

# 자연하천에 대한 Newton-Raphson 형태의 준정상류 계산모형 Quasi-Steady Model of Newton-Raphson Form for Natural Rivers

김진수\*, 전경수\*\*, 윤병만\*\*\*, 우효섭\*\*\*\*

Jin Soo Kim, Kyung Soo Jun, Byung Man Yoon, Hyo Seop Woo

## 요 지

하상경사가 커서 동수역학적 부정류 계산모형을 안정적으로 적용하기 어렵고, 홍수파의 감쇄효과가 적은 중소하천에 적합한 준정상류 계산모형을 개발하였다. 수립된 모형은 매 시각 유량에 대하여 1차원 하천 부정류 지배방정식인 단면 평균된 1차원 에너지 방정식을 풀도록 구성되어 있으며, 수치해법으로는 Newton-Raphson 방법을 적용한 표준촉차법을 사용하였다. Newton-Raphson 방법을 적용하기 위해서는 통수면적, 하폭, 윤변, 동수반경 및 수위에 대한 윤변의 변화율 등의 변수들이 필요하다. 이와 같은 변수들은 각 계산점에서 수위를 계산하기에 앞서 단면자료를 사용하여 0.1 m 간격으로 모든 수위에 대하여 그 값들을 미리 구한 후, 반복 계산 단계에서 사용되는 수위에 대하여 필요한 변수들을 앞서 계산된 변수들과 선형 보간하여 사용하도록 하였다. 하천 구간 내에 보가 존재하는 경우에는 보가 위치한 상·하류 간의 지배방정식으로 에너지 방정식 대신에 월류 유량 관계식을 사용하였으며, 이때의 수치해법 역시 Newton-Raphson 방법을 사용하였다. 수립된 모형을 한탄강 하류 구간에 적용하여 HEC-RAS 모형과 모의 결과를 비교한 결과, 두 모형의 계산결과가 잘 일치하는 것으로 나타났다. 에너지 경사항의 근사 방법에 따른 민감도 분석을 실시하였다.

**핵심용어** : 준정상류 계산모형, Newton-Raphson 방법, 표준촉차법, 월류흐름

## 1. 서 론

사람들의 생활이 과거에 비하여 안락해지듯 운택해 짐에 따라 점차로 주변의 자연환경이 중요시 여겨지고 있으며, 생활 레저 스포츠 및 기타 여가 생활을 즐기기 위하여 중소하천을 찾는 경우가 늘어나고 있다. 이에 따라 최근에는 호안으로 설치된 제방 등을 제거하는 자연형 하천 사업 등이 추진되고 있어, 이후 하천 단면의 변화에 따른 홍수 모의 등이 필요할 것으로 예상된다. 이러한 중소하천 중에서도 하상경사가 큰 경우에는 부정류 계산모형을 안정적으로 적용하기 어렵다. 또한 일반적으로 중소하천은 대하천에 비하여 구간이 길지 않아 홍수파의 감쇄효과는 그리 크지 않다. 이러한 중소하천의 특성에 적합한 모형을 개발하고자 본 연구에서는 매 시각 주어지는 유량에 대하여 1차원 에너지 방정식을 지배 방정식으로 하고 월류 흐름이 가능하도록 모형을 수립하

\* 정회원 · 성균관대학교 공과대학 건설환경시스템공학과 대학원 박사과정 · E-mail : [sue0851@skku.edu](mailto:sue0851@skku.edu)

\*\* 정회원 · 성균관대학교 공과대학 사회환경시스템공학과 교수 · E-mail : [ksjun@skku.edu](mailto:ksjun@skku.edu)

\*\*\* 정회원 · 명지대학교 토목환경공학과 교수 · E-mail : [bmyoon@mju.ac.kr](mailto:bmyoon@mju.ac.kr)

\*\*\*\* 정회원 · 한국건설기술연구원 부원장 · E-mail : [hswoo@kict.re.kr](mailto:hswoo@kict.re.kr)

고, 이를 한탄강 수계에 대하여 적용하였다. 모형의 수행 결과를 현재 국내에서 하천 정비 사업 등에 주로 사용되고 있는 모형인 HEC-RAS 모형(HEC, 2002)과 그 결과를 비교하였다.

