변분법을 이용한 확장된 티모센코 보에 대한 스펙트럴 요소 모델링

Spectral Element Modeling of an Extended Timoshenko Beam: Variational Approach

이 창 호*　　이 우 식**

Lee, Changho　　Usik Lee

ABSTRACT

Periodic lattice structures such as the large space lattice structures and carbon nanotubes may take the extension-transverse shear-bending coupled vibrations, which can be well represented by the extended Timoshenko beam theory. In this paper, the spectrally formulated finite element model (simply, spectral element model) has been developed for extended Timoshenko beams and applied to some typical periodic lattice structures such as the armchair carbon nanotube, the periodic plane truss, and the periodic space lattice beam.

1. 서 론

구조 역학에서 보에 관한 이론을 격자 구조에 적용할 경우 전단 변형에 대한 고려는 매우 중요하다. 또한 격자 구조가 중심축에 대해 비 대칭형일 경우 횡 방향의 전단 변형과 굽힘에 의한 변형을 수반하게 된다. 이러한 격자구조를 가지는 구조물의 예는 보 형태의 격자 구조와 탄소 나노튜브 등이 있다. 티모센코 보 이론은 오일러-베르누이 보 이론에, 전단 변형과 회전 관성에 대한 영향을 추가한 보다 발전된 이론이다. 반면에, 확장된 티모센코 보 이론은 티모센코 보 이론에, 축방향 변형과 횡방향 변형과 굽힘에 의한 변형 사이에 커플링을 고려한 이론이다. 그러므로, 보 형태의 격자구조에 대해 동적 해석을 할 경우 확장된 티모센코 보 이론이 기존의 이론보다 적합하다.

선행된 연구에서 티모센코 보를 비롯하여 굽힘과 비틀림 사이의 커플링, 축방향과 비틀림 사이의 커플링이 고려된 보 등에 대해서는 스펙트럴 요소에 관한 연구가 수행되었다. 하지만 확장된 티모센코 보에 대한 연구는 수행되지 않았으므로, 본 논문에서는 티모센코 보에 대한 스펙트럴 요소를 변분법을 이용하여 유도하고, 이를 축방향과 횡방향 전단과 굽힘에 대해 커플링 되어있는 구조물인 보 형태의 격자구조 또는 나노튜브 등에 적용하였다.

2. 운동방정식

** 책임저자: 정회원, 인하대학교, 기계공학과, 교수

Email: ulee@inha.ac.kr

TEL: (032) 860-8780　FAX: (032) 860-1434

* 학생회원 • 인하대학교 기계공학과 석사과정 Email: pumpkin81@naver.com

$$\begin{Bmatrix} T' \\ Q' \\ M' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 & \rho R \\ 0 & \rho A & 0 \\ \rho R & 0 & \rho I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q \end{Bmatrix} \tag{1}$$

여기서, 프라임 ($'$)은 공간 좌표계(x 축)에 대한 미분을 나타낸다. T , Q , M 은 각각 축방향 힘, 횡방향 전단력, 굽힘 모멘트를 나타내고, u , w , θ 는 각각 축방향, 횡방향, 기울기에 대한 변위를 나타낸다. ρA , ρR , ρI 는 각각 단위 길이당 질량, 일차 관성 모멘트, 이차 관성 모멘트를 나타낸다. 또한 확장된 티모센코 빔의 힘-변위 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} T \\ Q \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & C_1 & C_2 \\ C_1 & GA & C_3 \\ C_2 & C_3 & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ w' - \theta \\ \theta' \end{Bmatrix} \tag{2}$$

여기서, C_1, C_2, C_3 는 각각 축방향, 횡방향 전단, 굽힘에 대한 변형 사이에 커플링을 나타내며, 식 (1) 과 식 (2)에서 $\rho A, C_1, C_2, C_3$ 를 소거하면 고전 티모센코 보와 봉에 대한 방정식으로 나타낼 수 있다.

3. 스펙트럴 요소 유도

확장된 티모센코 보의 스펙트럴 요소를 유도 하기 위해서는 DFT(Discrete Fourier Transform) 이론을 이용하여 각각의 자유도를 다음과 같이 표현한다.

