회전하는 환상 디스크의 면내 고유진동 해석
In-Plane Natural Vibration Analysis of a Rotating Annular Disk

김창부*　　송승관**
Kim, Chang-Boo　　Song, Seung Gwan

ABSTRACT

In this paper, we present the equations of motion by which the natural vibration of a rotating annular disk can be accurately analyzed. These equations are derived from the theory of finite deformation and the principle of virtual work. The radial displacements of annular disk which is rotating at constant angular velocity are determined by non-linear equations formulated using 1-dimensional finite elements in radial direction. The equations of the in-plane vibrations at disturbed state are also formulated using 1-dimensional finite elements in radial direction along the number of nodal diameters. They are expressed as in functions of the radial displacements at the steady state and the disturbed displacements about the steady state. In-plane static deformation modes of the annular disk are used as the interpolation functions of 1-dimensional finite elements in radial direction. The natural vibrations of an annular disk with different boundary conditions are analyzed by using the presented model and the 3-dimensional finite element model to verify accuracy of the presented equations of motion. Its results are compared and discussed.

1. 서　론

공학 구조물에서 중요한 요소 중에 하나인 디스크의 진동에 관하여 오래 전부터 많은 연구가 수행되어 왔다. 특히 회전하는 디스크의 고유진동 특성, 즉 고유진동수와 고유모드 형상의 파악은 회전 기계장치를 설계하는 데에 있어서 필수적인 사항이다. 또한 회전 기계장치의 정밀한 진동 튜닝을 위해서는 그 주요 구성품인 디스크의 진동특성을 정밀하게 파악해야 한다. 전형적인 회전 기계장치로는 터빈의 익차(bladed disk), 에너지 저장장치의 프라이 휠(flywheel) 및 차량의 제동 디스크(brake disk) 등을 들 수 있고, 특히 30년 전부터 개발되어온 컴퓨터의 프로피 디스크(floppy disk), 하드 디스크(hard disk) 및 컴팩트 디스크(compact disk) 등이 있다.

디스크의 고유진동에 관한 연구는 주로 굽힘 진동인 면외진동에 관하여 오래 전부터 많은 연구자에 의해서 수행되어 왔다[1-7]. 그러나 면내진동에 관한 연구는 면외진동에 비해서 많은 편은 아니지만 최근에 많이 수행되었으며 대표적인 연구 논문은 참고문헌[8-12]과 같다.

본 논문에서는 일정한 각속도로 회전하고 있는 환상 디스크의 운동방정식은 유한변형 이론과 가상일의 원리로부터 유도되고, 일정한 각속도로 회전하고 있는 정상상태에서의 환상 디스크의 반경방향 변위는 반경방향 1차원 유한요소를 사용하여 구축되는 정적 비선형 방정식으로부터 구해진다. 또한 교란상태에서의 면내 진동방정식은 절 직경 수에 따르는 반경방향 1차원 유한요소를 사용하여 구축되고 정상상태에서의 반경방향 변위 및 정상상태로부터 교란된 변위의 함수로 표현된다. 반경방향 1차원 유한요

* 인하대학교, 기계공학부 교수, 정회원
E-mail : kimcb@inha.ac.kr
TEL : (032)860-7383　FAX : (032)868-1716
** 인하대학교대학원, 기계공학과 석사과정, 비회원

소의 보간 함수로는 환상 디스크의 면내 정적 변형모드가 사용된다. 제시된 운동방정식의 정밀성을 검증하기 위해서 경계조건이 서로 다른 디스크의 고유진동을 제시된 모델 및 3차원 유한요소 모델을 사용하여 해석하고, 그 결과를 비교하고 검토한다.

2. 회전하는 디스크의 운동과 변형

디스크 좌표계 $Oxyz$는 내경 a, 외경 b, 축 방향 두께 h를 갖는 균일한 디스크의 중심에 고착되어 x-축 방향으로 일정한 각속도 Ω를 가지고 회전하고 있다. 반경 방향으로 r, x-축에서 원주 방향으로 θ에 위치하면서 중간면에 수직한 단선(cross line)의 기준 좌표계 $C\xi\eta\zeta$는 직선의 중심점인 C점을 원점으로 하고 반경 방향 ξ, 접선 방향 η, 축 방향 ζ의 축을 갖는다.

