

# 개수로흐름 해석에서 운동량방정식의 특성

## Characteristics of the Momentum Equation in Open Channel Flow

전민우\* / 조용수\*\*

Min Woo Jeon, Yong Soo Cho

### Abstract

The relative magnitudes of the individual terms of the momentum equation are analyzed and compared by the analytical methods in open channel flow. The temporal variations of each term(local acceleration term, convective acceleration term, pressure force term, gravity force term, and friction force term) are analyzed for the influence factors to runoff expressed by the parameters of the momentum equation, stream slopes and roughness coefficients. The magnitudes of each term vary with the channel characteristics, especially when the roughness coefficients are dominant or for the mild stream slopes the pressure term can not be negligible. As a result of the characteristics of momentum equation in open channel flow, the acceleration terms are very small compared with the other terms. The magnitudes of local acceleration and convective acceleration offsets each other. The peak time of each term except the gravity term coincides with inflection point of the hydrograph rising limb each other.

**Key words:** momentum equation, relative magnitude, streams lope, roughness coefficient

## 1. 서 론

운동량방정식은 시간과 공간에 따르는 운동량의 변화를 나타내는 국지가속도항과 대류가속도항 그리고 거리에 따르는 압력변화를 나타내는 압력항 그리고 마찰항과 중력항으로 구성된다. 부정부등류 하천흐름을 해석하기 위해서는 주어진 조건에 따라서 운동량방정식에서 각항의 상대적인 크기를 분석하여 지배적인 항을 선정해야 한다. 하천의 흐름에 영향을 주는 주된 수리.수문지형인자로서 조도계수와 하천경사 그리고 유입수문곡선을 들수 있으며, 이와 같은 인자들이 운동량방정식에 미치는 영향을 분석하여 어떤 경우에 어떤 항을 무시할수 있는가를 연구하고자 한다. 하천의 조도계수는 흐름에 영향을 주는 주된 인자로서 조도계수의 변화에 의한 운동량방정식 각항의 변화양상을 해석적 방법으로 비교.연구하였다. 본 연구에서는 Saint-Venant방정식을 이루는 운동량방정식에서 각항의 상대적인 크기를 비교 분석하여 어떤 경우에 어떤 항을 무시할수 있는가를 연구하였다. 영향인자로서는 하천경사와 조도계수에 대하여 하도구간별, 시간별로 분석하였으며, 유출해석을 위한 수치해법으로는 Preissmann기법에 의하여 홍수추적을 실시하였다.

\* 정회원 · 충북대학교 토목공학과 교수 · E-mail : minwoo@chungbuk.ac.kr  
\*\* 정회원 · 충북대학교 토목공학과 강사 · E-mail : yscho@chungbuk.ac.kr

## 2. 지배방정식 및 수치해법

1차원 개수로흐름의 지배방정식은 연속방정식과 운동량방정식으로 이루어진 Saint-Venant 방정식으로서 식 (1), (2)와 같다.

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{gh} \left( \frac{\partial q}{\partial t} \right) + \frac{1}{gh} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{h} \right) + \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{n^2 q^2}{h^{10/3}} - S = 0 \quad (2)$$

제 1항은 국지가속도항, 제 2항은 대류가속도항, 제 3항은 압력항, 제 4항은 마찰력항, 제 5항은 중력항이다. 개수로흐름의 지배방정식에 대한 유한차분법은 Preissmann의 음해법이 많이 사용되고 있으며, 지배방정식 (1)과 (2)에 차분식을 적용하고, 각 격자점의 미지변수들을 수심  $h$ 와 유량  $q$ 로 하여 연속방정식에 대한 차분식 (3)과 운동량방정식의 각항에 대한 차분식을 식 (4)~(7)과 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{(h_i^{k+1} + h_{i+1}^{k+1}) - (h_i^k + h_{i+1}^k)}{2 \Delta t} + \frac{\alpha}{\Delta x} (q_{i+1}^{k+1} - q_i^{k+1}) + \frac{1-\alpha}{\Delta x} (q_{i+1}^k - q_i^k) = 0 \quad (3)$$

