

# $k-\varepsilon$ 난류모형을 이용한 하층밀도류의 시간에 따른 이동현상 수치모의

## Numerical Simulation of Time Evolution of Dense Underflows using $k-\varepsilon$ Model

이해은<sup>1)</sup>, 최성욱<sup>2)</sup>

Hea Eun, Lee-Sung-Uk, Choi

### 요 지

본 연구에서는 2-방정식 난류모형을 이용하여 사면을 따라 발달하는 하층밀도류의 시간에 따른 이동현상에 대해 살펴보았다. 이를 위해 타원형의 편미분 방정식을 지배방정식으로 구성하고, 난류 완결을 위해  $k-\varepsilon$  난류모형을 이용하였다. 개발된 모형을 이용하여 경사의 사면을 따라 진행되는 연속 유입 밀도류를 수치모의하였다. 완전 발달된 하층밀도류의 거리에 따른 주흐름방향 유속 분포, 체적 농도를 계산하였고, 이를 기존의 실험결과와 비교하였다. 실험과 수치모의의 결과가 잘 일치함을 확인하였다. 또한, 불연속 유입 밀도류의 시간에 따른 진행 상황을 수치모의하여 밀도류와 주변수체의 경계부에서 Kelvin-Helmholtz 불안정에 의한渦가 형성되는 것을 확인하였으며, 밀도류 선단부의 진행 속도와 주변수체의 유입에 대해 고찰하였다.

**핵심용어:** 하층밀도류,  $k-\varepsilon$  난류모형, Kelvin-Helmholtz 불안정, 밀도류 선단부, 주변수체 유입

### 1. 서론

주변수체에 비해 큰 밀도를 갖는 수체는 중력의 영향을 받아 하류로 이동한다. 이처럼 농도, 온도, 부유물질 등에 의해 발생하는 흐름을 밀도류라 한다. 이때 밀도류의 선단부는 주변수체의 유입으로 인하여 복잡하고 불안정한 구조를 갖는다. 주변수체와 밀도류의 유속 차이로 인해 경계면에 자유 전단층이 형성되고, 이는 Kelvin-Helmholtz 불안정을 발생시키는 원인이 된다. 또한 이러한 Kelvin-Helmholtz 불안정에 의해 밀도류와 주변수체의 경계부에서渦가 발생하고, 이는 다시 주변수체의 유입에 영향을 미친다.

하층 밀도류에 대한 현장 관측은 밀도류가 수심이 깊은 곳에서 발달하기 때문에 측정이 매우 어려우며, 실험 연구는 흐름 특성상 대규모의 실험 장치가 필요하게 된다. 따라서 밀도류의 거동 특성을 살펴보기 위해서는 수치모의를 이용한 연구가 필요하다. 수치모의 연구에는 적분모형을 이용한 연구(Elison과 Turner, 1959; Alavian, 1986; Parker 등, 1987; Garcia, 1993) 및 수직모형을 이용한 연구(Stacey와 Bowen, 1988; Eidsvik과 Brors, 1989; Brors와 Eidsvik, 1992; Choi와 Garcia, 2002; Huang 등, 2005)가 있다. 일반적으로 적분모형은 밀도류 거동에 대한 거시적인 특성만을 살펴볼 수 있는 단점이 있으며, 수직모형은 밀도류 진행에 따른 미시적인 난류구조 및渦 구조 등을 자세히 살펴볼 수 있다. 따라서 본 연구에서는 2차원 수직모형을 이용하여 하층밀도류의 흐름구조를 살펴보고자 한다.

### 2. 수치모형

시간평균된 보존방정식과 운동량 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

1) 연세대학교 토목환경공학과 석사과정 E-mail : love\_me@yonsei.ac.kr

2) 정회원 연세대학교 토목환경공학과 교수 E-mail : schoi@yonsei.ac.kr

$$\frac{\partial(\rho\delta)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\delta)}{\partial x_j} = -\frac{\partial(\rho \overline{u_j\delta})}{\partial x_j} \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \rho \overline{u_j' u_j'}) + \rho \delta g_j \quad (3)$$

여기서  $\rho$ 는 주변수체의 밀도,  $u$ 는 유속의 시간평균성분,  $\delta$ 는 주변수체에 대한 밀도류 상대밀도의 시간평균 성분,  $t$ 는 시간,  $p$ 는 압력,  $\mu$ 는 점성계수,  $g$ 는 중력가속도이다. 또한,  $-\rho \overline{u_j\delta}$ 와  $-\rho \overline{u_j' u_j'}$ 은 각각 레이놀즈 플럭스항과 레이놀즈 응력항으로서, 난류점성 개념을 이용하면 다음과 같다.