## 2. 지배 방정식 및 수치해법

하천에서의 호계산을 위한 수치해법으로 Newton-Raphson 방법을 적용한 표준축차법(standard step method)을 사용하였다. 표준축차법은 French (1985), Henderson (1966) 및 Subramanya (1986)에 의하여 광폭직사각형 수로에 대하여 적용되었으며, Paine (1992)은 사다리꼴 단면에 대하여 이 방법을 사용한 바 있다. 일반적인 자연형 하천의 단면에 대하여는 Rhodes (1993, 1995)에 의해 연구되었으며, Verwey (1995)는 단면자료들의 전처리를 통하여 흐름 계산에 필요한 변수들을 선형 보간하여 사용할 수 있도록 표로서 제시하여 기존의 방법들에 비하여 효율을 높였다. 본 연구에서는 Verwey의 방법을 적용하여 Newton-Raphson 방법을 사용하기 위하여 필요한 수리학적 변수들을 각 계산점에서 0.1 m 간격으로 모든 수위에 대하여 미리 구한 후, 반복 계산 단계에서 필요한 변수들을 앞서 계산된 변수들과 선형 보간하여 사용하였다.

각 단면에서의 수위를 계산하기 위하여 다음의 에너지 방정식을 표준축차법에 의하여 반복적으로 계산한다.

$$h_1 + \alpha \frac{Q_1^2}{2gA_1^2} = h_2 + \alpha \frac{Q_2^2}{2gA_2^2} + h_L \quad (1)$$

여기서  $h_1$ 과  $h_2$ 는 구간 양쪽 지점에서의 수위이고,  $Q$ 는 유량,  $\alpha$ 는 유속계수,  $g$ 는 중력가속도,  $A$ 는 통수단면적이며,  $h_L$ 은 에너지 손실수두이다. 지천이 유입되는 곳에서는  $Q_1$ 과  $Q_2$ 가 다른 값을 가지며, 이때 횡유입시 발생하는 에너지 손실은 무시하였다. 아래 첨자 1의 항들은 이전 단면에서 계산된 기지의 값이며, 아래 첨자 2의 항들과  $h_L$ 은 미지의 값들로서  $h_2$ 에 관한 함수이다.

에너지 손실수두  $h_L$ 은 다음과 같다.

$$h_L = (x_2 - x_1) \bar{S}_f \quad (2)$$

여기서  $x_1$ 과  $x_2$ 는 각 단면에서의 위치를 나타내며,  $\bar{S}_f$ 는 평균 마찰경사로서 통수능  $K$ 를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{S}_f = \left[ \frac{Q_1 + Q_2}{K_1 + K_2} \right]^2 \quad (3)$$

식 (1)을 미지의 수위 값인  $h_2$ 로 정리하면, 다음의 식  $F$ 와 같다.

$$F(h_2) = h_2 + \alpha \frac{Q_2^2}{2gA_2^2} - \left( h_1 + \alpha \frac{Q_1^2}{2gA_1^2} \right) + (x_2 - x_1) \left( \frac{Q_1 + Q_2}{K_1 + K_2} \right)^2 = 0 \quad (4)$$

식 (4)는 비선형 방정식으로서 Newton-Raphson 방법을 사용하여 식 (5)과 같이  $h_2$ 를 구할 수 있

다.

$${}^{m+1}h_2 = {}^m h_2 - \frac{F({}^m h_2)}{F'({}^m h_2)} \quad (5)$$

여기서 위첨자  $m$ 은 Newton-Raphson 방법의 반복횟수이다.

함수  $F$ 를  $h_2$ 에 대하여 미분하면, 함수  $F'$ 은 식 (6)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dh_2} &= 1 - \frac{\alpha Q_2^2}{g A_2^3} \frac{dA_2}{dh_2} + (x_2 - x_1) \frac{d}{dh_2} \left( \frac{n(Q_1 + Q_2)}{A_1 R_1^{2/3} + A_2 R_2^{2/3}} \right)^2 \\ &= 1 - \frac{\alpha Q_2^2}{g A_2^3} \frac{dA_2}{dh_2} - \frac{2n^2(x_2 - x_1)(Q_1 + Q_2)^2}{A_1 R_1^{2/3} + A_2 R_2^{2/3}} \left( B_2 R_2^{2/3} + \frac{2}{3} \frac{A_2}{R_2^{1/3}} \frac{dR_2}{dh_2} \right) \\ &= 1 - \frac{\alpha Q_2^2 B_2}{g A_2^3} - \frac{2n^2(x_2 - x_1)(Q_1 + Q_2)^2}{A_1 R_1^{2/3} + A_2 R_2^{2/3}} \left[ B_2 R_2^{2/3} + \frac{2}{3} \frac{A_2}{R_2^{1/3}} \left( \frac{B_2}{P_2} - \frac{A_2}{P_2} \frac{dP_2}{dh_2} \right) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $B$ 와  $P$ 는 각각 수면폭과 윤변이다.  $dP_2/dh_2$  항을 제외한 나머지 항들은 가정된  $h_2$ 에 의하여 계산 가능하며,  $dP_2/dh_2$  항은 식 (7)과 같이 가정된  $h_2$ 에 의하여 계산된  $P_2$ 와 새로이 가정되는 수위 값인  $h_2 + \Delta h$ 에 의하여 구해진  $P'$  값을 사용하여 산정할 수 있다.

$$\frac{dP_2}{dh_2} = \frac{(P_2 - P')}{\Delta h} \quad (7)$$

즉  $h_2$ 를 가정하여 반복 계산을 통하여 식 (5)과 (6)의 함수  $F$  및  $F'$ 의 비가 허용오차 내에 포함되면 식 (5)을 만족시킨다고 가정하고 그 단면에서의 계산을 종료하게 된다.