$$\text{제 1항(국지가속도항)} : \frac{2}{g\alpha(h_i^{k+1} + h_{i+1}^{k+1}) + g(1-\alpha)(h_i^k + h_{i+1}^k)} \times \frac{q_i^{k+1} + q_{i+1}^{k+1} - q_i^k - q_{i+1}^k}{2 \Delta t} \quad (4)$$

$$\text{제 2항(대류가속도항)} : \frac{2}{g\alpha(h_i^{k+1} + h_{i+1}^{k+1}) + g(1-\alpha)(h_i^k + h_{i+1}^k)} \times \left\{ \frac{\alpha}{\Delta x} \left[ \frac{(q_{i+1}^{k+1})^2}{h_{i+1}^{k+1}} - \frac{(q_i^{k+1})^2}{h_i^{k+1}} \right] + \frac{(1-\alpha)}{\Delta x} \left[ \frac{(q_{i+1}^k)^2}{h_{i+1}^k} - \frac{(q_i^k)^2}{h_i^k} \right] \right\} \quad (5)$$

$$\text{제 3항(압력항)} : \frac{\alpha}{\Delta x} (h_{i+1}^{k+1} + h_i^{k+1}) + \left( \frac{1-\alpha}{\Delta x} \right) (h_{i+1}^k - h_i^k) \quad (6)$$

$$\text{제 4항(마찰력항)} : \frac{\alpha n^2}{2} \left[ \frac{(q_{i+1}^{k+1})^2}{(h_{i+1}^{k+1})^{10/3}} + \frac{(q_i^{k+1})^2}{(h_i^{k+1})^{10/3}} \right] + \frac{n^2}{2} (1-\alpha) \left[ \frac{(q_{i+1}^k)^2}{(h_{i+1}^k)^{10/3}} + \frac{(q_i^k)^2}{(h_i^k)^{10/3}} \right] \quad (7)$$

시간준위  $k$ 에서의 변수값들이 주어지면 차분식들은 결국  $(k+1)$ 시간 준위에서의  $h_i^{k+1}$ 과  $q_i^{k+1}$ 을 미지변수로 하는  $2N$ 개의 연립방정식이 구성되며, 운동량방정식의 차분식은  $h_i^{k+1}$ 과  $q_i^{k+1}$ 에 대한 비선형방정식이 되므로 Newton-Raphson의 반복해법에 의하여 해를 구할 수 있다. 상류단 경계조건으로서 식 (8)과 같은 Log-Pearson Type-III의 수문곡선을 사용하였고, 하류단 경계조건은 Manning공식을 사용하며 식 (9)와 같다.

$$q_t^k = q_b + (q_p - q_b) \left( \frac{t}{t_p} \right)^{t_p/(t_g - t_p)} \exp\left( \frac{t_p - t}{t_g - t_p} \right) \quad (8)$$

$$q_i^{k+1} = \frac{\sqrt{s}}{n} (h_i^{k+1})^{5/3} \quad (9)$$

### 3. 각항의 크기비교

운동량방정식의 각항의 상대적 크기를 분석하고 각항의 특성을 비교하였으며, 이를 위하여 하천경사  $s=0.001$ , 조도계수  $n=0.08$ , 추적구간거리  $\Delta x=1\text{km}$ ,  $\Delta t=1\text{hr}$ 을 사용하였다. 국지와 대류가속도항은 대체로 절대치의 크기가 비슷하여 국지가속도항의 양(+)의 값과 대류가속도항의 음(-)의 값이 서로 상쇄되는 경향을 보이고 있으며, 이를 그림 1에 나타내었다. 그림 2는 국지가속도항, 대류가속도항, 압력항, 마찰력항의 시간적 변화를 구간별로 나타내어 각항의 상대적인 크기를 비교한 것이며, 중력항은  $s=0.001$ 의 일정한 값이므로 그림에 나타내지 않았다. 국지가속도항은 유량의 시간적 변화를 나타내며, 유량의 시간적 변화율이 증가하는 상승부에서는 양(+)의 값을 보여주며, 변화율이 감소하는 하강부에서는 음(-)의 값을 나타내는 반면에 대류가속도항과 압력항은 그와 정반대의 현상이 생김을 알 수 있다.

