3차 스플라인을 이용한 수위-유량관계곡선의 접점 연결

Joint Connection of Stage-Discharge Rating Curves by Cubic Spline

이창해*, 장석환**

Chang Hae Lee, Suk Hwan Jang

요 지

수위관측지점의 수위-유량관계는 하천단면 형태와 경사에 따라 1개의 유량곡선이 형성될 수도 있으나, 저수위, 평수위, 고수위 등 여러 개 구간의 곡선이 각각 다른 형태로 구성될 수 있다. 또한 이러한 곡선의 연결접점에서 연결이 연속적이어야 하고 부드러워야 한다고 알려져 있다. 각 수위구간에서 유도된 수위-유량관계곡선이 수위구간을 나눈 경계수위에서 곡선식이 일치하지는 경우가 종종 나타난다. 본 연구에서는 경계수위와 곡선접점이 일치하는지 여부를 판단하고 오차의 크기를 확인하기 위하여 할선법을 적용하여 Excel의 VBA로 프로그램을 작성하여 사용하였다. 한편, 수위유량곡선의 연결부에서 부드럽게 연결되는 것이 바람직하지만, 지금까지 실무에서는 경계수위에서 기울기가 급변하는 형태의 수위-유량관계곡선을 사용하고 있다. 왜냐하면 최소자승회귀분석을 통하여 유도되는 과정에서 경계수위지점의 1차 도함수를 일치시키는 것은 현실적으로 불가능하기 때문이다. 본 연구에서는 이러한 문제를 해결하기 위하여, 회귀분석으로 지수함수의 형태로 유도된 수위-유량관계곡선으로부터 수위와 유량의 대표 값을 계산하고 이들 대표 값들을 3차 스플라인 보간법을 이용하여 1차 도함수를 접점에서 일치시키는 부드러운 연결과 함께 수위-유량관계곡선과도 잘 일치하는 새로운 대안을 제시하였다. 2006년도 한국수문조사연보(유량편)의 자료를 검토하여 문제점들을 도출하고, 본 연구에서 제안한 방법들을 적용하여 보았다.

핵심용어 : 수위-유량관계곡선, 접점 연결, 3차 스플라인

1. 서 론

관측 수위 및 유량과의 관계를 나타낸 곡선이 수위-유량관계곡선이며, 이 수위-유량관계곡선을 사용하여 연속적으로 측정되는 수위에서 유량을 산출한다. 수위관측지점의 수위-유량관계는 하천단면 형태와 경사에 따라 1개의 유량곡선이 형성될 수 있으나 저수위, 평수위, 고수위 3개 구간으로 곡선이 각각 다른 형태로 구성될 수 있다. 또한 이러한 곡선의 연결접점에서 연결이 연속적이어야 하고 부드러워야 한다(건설교통부, 2004). 여기서 연결이 연속적이어야 한다는 의미는 접점이 일치하여야 한다는 것이고, 부드럽다는 의미는 각 수위구간의 수위-유량관계곡선의 1차 도함수가 접점에서 일치되어야 한다는 것이다.

일반적으로 수위에 따라 저수위, 평수위, 고수위 구간을 나누고 각 수위구간에서 계측된 수위와 유량자료를 통해 각 구간의 수위-유량관계곡선을 각각 구하게 된다. 이 과정에서 유도된 수위-유량관계곡선이 수위구간을 나눈 경계수위에서 곡선식이 일치하지는 않기 때문에 각별한 주의를 하여야 하지만 간혹 실무에서 간과되는 경우도 있다. 본 연구에서는 경계수위와 곡선접점이 일치하는지 여부를 판단하고 또한 얼마나 오차가

* 정회원 · 대진대학교 환경공학과 부교수 · E-mail : chlee@daejin.ac.kr

** 정회원 · 대진대학교 건설시스템공학과 부교수 · E-mail : drjang@daejin.ac.kr

있는지를 확인하기 위하여 방정식의 근을 구하기 위한 할선법(secant method)을 적용하였다. 이를 위한 프로그램은 Excel의 VBA(Visual Basic for Applications)로 작성하여 사용하였다.

