

WAF기법을 이용한 2차원 유한체적모형의 개발

Development of a 2D Numerical Model Using the WAF Method

한건연*, 김병현**, 김태형***, 이동구****

Kun Yeun Han, Byung Hyun Kim, Tae Hyung Kim, Dong Gu Lee

요 지

지금까지의 대부분의 2차원 수리해석 모형은 상류와 사류가 혼재된 불연속적인 천이류 흐름을 해석하기에 계산의 정확도 및 현실성에서 많은 문제를 보이고 있으며, 특히 계산과정에서 나타날 수 있는 마른하도의 처리에 있어서 많은 어려움을 겪고 있다. 본 연구의 목적은 유한체적기법을 사용하여 상류와 사류가 혼재하는 불연속적인 하천 천이류를 안정적으로 해석하기 위해 개발된 고정확도 수치모형의 자연하도 적용에 있으며, 또한 마른 하도로 전파되는 흐름 모의 및 계산과정에서 나타날 수 있는 마른하도 처리의 어려움을 해결함으로써 모형의 정확도와 안정성을 검증하여 실제 하천에서의 모형 적용성을 검토함에 있다. 이를 위해 본 연구에서는 흐름의 전파양상을 정확하게 반영할 수 있는 상류이송기법인 Godunov 기법과 관심격자의 좌우 격자 정보를 모두 사용하는 대표적 중앙차분기법인 Beam-Warming 기법의 장점을 모두 반영한 가중평균흐름률 (Weighted Average Flux) 기법을 사용하여 사각격자망의 구성을 통해 자연하도에 적용시킬 수 있는 2차원 유한체적모형을 개발하고자 하였고, 개발된 모형의 안정성, 정확도, 적용성을 검증하기 위해 직사각형 수로, 큰 사행비를 가진 만곡수로에 적용하고, 그 결과를 수리모형 실험결과와 비교, 분석하였다.

핵심용어 : 유한체적기법, FVM, 천이류, WAF기법

1. 서 론

제방이나 댐의 붕괴 및 댐의 홍수조절을 위한 갑작스런 수문의 조작시의 하천흐름은 평상시 강우-유출에 의해서 발생하는 하천 흐름과는 급격히 변화된 다른 형태를 보이게 된다. 즉, 매우 빠른 속도로 전파되는 불연속적인 충격파가 형성되면서 상류와 사류가 혼재된 천이류가 발생하게 된다. 지금까지의 수치모형은 불연속적인 천이류 해석시 계산의 정확도 면에서 문제를 보이고 있으며, 기법의 안정성 면에 있어서도 불연속적인 해의 구간에서 수치진동이 발생하는 등 비현실적인 계산결과를 보이고 있다. 또한, 지형이 복잡한 하도, 홍수터 및 연안지역에서의 흐름은 흐름영역의 불규칙한 경계 때문에 1차원 모형을 통해 쉽게 해결 될 수 없고, 2차원 모형도 복잡한 지형을 안정적으로 처리할 알고리즘이 확립되지 못한다면 정확한 결과를 줄 수 없다. 최근에 유한차분기법 또는 유한요소기법에 근거하여 천이류를 해석하고, 하천과 범람원 사이의 2차원 흐름교차를 해석하기 위하여 많은 연구가 진행되고 있으나, 정확도가 떨어지거나 유동의 변화가 큰 지점에서 조밀한 격자의 처리에 있어서의 수렴성의 문제 및 계산과정에서 발생할 수 있는 마른하도의 처리 문제에 있어서 취약점을 드러내고 있다. 수치모형의 정확성, 보존성, 안정성은 수치기법의 중요한 요소이고 이 요소들을 상호 조화시키는 방법뿐만 아니라 정량화하고 이해할 수 있도록 노력하는데 있어 신중히 고려되어야 한다. 따라서 댐 및 제방 붕괴 등의 경우에 나타나는 불연속적인 흐름을 모의할 수 있으며, 범람 홍수가 제 내지 하도로 전파되는 경우, 지형이 복잡한 경우의 해석에 있어서도 2차원 격자로 계산할 수 있고 Shock-Capturing 속성을 제공할 수 있는 안정적이고 강력한 계산 알고리즘을 갖는 수치모형의 개발이 필요하겠다.