국지가속도항, 대류가속도항, 압력항, 마찰력항의 침두치 발생시각은 수문곡선 상승부의 변곡점 발생시각과 일치하고 있으며, 최소값은 수문곡선 하강부의 변곡점 발생시각과 일치한다. 하류로 갈수록 이들의 침두치가 점차 커지고 있으며 침두치 발생시각도 점차 지연되고 있다. 하도거리에 따라 다소 차이는 있으나 평균적으로 각항의 침두치(절대치)가 운동량방정식에서 차지하는 비중은 국지가속도항 0.84%, 대류가속도항 0.83%, 압력항 11.14%, 마찰력항 49.16%, 중력항 38.04%이다. 국지가속도와 대류가속도항은 작은 비중을 차지하고, 마찰력항과 중력항이 크게 나타나며, 하류로 진행할수록 최대치와 최저치의 폭은 점차 커지고 있으며, 변화 양상은 거의 유사하다.

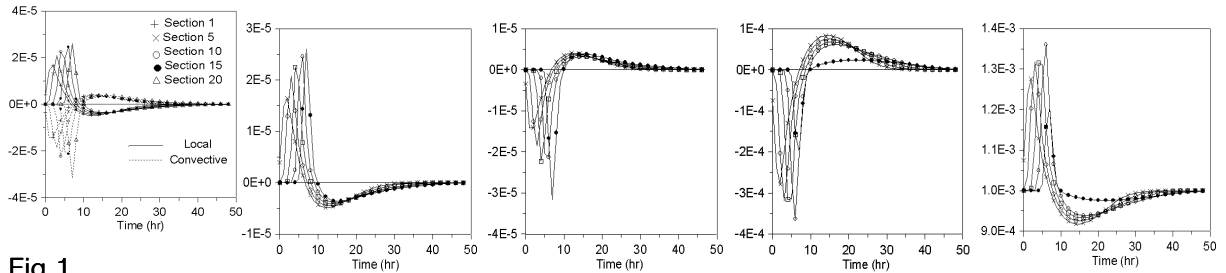


Fig. 1.