$$-\rho \overline{u_j\delta} = \frac{\mu_t}{\sigma_d} \left( \frac{\partial \delta}{\partial x_j} \right), \quad -\rho \overline{u_j' u_j'} = \mu_t \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{jj} \quad (4, 5)$$

여기서  $\delta_{jj}$ 는 Kronecker delta,  $\mu_t (= C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon})$ 는 난류점성계수,  $k$ 는 난류운동에너지,  $C_\mu$ 는  $k-\varepsilon$  난류모형상수,  $\sigma_d$ 는 Schmidt 수이다.  $k-\varepsilon$  모형에서 밀도류의 해석에 이용하는 난류운동에너지 방정식과 난류운동에너지 소산률 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_{ij} - \rho \varepsilon + G_b \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u \varepsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{e1} \frac{\varepsilon}{k} (G_{ij} + C_{e3} G_b) - C_{e2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (7)$$

여기서  $\varepsilon$ 는 난류운동에너지 소산률,  $G_{ij}$ 는 전단응력에 의한 생성항,  $G_b$ 는 부력에 의한 생성항이다.  $G_{ij}$ 와  $G_b$ 는 다음과 같다. 그리고 모의에 사용한 난류모형상수는 표 1에 나타내었다.

$$G_{ij} = -\rho \overline{u_j' u_j'} (\partial u_j / \partial x_j) = \rho \nu_t \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_j}, \quad G_b = -\rho g_j \frac{\nu_t}{\sigma_d} \frac{\partial \delta}{\partial x_j} \quad (8, 9)$$

### 3. 계산결과

개발된 모형을 연속 유입되는 밀도류의 수치모의에 적용하였다. 0.1 m 높이의 유입부에서 유속 0.1 m/s, 상대 밀도 0.01의 유체가 유입되어 5° 경사의 사면을 따라 완전히 발달한 밀도류를 수치모의 하였다. 그림 1과 그림 2는 각각 유입부로부터의 거리에 따른 무차원 유속과 무차원 농도의 수직분포이다. 그림의 가로축은 무차원 유속과 무차원 농도를 나타내며, 세로축은 바닥으로부터의 무차원 거리를 나타낸다. 기호는 Garcia (1993)의 실험 측정값이며, 각 선들은 거리에 따른 수치모의의 결과이다. 수치모의의 결과 밀도류 상부에서 흐름 방향과 반대방향의 유속이 존재함을 확인할 수 있다. 이는 타원형 편미분 방정식을 사용하여 하류의 영향이 상류로 전파되도록 하였기 때문이다. 실제로 밀도류의 선단부와 몸체부로 주변수체가 유입되는 과정에서 밀도류의 주흐름과 반대 방향의 유속이 발생한다. 유입부에 가까운 2m 지점을 제외한 나머지 4m - 8m 지점의 수직구조가 서로 일치하지만, 최대 유속 발생 지점이 실험에 비해 상부에서 나타나는 경향을 보였다. 또한, 무차원 농도의 경우 대체로 Garcia (1993)의 실험과 유사하지만, 실험보다 성층화가 덜 되어 있는 것을 알 수 있다. 이는 모의에 사용하는 Schmidt 수의 영향인 것으로 알려져 있다 (Huang 등, 2005). 본 연구에서는 일반적인 부력류의 수치모의에 사용되는 0.85를 Schmidt 수로 사용하였다. 그러나 Huang 등 (2005)은 사면에서 발달하는 연속 유입 밀도류의 수치모의에 1.3을 Schmidt 수로 사용하였고, 1보다 큰 값을 사용하는 것이 밀도류가 주변수체와 과다하게 섞이는 것을 방지한다고 하였다. 한편, 무차원 농도의 경우도 유속분포와 유사하게 2m 지점을 제외한 나머지 4m - 8m 지점의 수직구조가 서로 일치한다.

다양한 경사조건의 연속 유입 밀도류에 대한 수치모의를 수행하였으며, 모의 조건은 표 2와 같다. 그림 3은 사면 경사에 따른 무차원 선단부 속도를 나타낸 것이다. 그래프의 가로축은 사면의 경사를 나타내며, 세로축은 무차원 선단부 속도이다. 그림에 Georgeson (1942), Wood (1965), Tsang과 Wood (1968), Tochon-Dangay (1977), Britter과 Landen (1980)의 실험 자료를 원형 기호로 나타내었다. 또한, 마름모 기호는 본 연구에서 수행한 수치모의 자료이며, 실선과 점선은 Britter과 Linden (1980)이 차원해석을 수행하여 제시한 식을 도기한 것이다. 모의결과가 Britter과 Linden (1980)의 식과 잘 일치하며, 실험 측정값인

$U_f/(g_0'Q)^{1/3}=1.5\pm 0.2$ 와도 유사함을 알 수 있다. 그러나 경사가 작은 경우 ( $5^\circ \leq \theta \leq 15^\circ$ ), 무차원 선단부 유속이 실험과 Britter과 Linden (1980)의 식에 비해 작게 모의되며, 과소 추정 정도의 경사가 작을수록 심하게 나타난다.