수위유량곡선의 연결부에서 부드럽게 연결되는 것이 바람직하지만, 지금까지 실무에서 각 수위구간의 1차 도함수를 일치시켜 유도된 수위-유량관계곡선을 사용하였다는 보고는 없었다. 왜냐하면 각 수위구간에서 최소자승회귀분석을 통하여 유도되는 과정에서 1차 도함수를 일치시키는 것은 현실적으로 불가능하다. 본 연구에서는 이러한 문제를 해결하기 위하여, 회귀분석으로 지수함수의 형태로 유도된 수위-유량관계곡선으로부터 수위와 유량의 대표 값을 계산하고 이들 대표 값들을 3차 스플라인 보간법을 이용하여 1차 도함수를 접점에서 일치시키는 부드러운 연결과 함께 수위-유량관계곡선과도 잘 일치하는 새로운 대안을 제시하였다.

수위-유량관계곡선식의 문제점을 도출하고 본 연구의 타당성을 검토하기 위하여 2006년도 한국수문조사연보(유량편)의 자료(건설교통부, 2007)를 이용하였다.

2. 수위-유량관계곡선의 문제점

2.1 수위-유량관계곡선의 불연속

수위-유량관계곡선이 저수위, 평수위, 고수위 등으로 수위에 따라 구간을 나누어 적용할 경우 구간의 연결점에서 연속성을 유지하여야 하지만 간혹 실무에서 실수에 의해서 또는 추후 검정을 하지 않아 불연속이 발생하는 경우가 있다. 그림. 1은 이러한 불연속이 발생한 경우를 나타낸 것으로 영상강수계의 선암 수위표 지점의 관계곡선들 중에서 수위 5.4m에 해당하는 지점에서 불연속이 나타나는 것을 확인할 수 있다. 그림 1에서 실선으로 표시된 범례의 H가 수위 구간별 수위-유량관계곡선들을 연결한 결과이고, H1~H4는 4개의 각 구간 관계곡선을 점선으로 표시한 것이다.

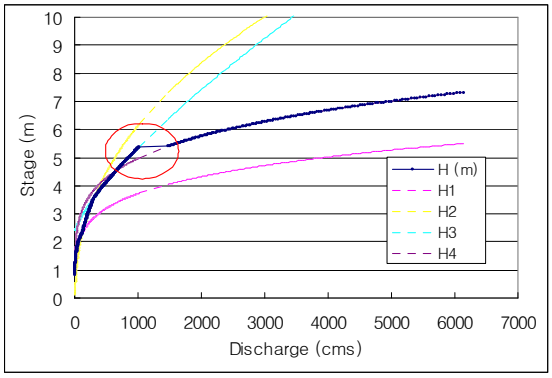

그림 1. 선암수위표 지점의 수위유량관계곡선

그림 2는 본 연구에서 개발한 것으로, 곡선들의 교점에서 연속성 여부를 계산하는 VBA 프로그램의 수행결과이다. 여기서 타원으로 표시한 5.4, 4.5702, 15.37은 각각 교점 경계수위, 계산된 교점수위, 교점에서 수위의 상대오차를 나타낸 것으로 그림 1의 불연속한 지점을 계산해낸 결과이다.

그림 1에 나타난 바와 같이 임의의 수위표지점의 관계곡선 자료를 입력한 후 곡선연결 이라고 표시된 스위치를 누르면 수위에 따른 관계곡선들의 연결 관계에 대한 계산과 그림 1과 같은 그래프의 작성을 VBA에 의해 수행하여 Excel의 sheet에 결과를 출력할 수 있다(Orvis, 1996).

선암지점의 수위-유량관계곡선의 불연속을 해결하기 위해 구간의 경계수위를 5.4에서 4.57로 수정하여 검토해 보면 그림 3과 같이 양호한 결과를 나타내고 있다. 물론, 곡선들의 불연속이 경계구간의 착오뿐만 아니라 관계곡선식의 오류로 나타나는 경우도 있으므로 원 자료를 자세히 검토할 필요가 있다.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	rating curve	4	ea	z	A	B	교점	반복횟수	교점오차%
2	구간	0,84	2,36	0,2	1,315	4,853	2,3601	3	0,00
3		2,36	3,57	0,285	13,033	2,332	3,5706	2	0,00
4	선암	3,57	5,4	-2,372	239,178	1,312	4,5702	8	15,37
5		5,4	7,34	-0,085	0,66	4,615			
6									
7								곡선연결	Cubic S
8									
9	Q (CMS)	H (m)	H1	H2	H3	H4	H5		x
10	1,590701	0,84	0,84	0,120784	2,393908	1,294994			0,84
11	1,689548	0,853	0,853	0,131411	2,394938	1,310904			1,144
12	1,793211	0,866	0,866	0,142181	2,396003	1,326824			1,448