* 정회원 · 경북대학교 토목공학과 교수 · E-mail : kshanj@knu.ac.kr

** 정회원 · 경북대학교 토목공학과 박사수료 · E-mail : hydrobk@naver.com

*** 정회원 · 경북대학교 토목공학과 석사수료 · E-mail : sunz3515@hotmail.com

**** 정회원 · 경북대학교 토목공학과 박사수료 · E-mail : ldg@gb.go..kr

2. 이론적 배경

2.1 지배방정식

보존변수로 이루어진 2차원 천수방정식을 벡터형태로 나타내면 식(1)과 같다.

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = S(U) \quad (1)$$

여기서 U 는 보존변수들로 이루어진 물리적 벡터이고, $F(U), G(U)$ 는 x, y 방향의 흐름틀이며, $S(U)$ 는 다양한 물리적 지형적 효과를 반영하는 생성/소멸 벡터항으로 식 (2)와 같다.

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}, F(U) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + 1/2(gh^2) \\ huv \end{bmatrix}, G(U) = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + 1/2(gh^2) \end{bmatrix}, S(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$u(x,y,t)$ 와 $v(x,y,t)$ 는 각각 x, y 방향의 유속, g 는 중력가속도이며, $h(x,y,t)$ 는 자유 수면 $s(x,y,t)$ 와 하상고 $b(x,y)$ 로부터 계산되어진 수심이다.

여기서 S_0 는 하상경사로 각각 $S_{0x} = -\partial z_b / \partial x, S_{0y} = -\partial z_b / \partial y$ 인 하상고(z)의 x 방향, y 방향 변화량으로 계산되고, S_f 는 마찰 경사를 나타내는 것으로 본 모형에서는 Manning의 조도계수 n 을 사용하여 식 (3)와 같이 계산된다(Molls 등, 1998).

$$S_{fx} = n^2 u \sqrt{u^2 + v^2} h^{-4/3}, \quad S_{fy} = n^2 v \sqrt{u^2 + v^2} h^{-4/3} \quad (3)$$

2.2 유한체적기법에 근거한 지배방정식

유한체적기법은 사각형 혹은 삼각형 격자의 조합으로 구성된 다각형 격자 내에서 격자의 경계를 통해 출입하는 흐름틀과 이로 인해 격자내부에서 변화해야 하는 흐름변수들 간의 보존방정식들로 이루어지며, 전체 계산영역에 대한 방정식들의 조합이 흐름을 지배하는 미분방정식들을 한번 근사적으로 체적 적분한 것이 된다. 식(1)과 같은 생성항이 추가된 보존법칙의 미분형태를 유한체적 V 에 대해 적분하면 식(5)와 같은 상미분 방정식이 된다.

$$\frac{d}{dt} \int_V U dV + \int_{\Omega} H \cdot n d\Omega = \int_V S dV \quad (4)$$

여기서 좌변의 두 번째 항의 Ω 는 유한체적의 표면이며, dV 와 $d\Omega$ 는 각각 미소 체적과 미소 표면으로 정의한다. H 는 유한체적의 표면 Ω 의 경계면에 수직방향 흐름틀 벡터 F, G 의 텐서(tensor)로 (F, G) 로 정의되며, n 은 경계면 Ω 바깥 방향으로의 단위법선벡터이다.