모형의 내부경계로는 수중보에서의 월류형 흐름이 모의 가능하도록 하였다. 계산구간 내부에 월류 구조물이 존재하는 경우, 다음의 식 (8)과 같은 월류 함수가 지배방정식이 된다.

$$Q = f_w(h_2, h_1) \quad (8)$$

여기서  $h_2$  및  $h_1$ 은 상류 및 하류측 수위다. 월류함수  $f_w$ 는 수중웨어형 및 자유월류형 흐름으로 구분하여 각각 다음과 같이 주어진다.

$$f_w(h_2, h_1) = \mu_s b_w \sqrt{2g} \sqrt{h_2 - h_1} (h_1 - h_w) \quad (h_1 - h_w \geq \frac{2}{3}(h_2 - h_w)) \quad (9)$$

$$f_w(h_2, h_1) = \mu_f b_w \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2g}{3}} (h_1 - h_w)^{3/2} \quad (h_1 - h_w < \frac{2}{3}(h_2 - h_w)) \quad (10)$$

여기서  $\mu_s$ 와  $\mu_f$ 는 각각 유량계수이며,  $b_w$ 는 월류폭,  $h_w$ 는 월류부의 바닥표고이다.

월류함수  $f_w$ 의 수치해법은 수위 계산과 마찬가지로 Newton-Raphson 방법을 사용하여 반복계산 하였다. 월류 흐름계산에 있어서 식(4)와 (6)에 해당하는  $h_2$ 에 대한 함수 및 그 미분치를 수중

웨어형과 자유월유형 각각의 흐름에 대하여 적용하였다. 월류함수로서 수중웨어형과 자유월류형 중 어느 것을 택할 것인지는 가정된 월류 구조물 상류의 수위 값( $h_2$ )와 월류부의 바닥표고( $h_w$ ), 기지의 월류 구조물 하류의 수위 값( $h_1$ )에 의하여 결정되며 이에 따라 월류함수  $f_w$  및 그 미분치들을 부여함으로써 반복 계산을 수행할 수 있다.

### 3. 모형의 적용

#### 3.1 자연하천에의 적용

모형의 적용 대상 하천은 한탄강이며, 구간은 하류부터 고탄교까지의 11.5 km 구간이다. 대상 구간내의 지천 유입으로는 차탄천과 신천이 있고 계산점의 총수는 116개로서 계산점간의 평균거리는 100 m이다. 각 계산점에서의 횡단면 자료는 한탄강수계 하천정비기본계획보고서(1998)의 하천측량 자료를 사용하였다.

흐름모형의 경계조건으로 하류단 수위는 계획홍수위(한탄강수계 하천정비기본계획보고서, 1998)로서 El. 27.52 m를 적용하였으며, 유량은 계획홍수량을 적용하였다. 대상 구간내의 하천구조물로는 고탄교 직하류에 고탄 낙차보가 있으며, 이에 따라 상류단인 고탄교에서의 수위는 월류흐름을 계산하여 모의하였다. Newton-Raphson 허용오차는 0.01 m로 하였으며, 유속계수  $a$ 는 1.0으로 하였다.

에너지 경사항의 근사 방법에 따른 민감도 분석을 실시하였다. 이를 위하여 식 (2)의 에너지 손실수두의 대표 마찰경사를 식 (3)의 평균 통수능 공식과 더불어 다음의 평균 마찰경사 공식, 기하평균 마찰경사 공식 및 조화평균 마찰경사 방법으로 모의하였다.

$$\overline{S_f} = \frac{S_{f1} + S_{f2}}{2} \quad (11)$$

$$\overline{S_f} = \sqrt{S_{f1} \cdot S_{f2}} \quad (12)$$

$$\overline{S_f} = \frac{2S_{f1}S_{f2}}{S_{f1} + S_{f2}} \quad (13)$$

여기서  $S_{f1}$ 은 하류에서의 단면의 마찰경사이며,  $S_{f2}$ 는 상류 단면에서의 마찰경사이다.