그림 2. 선암수위표 지점의 연속성 검토계산 결과

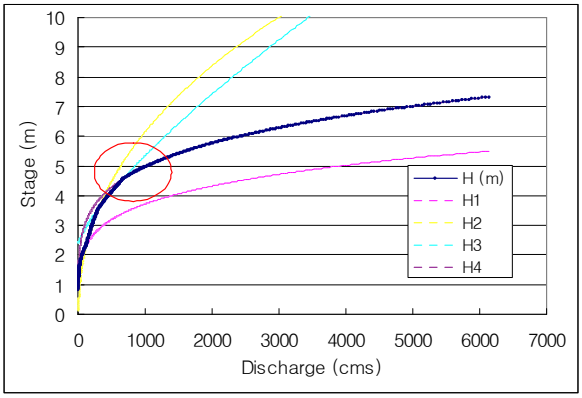

그림 3. 선암수위표 지점의 연결부 수정 결과

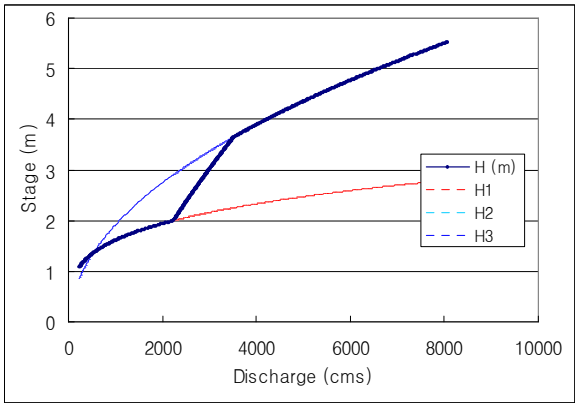

그림 4. 삼랑진수위표지점의 수위-유량관계곡선

2.2 수위-유량관계곡선의 급변하는 기울기

그림 4에 나타난 바와 같이 수위구간이 연결되는 곳에서 기울기가 급변하는 것을 알 수 있다. 물론, 구간 경계수위에서 하천단면이 급변하는 경우에 발생할 수도 있으나, 그럼에도 불구하고 경계수위에서 기울기 즉 1차 도함수가 일치하는 형태로 부드럽게 연결되는 것이 타당할 것이다. 그러나 각 수위구간에 회귀분석을 이용하는 기존의 방법으로는 부드러운 수위-유량관계곡선의 연결은 대단히 곤란하다. 수자원공사에서 개발한 Rating 개발시스템(이한구, 2003)에서 부드러운 연결을 시도하고 있어 효과적이지만, 각 구간 내에서 최적의 회귀분석을 유도하는데 한계가 있다.

현재 사용되고 있는 수위-유량관계곡선식의 일반적인 형태는 하천의 수리학적 특성을 잘 반영하고 있는 지수형으로 Eq. (1)과 같다.

$$Q = a(H+b)^c \tag{1}$$

Eq. (1)의 매개변수 a, b, c는 각 수위구간내의 실측 수위와 유량자료를 사용하여 최소자승법에 의해 회귀분석을 실시해서 결정하게 된다. 그러나 경계에서의 기울기를 일치시키기 위해 Eq. (1)의 매개변수를 조정하게 되면 구간 내에서의 최적 회귀식을 얻는 것은 곤란해진다. 즉, 경계를 조정하기 위하여 구간 내부의 자료 특성을 잃어버리는 결과를 초래하게 된다. 따라서 수위구간내의 최적 회귀식의 특성을 대부분 그대로 유지하면서 경계부분에서 조절을 통하여 부드러운 수위-유량관계를 유도하기 위하여 보간법의 일종인 3차 스플라인 곡선을 이용하는 방안을 제시해보겠다.

3. 수위-유량관계곡선의 접점 연결

3.1 곡선적합(Curve Fitting)

데이터는 연속체를 따라 이산적인 값으로 주어지는 경우가 많고, 이들 값 사이에 있는 임의의 점에서 값을 추정해야 하는 경우가 있다. 중간 추정 값을 얻기 위해 이러한 데이터를 곡선으로 나타내는 기법을 곡선적합이라고 한다. 곡선적합은 두 가지로 다음과 같이 나눌 수 있다(Chapra와 Canale, 1998).