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{u}_n(x) e^{i\omega_n t}, \quad w(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{w}_n(x) e^{i\omega_n t}, \quad \theta(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{\theta}_n(x) e^{i\omega_n t} \tag{3}$$

위와 같은 방법으로 축방향의 힘 $T(x,t)$, 횡방향 전단력 $Q(x,t)$, 굽힘 모멘트 $M(x,t)$ 를 나타내면,

$$T(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{T}_n(x) e^{i\omega_n t}, \quad Q(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{Q}_n(x) e^{i\omega_n t}, \quad M(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{M}_n(x) e^{i\omega_n t} \tag{4}$$

이고, 식 (3)과 (4)를 식 (1)과 (2)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 운동 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} EA & C_1 & C_2 \\ C_1 & GA & C_3 \\ C_2 & C_3 & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}'' \\ \bar{w}'' \\ \bar{\theta}'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -C_1 \\ 0 & 0 & -GA \\ C_1 & GA & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}' \\ \bar{w}' \\ \bar{\theta}' \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GA \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \omega^2 \begin{bmatrix} \rho A & 0 & \rho R \\ 0 & \rho A & 0 \\ \rho R & 0 & \rho I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5}$$

식 (5)의 일반해를 다음과 같이 가정한다.

$$\bar{u}(x) = \alpha W e^{ikx}, \qquad \bar{w}(x) = W e^{ikx}, \qquad \bar{\theta}(x) = \beta W e^{ikx} \tag{6}$$

여기서, k 는 파수이며 식 (6)을 식 (5)에 대입하여 분산 관계식을 구하면 다음과 같다.

$$a_1 k^6 + a_2 k^4 + a_3 k^2 + a_4 = 0 \tag{7}$$

여기서, a_1, a_2, a_3, a_4 는 물성치와 주파수에 의해 결정되는 계수 들이다.

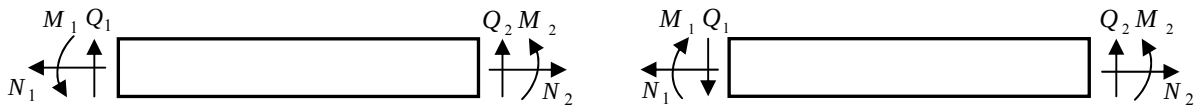
식 (7)로부터 6개의 파수 k 를 구할 수 있으며, 식 (6)로부터 α 와 β 를 결정하여, 식 (5)의 일반해를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\bar{u}(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)[diag(\alpha_j)]\boldsymbol{W}, \quad \bar{w}(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{W}, \quad \bar{\theta}(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)[diag(\beta_j)]\boldsymbol{W} \quad (j = 1,2,3,4,5,6) \tag{8}$$

그림 1에 보인 각 절점의 자유도와 힘과 모멘트는 다음과 같이 정의 된다.

$$\boldsymbol{d} = \{U_1 \quad W_1 \quad \Theta_1 \quad U_2 \quad W_2 \quad \Theta_2\}^{\mathrm{T}} = \{\bar{u}(0) \quad \bar{w}(0) \quad \bar{\theta}(0) \quad \bar{u}(L) \quad \bar{w}(L) \quad \bar{\theta}(L)\}^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{f} = \{T_1 \quad Q_1 \quad M_1 \quad T_2 \quad Q_2 \quad M_2\}^{\mathrm{T}} = \{-\bar{T}(0) \quad -\bar{Q}(0) \quad -\bar{M}(0) \quad \bar{T}(L) \quad \bar{Q}(L) \quad \bar{M}(L)\}^{\mathrm{T}} \tag{10}$$



(a) A Spectral Element (b) Solid mechanics

그림 1. Sign convention for (a) SEM & (b) Solid Mechanics

식 (8)을 식 (9)에 대입하면 주파수 영역에서의 형상함수를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{u}(x) = \boldsymbol{N}_U(x;\omega)\boldsymbol{d}, \quad \bar{w}(x) = \boldsymbol{N}_W(x;\omega)\boldsymbol{d}, \quad \bar{\theta}(x) = \boldsymbol{N}_\Theta(x;\omega)\boldsymbol{d} \tag{11}$$

식 (5)에 변분법을 이용하여 식 (11)을 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\boldsymbol{S}(\omega)\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f} \tag{12}$$

