 있다. Fig.2 에 나타낸 바와 같이 설계변수는 길이방향으로 설정하였고, 설계변수에 대한 변위 민감도는 빔 끝단에서 계산하였다. Cantilever 빔 끝단에서의 변위 민감도는 해석적으로 계산될 수 있는데, 이를 식 (19)에 나타내었다.

$$\frac{d\{\mathbf{u}\}_y}{dx} \Big|_{x=tip}^{exact} = 12 \frac{FL^2}{EH^3} = \frac{12 \cdot 8 \cdot 50^2}{2.1 \times 10^5 \times 8^3} = 2.232 \times 10^{-3} \quad (19)$$

민감도 결과는 Table 1 에 주어져 있다. TSAM 과 GDM 은 각 증분값에서 안정적인 수렴결과를 보이지 않고 있다. 두 방법 모두 안정적인 수렴결과를 보이는 증분영역은 $10^{-5} \sim 10^{-8}$ 으로 파악되었으며, 이외의 범위에서는 민감도 결과가 상당히 불규칙하게 나타나고 있다. 특히, 증분을 범위가 10^{-9} 보다 작아지게 되면 민감도 결과의 발산이 확연하게 나타나고 있다. 반면, ACVM 은 증분값과 무관하게 GDM 과 TSAM 의 수렴성이 상당히 떨어졌던 증분을 $10^{-1} \sim 10^{-2}$, 10^{-9} 이하의 범위에서도 정확한 민감도 결과를 제공하고 있으며 그 수렴경향도 매우 안정적임을 확인할 수 있다.

Table 1. Comparison of displacement sensitivities in the cantilever beam ($\times 10^{-3}$)

log pert	GDM	TSAM	ACVM
-1	2.463	2.829	2.205
-2	2.256	1.683	2.234
-3	2.236	2.179	2.234
-4	2.234	2.229	2.234
-5	2.234	2.234	2.234
-6	2.234	2.234	2.234
-7	2.234	2.234	2.234
-8	2.236	2.236	2.234
-9	2.247	2.249	2.234
-10	2.431	2.400	2.234
-11	3.413	2.732	2.234
-12	11.30	17.49	2.234
-13	255.3	195.9	2.234
-14	429.2	745.0	2.234
-15	158.3	597.3	2.234

4.2 Strip in Tension Problem

Fig.3 은 strip 의 끝단에서 인장력이 작용하는 문제이다. 해석에 사용된 물성치와 끝단에서의 u 방

향으로의 엄밀해는 식(20)과 같으며, 민감도 계산을 위한 설계변수는 Fig.4 에 나타내었다.

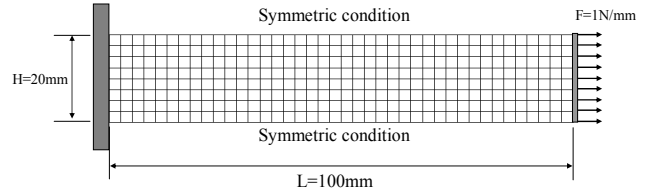


Fig. 3 Configuration of the strip bar under tension

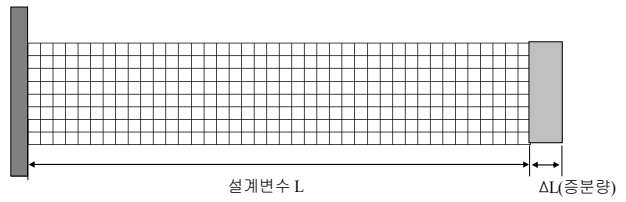


Fig.4 Design variable of the strip bar

$$\frac{du_{x,exact}}{dL} \Big|_{x=L} = \frac{F(1-\nu^2)}{Et} = 4.55 \times 10^{-6}$$

$$F = 1N/mm, L = 100mm, t = 1mm \quad (20)$$

$$E = 2 \times 10^5 N/mm, \nu = 0.3, H = 20mm$$

Table 2 에서 인장력이 작용하는 문제에서는 GDM 과 TSAM 을 사용한 해석 방법이 앞의 수치예제와 달리 증분값이 큰 경우에도 비교적 좋은 결과를 제공하고 있으며, 10^{-11} 의 작은 증분값에서도 좋은 수렴결과를 보여주고 있으나, 그 이하의 증분값에서는 발산경향이 확연함을 알 수 있다.

그러나, ACVM 은 전체 증분범위에서 매우 안정적인 민감도 결과를 제공하고 있으며, 이는 ACVM 이 문제 형태와는 무관하게 매우 강건한 방법임을 보여주는 결과라 할 수 있다. 2 장에서 설명하였던 강제모드 분리방법은 인장력이 주로 작용하는 문제에서는 증분율의 개선효과가 크지 않다. 이것은 강제모드의 영향이 크지 않기 때문이며, 이와 관련한 결과는 참고문헌 (19)에 잘 나와 있다.