디스크가 변형할 때에 단선은 변형하지 않고 직선을 유지한다고 가정한다. 단선에 고착되어 움직이는 단선 좌표계 $C'\xi'\eta'\zeta'$는 단선 기준 좌표계 $C\xi\eta\zeta$와 일치한 상태에서 ξ 방향으로 u_ξ, η 방향으로 u_η 만큼 변위되며 u_ξ, u_η는 r, θ 및 시간 t의 함수이다.

따라서 (r,θ)에 위치한 단선 상에서 z에 위치한 질점 P의 변위는 다음과 같다.

$$\vec{u}_P = u_\xi \vec{e}_\xi + u_\eta \vec{e}_\eta \tag{1}$$

변형 후의 질점 P의 절대위치, 절대가속도 및 가상변위는 다음과 같이 표현된다.

$$\vec{r}_P = (r + u_\xi)\vec{e}_\xi + u_\eta \vec{e}_\eta + z\vec{e}_\zeta \tag{2}$$
$$\vec{a}_P = \left\{-\Omega^2(r+u_\xi) - 2\Omega\dot{u}_\eta + \ddot{u}_\xi\right\}\vec{e}_\xi + \left\{-\Omega^2 u_\eta + 2\Omega\dot{u}_\xi + \ddot{u}_\eta\right\}\vec{e}_\eta \tag{3}$$
$$\delta\vec{r}_P = \delta u_\xi \vec{e}_\xi + \delta u_\eta \vec{e}_\eta \tag{4}$$

따라서 밀도가 ρ인 회전하는 디스크의 가속도량에 의한 가상일은 다음과 같다.

$$\delta A = \int_V \left[\delta\vec{r}_P \cdot \vec{a}_P\right]\rho\, dV \tag{5}$$

좌표계 $C\xi\eta\zeta$에 대한 변위 구배행렬 $[h]$의 성분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &h_{\xi\xi} = u_{\xi,r},\ h_{\xi\eta} = \frac{1}{r}(u_{\xi,\theta} - u_\eta),\ h_{\xi\zeta} = 0 \\ &h_{\eta\xi} = u_{\eta,r},\ h_{\eta\eta} = \frac{1}{r}(u_{\eta,\theta} + u_\xi),\ h_{\eta\zeta} = 0 \\ &h_{\zeta\xi} = 0,\ h_{\zeta\eta} = 0,\ \ h_{\zeta\zeta} = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

좌표계 $C\xi\eta\zeta$에 대한 Lagrange 변형도 행렬은 다음과 같다.

$$[\epsilon] = \frac{1}{2}([h] + [h]^T) + \frac{1}{2}[h]^T[h] \tag{7}$$

$\epsilon_{\zeta\zeta}, \gamma_{\zeta\xi}(=\epsilon_{\zeta\xi}+\epsilon_{\xi\zeta}), \gamma_{\eta\zeta}(=\epsilon_{\eta\zeta}+\epsilon_{\zeta\eta})$는 0 이 되므로 평면응력을 고려하여 Kirchhoff응력과 Lagrange변형도의 관계를 Young계수 E, Poisson비 ν로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\sigma_{\xi\xi} = \overline{E}(\epsilon_{\xi\xi} + \nu\epsilon_{\eta\eta}) \\ &\sigma_{\eta\eta} = \overline{E}(\nu\epsilon_{\xi\xi} + \epsilon_{\eta\eta}) \\ &\sigma_{\xi\eta} = G\gamma_{\xi\eta} \end{aligned} \tag{8}$$

여기서 $\overline{E} = E/(1-\nu^2)$, $G = E/2(1+\nu)$

따라서 디스크의 가상변형에너지는 다음과 같다.

$$\delta V = \int_{r=a}^{b}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=-h/2}^{h/2}\left[\delta\epsilon_{\xi\xi}\,\sigma_{\xi\xi} + \delta\epsilon_{\eta\eta}\,\sigma_{\eta\eta} + \delta\gamma_{\xi\eta}\,\sigma_{\xi\eta}\right] r\,dz\,d\theta\,dr \tag{9}$$

외력을 받지 않으면서 일정한 각속도로 회전하고 있는 디스크에 대한 가상일의 원리는 다음과 같다.

$$\delta A + \delta V = 0 \quad \forall\ \delta u_\xi,\ \delta u_\eta \tag{10}$$

3. 회전하는 디스크의 운동방정식

3.1 정상상태(steady state)에서의 평형방정식

일정한 각속도 Ω로 회전하고 있는 디스크의 정상상태에서의 변위는 디스크 형상의 z축에 대한 대칭성 및 $r-\theta$ 면에 대한 대칭성을 고려하면 다음과 같다.