여기서,

$$\begin{aligned} S(\omega) = \int_0^L \{ & EA\boldsymbol{N}_U'^{\,T}\boldsymbol{N}_U' + \kappa GA[\boldsymbol{N}_W'^{\,T}\boldsymbol{N}_W' + \boldsymbol{N}_\Theta^T\boldsymbol{N}_\Theta - (\boldsymbol{N}_\Theta^T\boldsymbol{N}_W' + \boldsymbol{N}_W'^{\,T}\boldsymbol{N}_\Theta)] + EI\boldsymbol{N}_\Theta'^{\,T}\boldsymbol{N}_\Theta' \\ & + C_1[\boldsymbol{N}_U'^{\,T}\boldsymbol{N}_W' + \boldsymbol{N}_W'^{\,T}\boldsymbol{N}_U' - (\boldsymbol{N}_U'^{\,T}\boldsymbol{N}_\Theta + \boldsymbol{N}_\Theta^T\boldsymbol{N}_u')] + C_2(\boldsymbol{N}_U'^{\,T}\boldsymbol{N}_\Theta' + \boldsymbol{N}_\Theta'^{\,T}\boldsymbol{N}_U') \\ & + C_3[\boldsymbol{N}_W'^{\,T}\boldsymbol{N}_\Theta' + \boldsymbol{N}_\Theta'^{\,T}\boldsymbol{N}_W' - (\boldsymbol{N}_\Theta'^{\,T}\boldsymbol{N}_\Theta + \boldsymbol{N}_\Theta^T\boldsymbol{N}_\Theta')] \\ & - \omega^2[\rho A(\boldsymbol{N}_U^T\boldsymbol{N}_U + \boldsymbol{N}_W^{\,T}\boldsymbol{N}_W) + \rho R(\boldsymbol{N}_U^T\boldsymbol{N}_\Theta + \boldsymbol{N}_\Theta^T\boldsymbol{N}_U) + \rho I\boldsymbol{N}_\Theta^T\boldsymbol{N}_\Theta]\}\, dx\, \boldsymbol{d} \end{aligned} \tag{13}$$

4. 수치예제

본 논문에서는 위에서 유도된 확장된 티모센코 보의 스펙트럴 요소를 Armchair single-walled carbon nanotube(SWCNT), Periodic plane truss에 적용하여 양단 단순지지와 일단 고정에 관한 경우에 대하여 고유진동수(표 1,2)를 구해 보았다.

그림 2(a)는 Armchair SWCNT를 나타낸다. 수치 문제에 적용하기 위하여 본 논문에서는 Chirality 벡터가 (5,5)이고, RCU(Repeating Cell Unit)은 50개일 경우에 대한 물성치를 사용하였다. 그림 2(b)는 한 개의 Plane truss에 대하여 나타낸 그림이며, Plane truss를 이루는 각각의 보 요소들은 같은 물성치를 가지며, 질량밀도는 $2768\ kg/m^3$, 탄성계수는 $71.7 \times 10^9\ N/m^2$ 이다. Plane truss 경우에는 20개의 셀을 사용하였다.

(a) (b)

그림 2. (a) Armchair SWCNT,(b) Periodic plane truss

표 1. Armchair SWCNT (5,5) 의 고유 진동수

Boundary conditions	Natural frequency (GHz)				
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
Clamped-free	19.3	119.7	329.3	440.7	630.1
Simply-simply supported	54.1	213.8	440.7	772.2	819.1

표 2. Periodic plane truss의 고유 진동수

Boundary conditions	Natural frequency (Hz)				
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
Clamped-free	0.30	1.76	4.42	7.53	10.77
Simply-simply supported	0.96	3.36	6.39	9.59	12.81

5. 결 론

본 논문에서는 확장된 티모센코 보에 대한 운동 방정식으로부터 변분법을 이용하여 스펙트럴 요소 모델을 유도하였다. 이로부터 축방향과 전단과 굽힘이 커플된 경우의 구조물인 Armchair SWCNT와 Periodic plane truss에 적용하여 각각 양단 단순지지와 일단 고정의 경계 조건에 대하여 고유진동수를 구해보았다.

참고문헌

U. Lee (1990), "Dynamic continuum modeling of beamlike space structures using finite-element matrices", *AIAA Journal*, 28(4), pp.725-731.

Doyle, J. F. (1997), "Wave Propagation in Structures: Spectral Analysis Using Fast Discrete Fourier Transforms", *Springer-Verlag*, New York.

H. Oh, U. Lee (2006), "Effective structural parameters of armchair carbon nanotubes", *Proceedings of the Asian Pacific Conference Fracture and Strength*, Sanya, Hainan Island, China.

U. Lee (2004), "Spectral Element Method in Structural Dynamics", *Inha University Press*, Inha University, Incheon, Korea.

Newland, D.E. (1993), "Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis", *Longman*, New York.