위의 식에서 평균 마찰경사 공식, 기하평균 마찰경사 공식 및 조화평균 마찰경사 공식을 평균 통수능 공식과 마찬가지로 식 (4)와 (6)에 해당하는  $h_2$ 에 대한 함수와 그 미분치를 사용하여 Newton-Raphson 방법을 적용하였다. 각 경우의 대표 마찰경사의 근사 방법에 따른 모형의 결과를 HEC-RAS 모형의 결과와 함께 그림 1에 도시하였다. 평균 통수능 공식을 기준으로 하였을 때, HEC-RAS 모의 결과와 전 구간에서 잘 일치 하였으며, 평균 마찰경사 공식을 사용한 경우와는 구간 내에서 최대 12 cm의 차이가, 기하평균 및 조화평균 마찰경사 공식을 사용하였을 때에는 최대 4 cm의 차이가 발생하는 것으로 나타났다. 평균 마찰경사 공식과 기하평균 마찰경사를 사용한 경우에는 평균 통수능 공식을 사용한 경우보다 수위가 같거나 크게 모의 되었으며, 조화평균 마찰경사를 사용한 경우에는 평균 통수능 공식을 사용한 경우보다 수위가 작거나 같게 계산되었다. 구간 내에서의 계산 결과 차이가 가장 크게 발생하는 경우는 평균 마찰경사 공식과 조화평균 마찰경사 공식을 사용하는 경우 16 cm의 차이가 발생하였다.

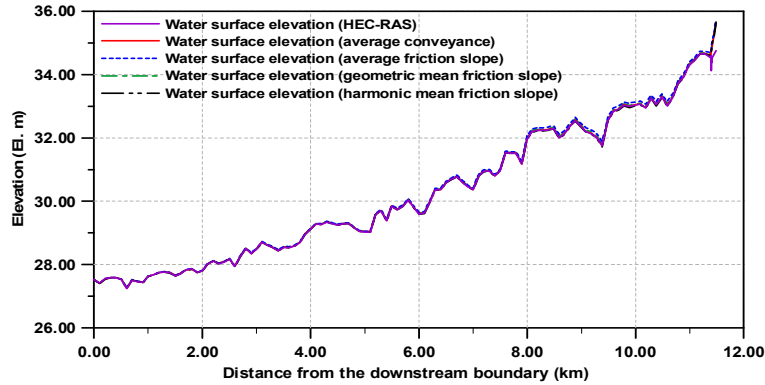


그림 6. 대표 마찰경사의 근사 방법에 따른 모형의 결과

#### 4. 결 론

1차원 에너지 방정식을 지배방정식으로 하며, 수치해법으로 Newton-Raphson 방법을 적용한 표준축차법을 사용하는 중소하천에 적합한 모형을 수립하였다. 한탄강 하류 구간에 모형을 적용한 결과 모형은 부정류 계산모형에 비하여 안정적이며, HEC-RAS 모형의 결과와 잘 일치하는 것으로 나타났다. 에너지 경사항의 근사 방법에 따른 모형의 수행결과를 분석한 결과 최대 16 cm의 오차가 발생하였다. 이러한 차이는 상류로 갈수록 커지기 때문에 전체 구간이 길어질수록 오차도 커질 것으로 예상된다.

#### 참 고 문 헌

1. 건설교통부(1998), 한탄강수계 하천정비기본계획보고서
2. French, R.H. (1985). Open-channel hydraulics. McGraw-Hill Book Co, Inc., New York, N.Y., pp. 217-223.
3. HEC(2002). HEC-RAS River analysis system: User's manual, version 3.1. Hydrologic Engineering Center, US Army Corps of Engineers, Davis, Calif.
4. Henderson, F.M. (1966). Open-channel flow. Macmillan, New York, N.Y., 140-147.
5. Paine, J.N. (1992). "Open-channel flow algorithm in Newton-Raphson form." J. Irrig. and Drain. Engrg., ASCE, Vol. 119, No. 5, pp. 914-922.
6. Rhodes, D.G. (1993). "Discussion of 'Open-channel flow algorithm in Newton-Raphson form,' by John N. Paine." J. Irrig. and Drain. Engrg., ASCE, Vol. 119, No. 5, pp. 914-922.
7. Rhodes, D.G. (1995). "Newton-Raphson solution for gradually varied flow." J.Hydr. Res., Delft, The Netherlands, Vol. 33, No. 2, pp. 213-218. Reprint, 1996, Water Resour. J., No. ST/ESCAP/SER.C/191, Bangkok, Thailand, pp. 52-56.
8. Subramanya, K. (1986). Flow in open channels, 1st Revised Ed., Tata McGraw-Hill, New Delhi, India, pp. 149-155.
9. Verwey, A. (1995). "Discussion of 'Newton-Raphson solution for gradually varied flow,' by David G. Rodes." J.Hydr. Res., Delft, The Netherlands, Vol. 33, No. 5, pp. 731-735