첫째, 데이터가 상당한 크기의 오차 또는 노이즈(noise)를 내포할 경우 각 데이터 값들이 정확하지 않기 때문에 유도되는 곡선식이 모든 데이터 점들을 통과할 필요는 없고 데이터의 경향을 따르면 된다. 이러한 방식으로 데이터를 적합시키는 것이 최소자승회귀분석(least-squares regression)이다. 수위-유량관계곡선의 경우 지수형 수식으로 비선형 회귀분석을 한다.

둘째, 데이터 값이 매우 정확한 것으로 알려져 있어서 각각의 데이터 점들을 직접 통과하는 하나의 곡선 또는 일련의 곡선들을 이용해서 엄밀한 데이터 점들 사이의 중간 값을 추정하는 것을 보간법(interpolation)이라 한다. 본 연구에서 수위-유량관계곡선의 부드러운 연결을 위해 보간법의 일종인 3차 스플라인 보간법을 사용한다.

3.2 3차 스플라인 보간 다항식

급격하게 변하는 데이터 주변의 경우 Newton과 Lagrange과 같은 고차 다항식은 격렬하게 진동하게 되는데 3차 스플라인은 진동을 최소화하고 급격히 변하는 함수의 거동에 우수한 근사 값을 제공할 수 있다.

3차 스플라인은 절점사이의 각 구간에 대해서 다음과 같은 형태의 3차 다항식들로 나타내는 것이다.

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \tag{2}$$

그러므로 $n+1$개의 데이터 점 $(i=0,1,2,\cdots,n)$들에 $4n$개의 미지수가 결정되어야 한다. 그러나 Cheney와 Kincaid(1994)는 다음과 같이 $n+1$개의 미지수가 필요한 3차 스플라인 방정식을 유도하였다.

$$\begin{aligned} f_i(x) = {} & \frac{f_i''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})}(x_i - x)^3 + \frac{f_i''(x_i)}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3 \\ & + \left[\frac{f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x_i - x) + \left[\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x - x_{i-1}) \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} & (x_i - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + (x_{i+1} - x_i)f''(x_{i+1}) \\ & = \frac{6}{x_{i+1} - x_i}[f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \frac{6}{x_i - x_{i-1}}[f(x_{i-1}) - f(x_i)] \end{aligned} \tag{4}$$

여기서 Eq. (4)를 이용하여 $n-1$개의 2차 도함수 값을 계산하고 양단에서 2차 도함수가 0이라는 조건을 도입하여 총 $n+1$개의 미지수를 계산하고, 결과적으로 Eq. (3)을 이용하여 중간 값들을 계산할 수 있다.

3.3 3차 스플라인 보간법을 이용한 접점 연결 적용

그림 5에서 다음에 Cubic Spline 이라고 표시된 스위치를 누르면 3차 스플라인 보간법에 의해 수위구간의 접점들을 부드럽게 연결하는 프로그램이 가동된다. 이 또한 VBA로 개발되었다(이창해, 2007).

낙동강유역의 삼랑진 수위표지점의 수위-유량관계곡선을 이용하여 저수위, 평수위, 고수위의 연결지점에서 부드럽게 연결되지 못하고 심하게 변곡이 발생하는 것을 그림 4를 통해서 확인할 수 있다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 본 연구에서 3차 스플라인 보간법을 이용하여 연결부위를 부드럽게 조정하고자 하였다. 3차 스플라인 보간법을 이용하여 각 구간별 수위-유량관계곡선의 경향을 최대한 유지하면서 연결 부위만 조절하는 결과를 유도하였다.

각 수위 구간을 5개씩 나누어 각 수위-유량관계곡선을 이용하여 3차 스플라인 보간을 위해 자료 값들을 계산해 낸다. 삼랑진 수위표지점의 경우 3개의 구간으로 나누어져 있기 때문에 각 구간에서 4개의 점들이 발생하여 12개와 전체 구간의 양 끝단 2개를 포함해서 14개의 점들을 발생시킬 수 있다(그림 5의 Data for C.S. 참조).