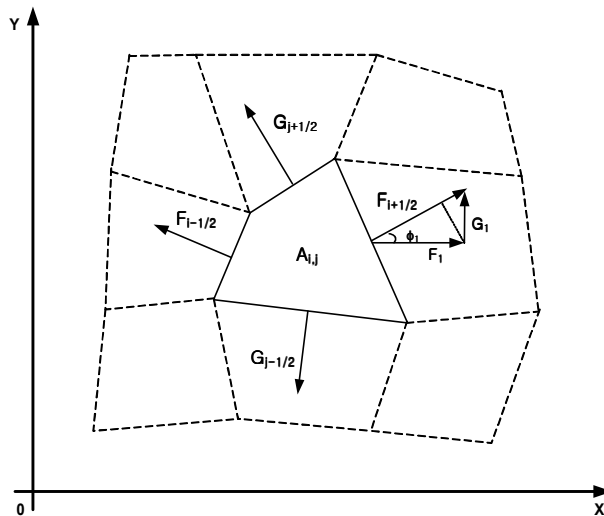


그림 1. 유한체적 Ω 의 기하학적 형상

만약 임의의 유한체적 i, j 격자에서, 흐름변수 벡터 $U_{i,j}$ 와 생성항의 벡터 $S_{i,j}$ 가 $\overline{U}_{i,j}$ 와 $\overline{S}_{i,j}$ 로 일정하다고 가정하고, 두 번째 적분 항은 Green 정리에 의해 이중적분이 선적분으로 변환하면 다음과 같은 식으로 이산화시킬 수 있다.

$$\int_{\Omega} (F; G) \cdot n d\Omega = \sum_{k=1}^m (F_k \cos \phi_k + G_k \sin \phi_k) L_k \quad (5)$$

여기서 m 은 유한체적의 경계면 개수로 사각형 격자일 경우 $m=4$ 이고, L_k 는 유한체적의 k 번째 경계면 길이이며, ϕ_k 는 X 축과 k 번째 경계면의 법선벡터 n_k 사이의 반시계방향 각을 나타낸다. 식 (5)의 양변을 유한체적의 면적 $A_{i,j}$ 로 나누고 시간 미분항을 이산화하여, 식 (6)으로 완전히 이산화될 수 있다.

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F_{i+\frac{1}{2},j} - F_{i-\frac{1}{2},j} \right] - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[G_{i+\frac{1}{2},j} - G_{i-\frac{1}{2},j} \right] + \Delta t \overline{S}_{i,j} \quad (6)$$

식 (6)에서 보이는 바와 같이, 시간경과 후의 흐름변수 $U_{i,j}^{n+1}$ 는 단지 유한체적의 경계면을 수직으로 가로 지르는 흐름률 F 와 G 에 의존하고 있으므로, 인접한 두 격자의 상태에 따른 흐름률이 계산되어야 하는 Riemann의 문제가 발생한다.

2.3 흐름률의 계산

지배방정식이 이산화 되고 나면 유한체적이 불연속적인 초기값을 가짐으로서 Riemann 문제가 발생하게 된다. 본 연구에서는 HLL 근사해법으로 Riemann 해를 구하였으며, 유한체적의 경계면을 통해 전달되는 흐름율의 계산에는 WAF 기법을 사용하였다. WAF 기법은 인접한 두 격자의 정보를 모두 사용하여 가중 평균된 값을 두 격자 사이의 흐름율로 산정하는 시간·공간적으로 2차의 정확도를 가지는 기법이다.

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{WAF} = \frac{1}{t_2 - t_1} \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(U(x, t)) dx dt \quad (7)$$

일반적으로 2차 이상의 고정확도의 수치기법에서는 파의 불연속적인 면에서 수치진동이 발생하므로, 이러한 불연속면에서는 고정확도의 기법보다 불연속성을 잘 모의할 수 있는 고힘상도 수치기법이 유리하다. 이는 임의의 시간에서 총 변동량이 시간과 함께 증가하지 않는다는 TVD기법으로 만족되며, 제한함수를 도입하는 것으로 만족시킬 수 있다.

$$TV(u^n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |u_{i+1}^n - u_i^n|, \quad TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \quad (8)$$

3. 모형의 적용

3.1 실험하도에의 적용

2차원 모의는 사다리꼴 단면을 가지고 하도 내에서의 마른하도가 발생가능한 가상의 하도에 대해 수치해석을 실시하였다. 하도의 형상은 길이 300m. 폭 40m 이며, 상호 변화하는 사각형과 사다리꼴 단면을 가진다. 즉, 상류부는 사각형 단면에서 사다리꼴 단면으로, 하류부는 사다리꼴 단면에서 사각형 단면으로 변화하며, 중간부에 100m 구간의 사다리꼴 단면을 구성하였다.