Table 2. Comparison of displacement sensitivities in the strip bar ($\times 10^{-5}$)

log pert	GDM	TSAM	ACVM
-1	-0.4550	-0.5056	-0.4550
-2	-0.4550	-0.4596	-0.4550
-3	-0.4550	-0.4555	-0.4550
-4	-0.4550	-0.4550	-0.4550
-5	-0.4550	-0.4550	-0.4550
-6	-0.4550	-0.4550	-0.4550
-7	-0.4550	-0.4550	-0.4550

-8	-0.4550	-0.4550	-0.4550
-9	-0.4550	-0.4550	-0.4550
-10	-0.4547	-0.4550	-0.4550
-11	-0.4540	-0.4558	-0.4550
-12	-0.3976	-0.4220	-0.4550
-13	-0.2158	-0.3111	-0.4550
-14	2.0925	-2.7253	-0.4550
-15	24.2319	-1.0484	-0.4550

5. 결 론

기존의 수치미분은 증분값에 따라 민감도 결과가 불규칙하고, 문제 형태에 따라서도 민감도 계산 성능이 일정하지 않은 문제점이 있었다.

복소변수법은 증분율에 거의 영향을 받지 않기 때문에 매우 안정적인 민감도 수렴결과를 제공할 수 있으며, 보조변수법은 설계변수가 증가하게 되면 기존의 direct 방법보다 효율적인 방법이다.

이 점에 착안하여 본 연구에서는 보조변수법과 복소변수의 연동에 의해 강성행렬에 대한 미분을 수행함으로써 해석적인 미분보다 간편하면서 계산결과도 정확한 민감도 해석기법을 제안하였다. 엄밀해가 주어진 수치예제를 통해서, 제안된 민감도 계산방법은 증분값과 무관하게 안정적인 민감도 결과를 얻을 수 있고, 유한요소와의 연동을 통한 프로그램화가 가능함을 확인할 수 있었다.

참고 문헌

- (1) Pederson P, Cheng G, Rasmussen J., 1989, "On accuracy problems of semi-analytical sensitivity analysis," *Mechanics of Structures and Machines*, Vol. 17, No.5, pp.373~384.
- (2) Cheng G, Gu Y, Zhou Y., 1989, "Accuracy of semi-analytical sensitivity analysis," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 6, pp.113~128.
- (3) Olhoff N, Rasmussen J., 1991, "Study of inaccuracy in semi-analytical analysis-a model problem," *Structural Optimization*, Vol.3, pp.203~213.
- (4) Barthelemy B, Chon CT, Haftka RT., 1988, "Accuracy problems associated with semi-analytical derivatives of static response," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol.4, pp.249~265.
- (5) Van Keulen F, De Boer H., 1998, "Rigorous improvement of semi-analytical design sensitivities by exact differentiation of rigid body motions," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.42, pp.71~91.
- (6) De Boer H, Van Keulen F., 2000, "Refined semi-analytical design sensitivities," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, pp.6961~6980.
- (7) Olhoff N, Rasmussen J, Lund E., 1993, "A method of

'exact' numerical differentiation for error elimination in finite element-based semi-analytical shape sensitivity analysis," *Mechanics of Structures and Machines*, Vol.21, pp.1~66.

- (8) Suha Oral., 2000, "A mindlin plate finite element with semi-analytical shape design sensitivities," *Computers and Structures*, Vol. 78, pp.467~472.
- (9) M. Cho, H. Kim, 2006, "Improved semi-analytic sensitivity analysis combined with iterative scheme in the framework of adjoint variable method," *Computers and Structures*, Vol. 84, pp.1827~1840.
- (10) J.N. Lyness, C.B. Moler, 1967, "Numerical differentiation of analytic functions," *SIAM, J. Numer. Anal.*, Vol. 4, pp.202~210.
- (11) J.N. Lyness, 1967, "Numerical algorithms based on the theory of complex variables," *Proc. ACM 22nd Nat. Conf. Thompson Book Co. Washington DC*, pp.124~134.
- (12) W. Squire, G. Trapp, 1998, "Using complex variables to estimate derivatives of real functions," *SIAM Rev.*, Vol.40, No.1, pp.110~112.
- (13) J.R.R.A. Martins, I.M. Kroo, J.J. Alonso, 2000, "An automated method for sensitivity analysis using complex variables," *AIAA Paper 2000-0689*.
- (14) J.R.R.A. Martins, P. Sturdza, J.J. Alonso, 2001, "The connection between the complex-step derivative approximation and algorithmic differentiation," *AIAA Paper 2001-0921*.
- (15) W.K. Anderson, J.C. Newman, D.L. Whitfield, E.J. Nielsen, 1999, "Sensitivity analysis for the navier-stokes equation on unstructured meshes using complex variables," *AIAA Paper 99-3294*.
- (16) J.C. Newman, W.K. Anderson, D.L. Whitfield, 1998, "Multidisciplinary sensitivity derivatives using complex variables," *MSSU-COE-ERC-98-08*.
- (17) L.I. Cervino, T.R. Bewley, 2003, "On the extension of the complex-step derivative technique to pseudospectral algorithms," *Journal of Computational Physics*, Vol.187, pp.544~549.
- (18) C.O.E. Burg, J.C. Newman III, 2003, "Computationally efficient, numerically exact design space derivatives via the complex Taylor's series expansion method," *Computers and Fluids*, Vol.32, pp. 373~383.
- (19) M.Cho, H.Kim, 2005, "A refined semi-analytic design sensitivity based on mode decomposition and Neumann series," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.62, pp.19~49.