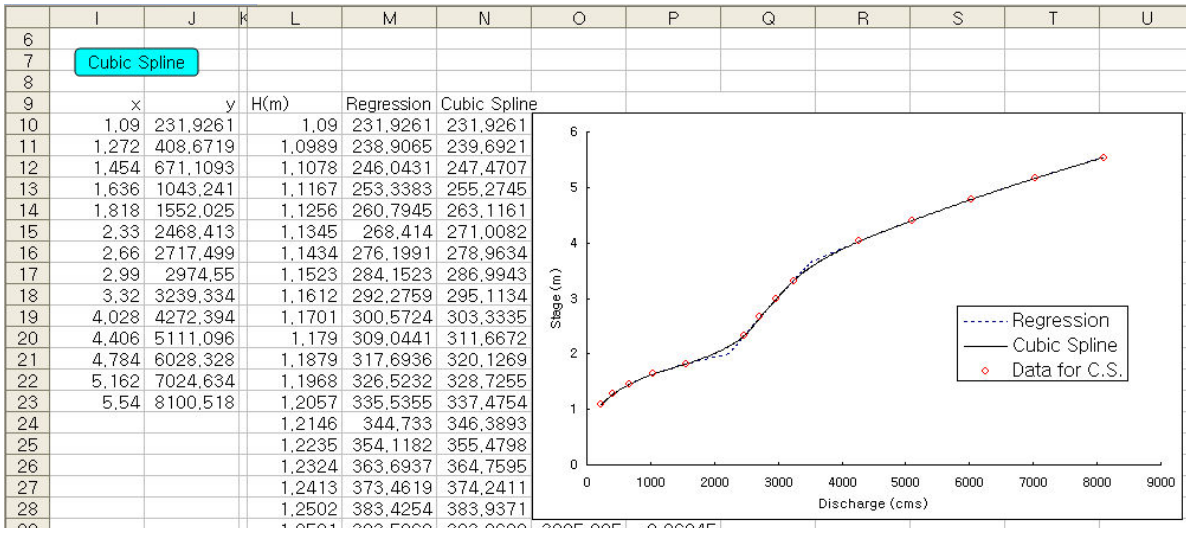

그림 5. 삼랑진수위표지점 수위-유량관계식의 3차 스플라인에 의한 실행 결과

이들 14개의 점들을 이용해서 각점들 사이에서 3차 스플라인 곡선을 계산해 낼 수 있으며 계산 프로그램은 역시 Excel의 VBA를 이용하여 개발하였다. Fig. 6에 나타난 바와 같이 변곡점구역에서 회귀분석(Regression)에 의한 변곡점이 3차 스플라인 곡선(Cubic Spline)에 의해 부드럽게 처리된 것을 확인할 수 있다. 또한 그림 5에서 좌측에 x와 y로 표시된 14개의 자료점만 있으면 각 구간별 회귀식을 대신하여 3차 스플라인 보간법을 이용하여 수위-유량관계곡선을 대신할 수 있다.

5. 결 론

본 연구는 수위별로 구분되는 수위-유량관계곡선들의 연결점에서 연속성과 접점처리에 대하여 다루었다. 대상 자료는 2006년도 한국수문조사연보(유량편)의 수위-유량관계곡선식을 사용하였고, Excel의 VBA를 이용하여 프로그램을 개발하였다.

수위별 수위-유량관계곡선의 연결점에서 불연속이 발생되는 경우를 쉽게 발견할 수 있으며, 연결점의 정확한 계산 결과를 도출할 수 있었다. 연결점에서 1차 도함수의 불일치가 발생하는 것을 3차 스플라인 보간법을 이용하여 부드럽게 처리 할 수 있었다. 회귀식이 아닌 회귀식에서 계산된 십여 개의 자료점을 이용하여 3차 스플라인 보간 프로그램으로 수위-유량관계곡선을 대신할 수도 있다.

본 연구의 접근방법에 대하여 다양한 논쟁이 있기를 기대하며 추가적인 적용 연구가 필요할 것이다.

참 고 문 헌

건설교통부 (2004). **수문관측매뉴얼,** 수자원국.

건설교통부 (2007). **한국수문조사연보(유량편) 2006**.

이창해 (2007). 수위에 따른 수위-유량관계곡선의 연결부에 관한 연구, 대진대학교 환경연구소논문집, 제9집, pp. 65-76.

이한구 (2003). 사용자설명서 수문자료상시평가프로그램/Rating 개발시스템, 한국수자원공사.

Cheney, W. and Kincaid D. (1994). *Numerical Mathematics and Computing*, 2d ed., Brooks/Cole, Monterey, CA.

Chapra, S.C. and Canale, R.P. (1998). *Numerical Methods for Engineers: with Programming and Software Application, 3rd ed.* McGraw-Hill, pp. 330-565.

Gerald, C.F. and Wheatley, P.O. (1989). *Applied Numerical Analysis, 4th ed.* Addison-Wesley.

Orvis, W.J. (1996). *Excel for Scientists and Engineers, 2nd ed.* Sybex.