상류단 경계조건은 x 및 y 방향의 $80 m^3/sec$ 유량의 경계조건이 주어졌고 하류단 경계조건은 수위경계조건이 주어졌다. 모의에 사용된 요소 수는 1440개이고, 초기수위는 4.0m, 초기 유속은 '0'인 정적 계산 시작 조건으로 하였으며, 마른하도의 발생이 예상되는 하도 외측의 요소는 조밀하게 구성하였다. 그림 2는 모의 후 1시간에서의 유속 벡터도와 등수심도를 나타내고 있다. 그림 3에서 보는 바와 같이 대상하도가 사다리꼴 단면으로 이루어져있기 때문에 유속의 분포는 하도 중심부에서 빠르게 나타나고 있으며 하도 중심부 부근의 외측부에서는 마른 조건을 인한 유속분포를 적절하게 나타내고 있음을 확인 할 수 있었다.

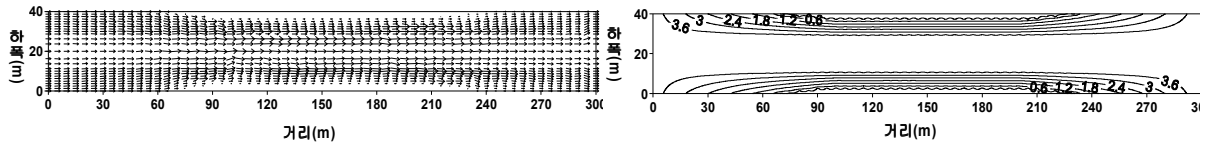


그림 2. 사다리꼴 단면수로에 대한 유속 벡터도 및 등수심도

3.2 실제유역에 대한 모형의 적용

자연하도에서의 실제흐름에 대한 2차원 수치해석을 실시하기 위해 잠실수중보에서 왕속천 상류까지 약 15.8km의 만곡부를 형성하는 한강분류구간을 적용구간으로 하였다. 대상구간을 선정후 GIS를 이용하여 입력자료의 구축을 위한 수치지도를 작성하고 실제 TM좌표계에 의한 수치지도에 의해 구축된 2차원 격자를 구성하였다. 2차원 유한체적기법을 적용하기 위한 격자는 그림3과 같이 등간격의 사각형 격자로 구성하였다.