Comparison

a) Local

b) Convective

c) Pressure

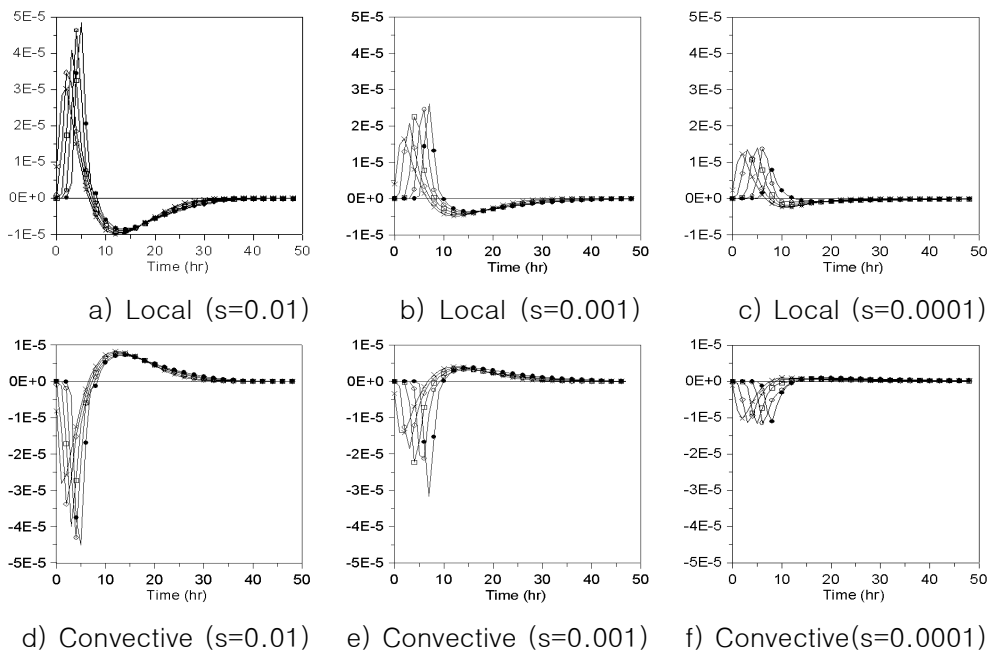
d) Friction

Fig. 2. Magnitudes of the various terms

(×;section 1, ◇;section 5, □;section 10, ○;section;15, ●;section

#### 4. 하천경사에 의한 영향

하천경사는 자연하천에서 흔히 접하는 0.01, 0.001, 0.0001의 3개 하천경사에 대하여 비교분석 하였으며, 이때 조도계수는 0.08로서 일정하게 두었다. 그 결과 국지가속도, 대류가속도, 압력항, 마찰력항에 대하여 그림 3에 나타내었으며, 중력항은 각각 0.01, 0.001, 0.0001로서 일정한 값이므로 그림에 나타내지 않았다. 모든항에서 하천경사가 완만할수록 침두값의 발생시각이 점차 길어 지고있다. 하천경사가 완만할수록 국지가속도와 대류가속도는 최고치와 최저치의 폭이 시간적으로 점차 작아져 영에 수렴하고 있으나, 반면에 압력항의 경우는 경사가 완만할수록 폭이 점차 커지고 있다. 마찰력항은 경사가 완만할수록 급격히 영에 수렴하고 있어, 압력항은 하천경사의 변화에 민감하게 반응함을 알수있으며, 시간에 따라서는 거의 변화가 없음을 알수있다.



a) Local (s=0.01)

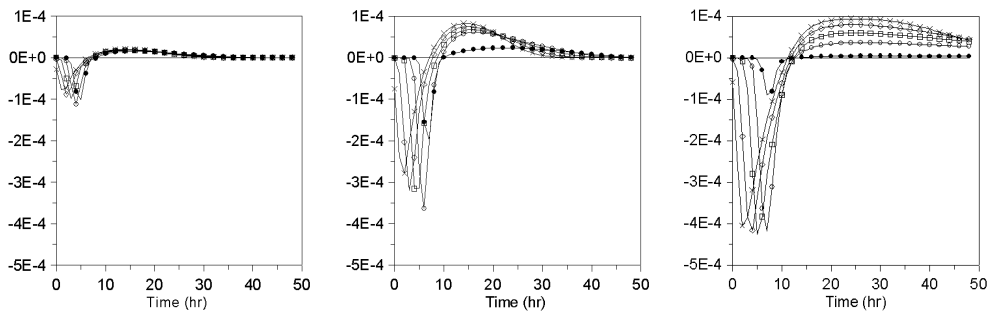
b) Local (s=0.001)

c) Local (s=0.0001)

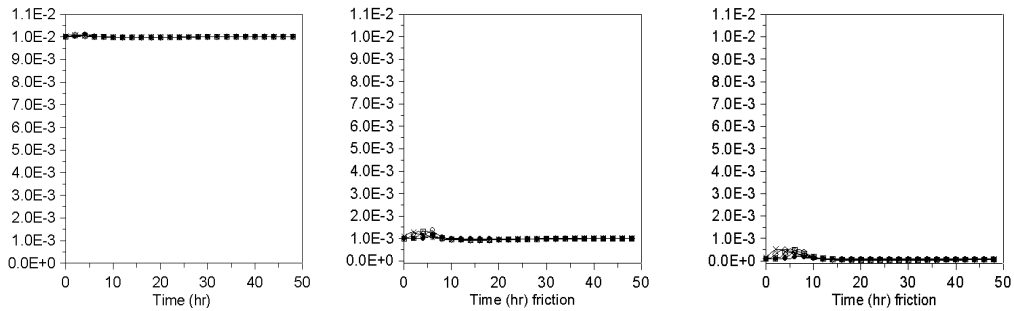
d) Convective (s=0.01)

e) Convective (s=0.001)

f) Convective(s=0.0001)



g) Pressure (s=0.01)      h) Pressure (s=0.001)      i) Pressure(s=0.0001)