본 연구에서 개발한 수치모형이 두 유체 층 사이의 불안정에 의한渦를 모의할 수 있는지 확인하기 위해 불연속 유입 밀도류에 대한 Huppert와 Simpson (1980)의 rock release 실험을 수치모의 하였으며, 모의 조건은 표 3과 같다. 그림 4는 표 3의 D1조건에 따른 불연속 유입 밀도류 선단부 위치이다. 가로축은 유입 후 시간의 경과를 나타내며, 세로축은 유입부로부터의 거리를 의미한다. 기호는 Huppert와 Simpson (1980)의 실험 측정값이며, 실선은 모의결과를 나타낸다. 실험에서 시간의 경과에 따라 약 60s까지는 선단부의 진행 속도가 거의 일정하지만 그 이후에는 점차 줄어든다. 이는 점성의 영향이 지배적인 viscous phase에 접어들고 있음을 의미한다. 이러한 속도 변화 경향은 수치모의에서도 유사하나, 선단부 속도가 과소 추정되고 있음을 알 수 있다. 이와 유사한 현상을 Hartel 등 (2000)의 직접수치모의와, 유한요소법을 이용한 Cantero 등 (2003)의 2차원 수치모의에서도 찾아볼 수 있다. 2차원과 3차원 모의를 실험과 비교한 결과 3차원 모의가 실제 밀도류의 진행 속도를 더 잘 모의하며, 2차원 모의는 속도가 느리게 모의된다고 하였다. 이는渦의 쪼개짐이나 주변수체의 유입 등과 같은 3차원 현상을 2차원 모의가 충분히 반영하지 못하기 때문이다. 그러나 Hartel 등 (2000)은 2차원 모의와 3차원 모의에서 선단부의 모양과 구조는 유사하게 나타난다고 하였다.

그림 5는 표 3의 D2조건에 따른 밀도류 진행을 실험과 비교한 것이다. 각 시간 별로 좌측 상단의 그림은 Huppert와 Simpson (1980)의 실험, 좌측 하단의 그림은 수치모의를 통해 얻은 상대밀도 모의결과, 우측 그림은 와도 모의 결과이다. 가로축은 흐름 진행방향으로의 거리를 나타내며, 세로축은 바닥으로부터의 높이이다. 수치모의가 실험 사진에서 관찰되는 밀도류와 주변수체 사이의 불안정에 의한 경계면의 굴곡을 유사하게 모의하며, 사진에서는 관찰이 어려운渦의 형성도 확인이 가능하다. 그러나  $t=9.7s$ 의 0 - 10 cm 구간과 밀도류가 퍼져나간 길이로부터 실험에 비해 주변수체와의 섞임 현상이 적게 모의되고 있음을 알 수 있다. 한편, 와도에서 실선은 반시계방향, 점선은 시계방향의 와도를 의미한다. 그래프들의 가로축은 흐름 진행방향으로의 거리를 나타내며, 세로축은 바닥으로부터의 높이이다. 모든 경과시간에서 공통적으로 바닥의 영향에 의해 발생하는 시계방향의渦와, 주변수체와의 상대적인 움직임에 의한 반시계방향의渦를 확인할 수 있다.

#### 4. 결론

본 연구에서는  $k-\epsilon$  모형을 이용하여 2차원 보존성 하층 밀도류를 수치모의 하였다. 타원형 지배방정식을 통해 하류의 영향을 모의에 반영하였으며, power law와 SIMPLER 알고리즘을 사용하였다. 개발된 모형을 기존의 실험 결과와 비교하여 모형의 적용성을 확인하였다. 밀도류의 진행 속도, 흐름과 농도의 무차원 수직 구조를 기존 수리실험과 비교하였다. 모의 결과 본 연구에서 개발한 모형이 실험의 선단부 속도를 유사하게 모의하였다. 완전히 발달한 밀도류의 수직구조 모의에서 무차원 유속과 무차원 농도의 수직분포가 실험과 잘 일치하였고, 유입부로부터의 거리에 관계없이 서로 유사한 결과를 보였다. 또한, 불연속 유입 밀도류의 모의를 통해 밀도류와 주변수체 사이의 불안정을 살펴보았다. 밀도류와 주변수체의 경계면에서 발생하는渦를 모의할 수 있었고, 이에 따라 실험 논문에서 제시된 경계면의 형상을 유사하게 예측하였다. 특히, 선단부에서 바닥과 주변수체의 영향으로 상·하부에 반대방향의渦가 발생함을 확인할 수 있었다.