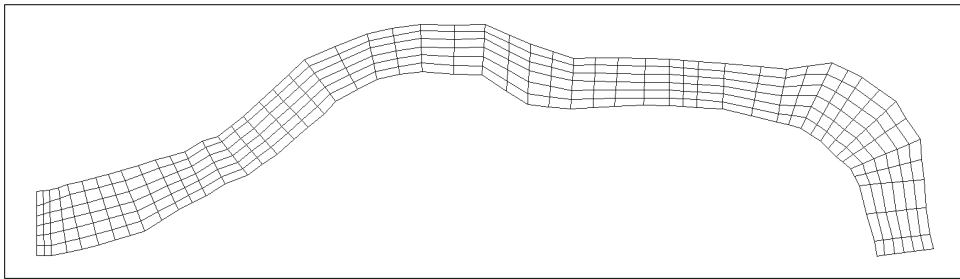


그림 3. 2차원 유한체적격자의 구성

모의에 사용된 요소 수는 312개, Manning의 조도계수는 0.035, 초기수위는 잠실 수중보의 높이를 고려한 6.2m로 하였고, 초기 유속은 '0'인 정적 계산 시작 조건으로 하였다. 해석구간내의 하도는 홍수터가 존재하는 복합단면이나 현재의 계산에서는 주수로만을 대상으로 하였고, 상류단 경계 조건은 x 및 y 방향의 유량의 경계조건이 주어졌고 하류단 경계조건은 수위경계 조건이 주어졌다. 그림 4는 모의 후 20시간에서의 유속 분포도와 등수심도를 나타내고 있다. 그림 4에서 보는 바와 같이 본 연구에서 개발된 모형을 이용한 하도에서의 흐름에 대한 모의수행은 한강유역의 만곡부를 크게 형성하고 있는 여러 곳에서의 유속분포를 적절하게 나타내고 있음을 확인 할 수 있었다.

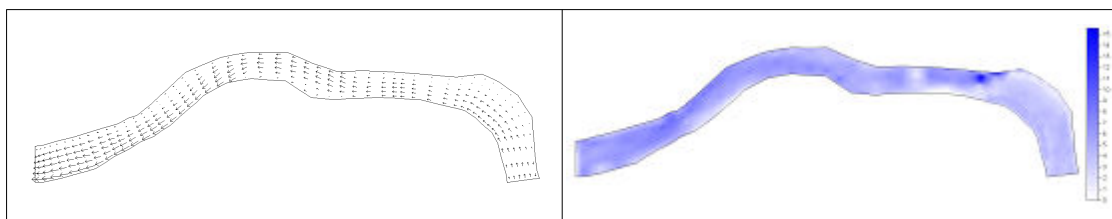


그림 4. 대상유역에 대한 유속분포도 및 등수심도

4. 결 론

본 연구모형은 수치해석에 있어서 안정되고 정확한 모의가 가능하며, 하천에서 발생할 수 있는 다양한 조건을 모의할 수 있고 특히 불연속적인 흐름의 해석에 매우 유용하며, 안정적인 해를 제공한다. 또한 흐름을 이용한 수치기법은 격자의 경계면에서 직각방향의 흐름률만을 평가함으로써 수치계산이 가능하기 때문에,

비구조적 격자의 사용이 매우 간편하여 불규칙적인 제내지 형상의 반영이 용이하므로, 홍수범람 모의 등에 적절한 수치해석기법으로 판단되며 향후 실제하천의 2차원 해석 및 범람모의에 효과적으로 적용될 수 있을 것으로 판단된다. 그러나 양해법의 사용으로 계산거리의 간격이나 계산시간의 간격, 격자망의 구성 등에 엄격한 제한이 필요하다. 향후 주어진 문제에 따라서 전체계산시간이 길어지는 단점을 보완하고, 지류의 영향이나 홍수터로의 범람 상황등을 더 잘 반영할 수 있도록 삼각형격자 혹은 삼각형 및 사각형 혼합격자를 이용하여 모의가 가능할 수 있는 모형의 확장이 필요할 것으로 판단된다.

감 사 의 글

본 연구는 과학기술부가 출연하고 수자원의 지속적 확보기술개발사업단에서 위탁 시행한 21세기 프론티어 연구개발사업중 “RAM2 모형의 확장개발 및 상용화”(과제번호2-3-3)에 의해 수행되었습니다.

참 고 문 헌

1. 이길성, 이성태 (1998). “충격파 모의를 위한 2차원 유한체적 비정상 흐름모형”, 한국수자원학회 논문집, 제31권 3호, pp. 279-290
2. 김지성 (2007). “Riemann 해법을 이용한 하천수리해석 모형”, 박사학위논문, 경북대학교
3. Leveque, R.J. (1997). Wave Propagation Algorithms for Multidimensional Hyperbolic Systems, Journal of Computational Physics, Vol 131, pp.327-353.
4. Toro, E.F. (1999). Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics, Springer.
5. Toro, E.F. (2001). Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows, John Wiley & Sons.