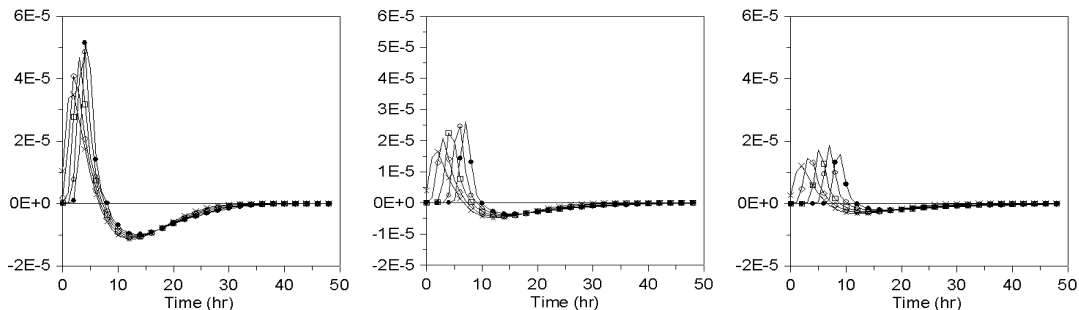
j) Friction (s=0.01)      k) Friction (s=0.001)      l) Friction (s=0.0001)

**Fig. 3. Comparison of the various terms by the stream slopes**

(×;section 1, ◇;section 5, □;section 10, ○;section;15, ●;section 20)

### 5. 조도계수에 의한 영향

조도계수  $n=0.02, 0.08, 0.15$ 의 3가지 조도계수에 대하여 비교분석 하였으며, 이때 하천경사는 0.001로서 일정하게 두었다. 그 결과 국지가속도, 대류가속도, 압력항, 마찰력항에 대하여 그림 4에 나타내었으며, 중력항은 0.001로서 일정한 값이므로 그림에 나타내지 않았다. 모든 항에서 조도계수가 점차 커질수록 침두값의 발생시각이 점차 길어지고 있다. 조도계수가 클수록 국지가속도와 대류가속도는 최고치와 최저치의 폭이 점차 작아지며 영에 수렴하고 있으나, 반면에 압력항의 경우는 조도계수가 수록 최고치와 최저치의 폭이 급격히 커지고 있다. 마찰항은 조도계수에 크게 영향을 받지 않는 것으로 나타났다.



a) Local (n=0.02)      b) Local (n=0.08)      c) Local (n=0.15)