#### 참 고 문 헌

- Britter, R.E. and Linden, P.F. (1980). "The motion of the front of a gravity current traveling down an incline." *Journal of Fluid Mechanics*, 99(3), 531-543.
- Cantero, M.I., Garcia, M.H., Buscaglia, G.C., Bombardelli, F.A., and Dari, E.A. (2003). "Multidimensional CFD simulation of a discontinuous density current." *30th IAHR Congress*, Thessaloniki, Greece.
- Choi, S.U. and Garcia, M.H. (2002). " $k-\epsilon$  turbulence modeling of density currents developing two dimensionally on a slope." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 128(1), 55-63.

Eghbalzadeh, A., Paik, J., and Sotiropoulos, F. (2008). "Two- and three-dimensional unsteady RANS modeling of discontinuous gravity currents in rectangular domains." (submitted)

Garcia, M.H. (1993). "Hydraulic jumps in sediment-driven bottom currents." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 119(10), 1094-1117.

Hartel, C., Carlsson, F., and Thunblom, M. (2000). "Analysis and direct numerical simulation of the flow at a gravity-current head. Part 2. The lobe-and-cleft instability." *Journal of Fluid Mechanics*, 418, 213-229.

Huang, H., Imran, J., and Pirmez, C. (2005). "Numerical model of turbidity current with a deforming bottom boundary." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 131(4), 283-293.

Huppert, H.E. and Simpson, J.E. (1980). "The slumping of gravity currents." *Journal of Fluid Mechanics*, 99(4), 785-799.

Lauder, B.E. and Rodi, W. (1983). "The turbulent wall jet-measurements and modeling." *Annual Reviews of Fluid Mechanics*, 15, 429-459.

Simpson, J.E. (1999). *Gravity Currents*, Cambridge University Press.

표 1.  $k-\epsilon$  모형의 난류모형상수

$C_\mu$	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	$C_{\epsilon 3}$	$\sigma_k$	$\sigma_\epsilon$	$\sigma_d$
0.09	1.44	1.92	0.3	1.0	1.3	0.85

표 2. 경사에 따른 연속 유입 밀도류 수치모의 조건

case	$\theta^\circ$ ( )	$L$ ( m )	$h_0$ ( m )	$U_0$ ( m/s )	$\Delta_0$	$\Phi_0 (= g_0' Q)$ ( $cm^3/s^3$ )
C1	5	2.4	0.035	0.059	0.01	202
C2	10	2.4	0.034	0.058	0.01	192
C3	15	2.4	0.033	0.057	0.01	180
C4	30	2.4	0.030	0.054	0.01	160
C5	45	2.4	0.030	0.054	0.01	160
C6	60	2.4	0.030	0.054	0.01	160

표 3. 불연속 유입 밀도류의 수치모의 조건

case	$\theta^\circ$ ( )	$L$ ( m )	$x_0$ ( m )	$h_0$ ( m )	$\Delta_0$
D1	0	8	0.39	0.149	0.0093
D2	0	1.2	0.30	0.100	0.0114