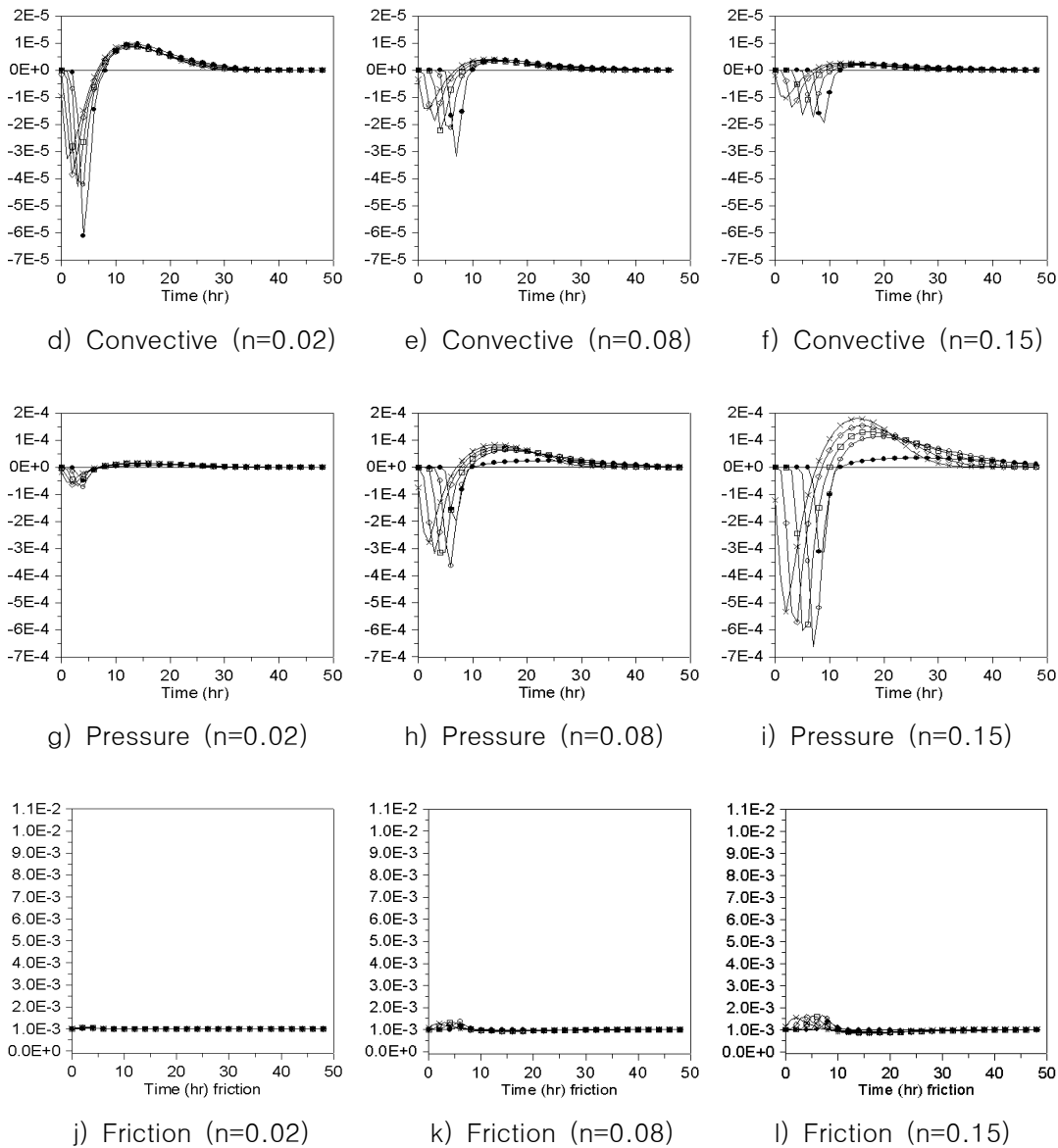


Fig. 4. Comparison of the various terms by the roughness coefficients  
 (×;section 1, ◇;section 5, □;section 10, ○;section;15, ●;section 20)

## 6. 결론

1. 국지와 대류항의 절대치 크기는 거의 유사하여 국지의 양(+)의 값과 대류의 음(-)의 값이 서로 상쇄되는 경향을 보여주며, 일정한 값인 중력항을 제외한 나머지항들의 첨두치 발생시각은 수문곡선 상승부의 변곡점 발생시각과 일치하고 있다.
2. 하천경사의 변화에 대한 운동량방정식 각항의 시간적 변화를 살펴보면, 국지와 대류에서는 최고치와 최저치의 폭이 점차 작아지는 반면에 압력항의 경우는 폭이 점차 커져서 하천경사의 변화에 민감하게 반응함을 알 수 있다.
3. 조도계수가 클수록 국지가속도와 대류기속도항의 최고치와 최저치의 폭이 점차 작아지는 반면에 압력항은 반대의 현상을 보여준다. 압력항은 조도계수의 크기에 따라 점차 증가하는 반면 마찰항은 조도계수에 크게 영향을 받지 않는 것으로 나타났다.