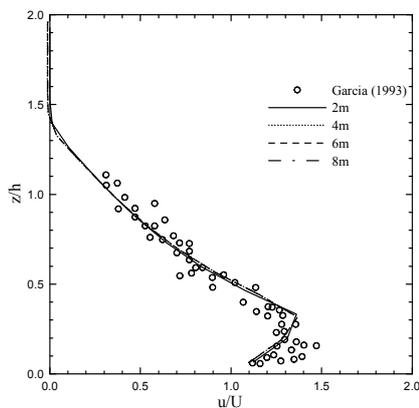


그림 1. 거리에 따른 무차원 유속의 수직 분포

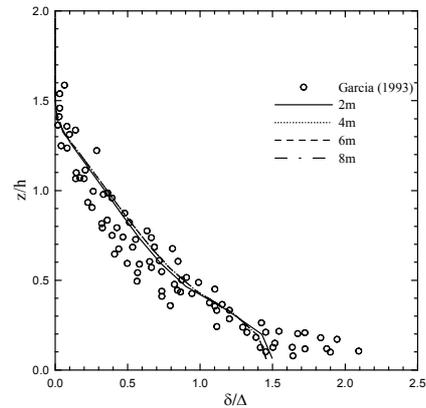


그림 2. 거리에 따른 무차원 농도의 수직 분포

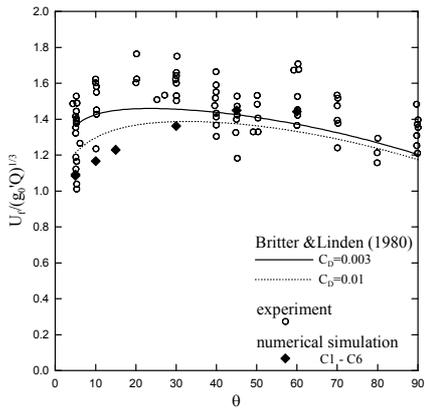


그림 3. 사면 경사에 따른 연속 유입 밀도류 무차원 선단부 속도

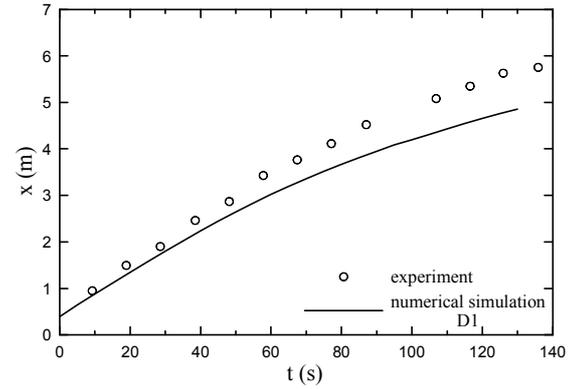


그림 4. 시간에 따른 불연속 유입 밀도류 선단부의 위치

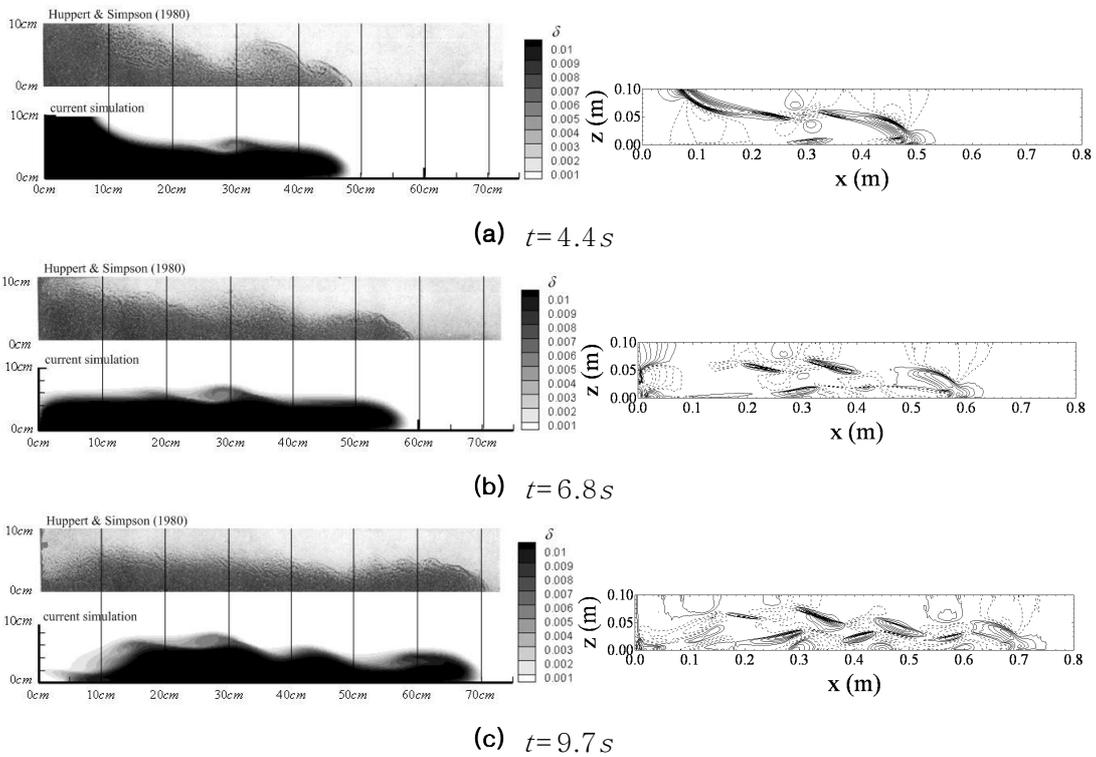


그림 5. 불연속 유입 밀도류의 시간에 따른 수치모의 결과 (D2)