$${}^s u_\xi = {}^s u_\xi(r),\ {}^s u_\eta = 0 \tag{11}$$

변수의 왼쪽 윗 첨자 s는 정상상태에서의 변수 값을 나타낸다.
외력을 받지 않으면서 회전하는 디스크의 정상상태에서의 가상일의 원리는 다음과 같이 표현된다.

$${}^s\delta A + {}^s\delta V = 0 \quad \forall\ \delta u_\xi \tag{12}$$

여기서

$${}^s\delta A = \int_{r=a}^{b} 2\pi\rho h\left[\delta u_\xi\ \left\{-\Omega^2(r+{}^s u_\xi)r\right\}\right] dr$$
$${}^s\delta V = \int_{r=a}^{b} 2\pi h\left[\delta u_{\xi,r}\left(1+{}^s u_{\xi,r}\right){}^s\sigma_{\xi\xi} + \frac{1}{r^2}\delta u_\xi\left(r+{}^s u_\xi\right){}^s\sigma_{\eta\eta}\right] r\,dr$$

r의 함수인 변위 ${}^s u_\xi$를 절점변위벡터 ${}^s u$와 보간 함수 $N(r)$을 사용하여 다음과 같이 표현하면,

$${}^s u_\xi = N^T\,{}^s u \tag{13}$$

식(12)로부터 얻어지는 정상상태에서의 비선형 평형방정식은 다음과 같다.

$$[K_S]\{{}^s u\} = \{{}^s f_C\} \tag{14}$$

여기서

$$f_C = \int_{r=a}^{b} \pi\rho h\,\Omega^2\,\{N\}\,r^2\,dr$$
$$K_S = K_0 + \frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{4}K_2 + \frac{1}{2}K_\sigma - \Omega^2 M_C$$
$$K_0 = \int_{r=a}^{b} \pi h\,\overline{E}\,[N_{,r}\,N_{,r}^T + \nu\frac{1}{r}\,(N_{,r}\,N^T + N\,N_{,r}^T) + \frac{1}{r^2}\,N\,N^T]\,r\,dr$$

$$K_1 = \int_{r=a}^{b} \pi h \overline{E} \left[2\, {}^s u_{\xi,r}\, N_{,r}\, N_{,r}^T + \nu \left({}^s u_{\xi,r} + \frac{1}{r}\, {}^s u_\xi \right) \frac{1}{r} \left(N_{,r}\, N^T + N N_{,r}^T \right) + 2\, {}^s u_\xi \frac{1}{r^3}\, N N^T \right] r\, dr$$

$$K_2 = \int_{r=a}^{b} \pi h \overline{E} \left[{}^s u_{\xi,r}^2\, N_{,r}\, N_{,r}^T + \nu\, {}^s u_{\xi,r}\, {}^s u_\xi \frac{1}{r^2} \left(N_{,r}\, N^T + N N_{,r}^T \right) + {}^s u_\xi^2 \frac{1}{r^4}\, N N^T \right] r\, dr$$

$$K_\sigma = \int_{r=a}^{b} \pi h \left[{}^s \sigma_{\xi\xi} N_{,r}\; N_{,r}^T + \frac{1}{r^2}\, {}^s \sigma_{\eta\eta}\, N N^T \right] r\, dr$$

$$M_C = \int_{r=a}^{b} \pi \rho h \left[N N^T\right] r\, dr$$

$${}^s u = \left({}^s u_{\xi 1}\; {}^s u_{\xi 2}\; \cdot\; \cdot\; {}^s u_{\xi m} \right)^T, \quad m = \text{Number of nodes}$$

3.2 교란상태(disturbed state)에서의 고유진동 방정식

정상상태로부터 교란된 변위는 다음과 같이 정의된다.

$${}^d u_\xi = u_\xi - {}^s u_\xi, \quad {}^d u_\eta = u_\eta - {}^s u_\eta \tag{15}$$

상기 식에서 변수의 왼쪽 윗 첨자 d는 정상상태로부터 교란된 변수 값을 나타내며, 정상상태에서의 미분연산자(differential operator)처럼 사용된다.

교란상태에서의 가상일의 원리는 다음과 같이 표현된다.

$${}^d \delta A + {}^d \delta V = 0 \quad \forall\ \delta u_\xi, \delta u_\eta \tag{16}$$

여기서

$$\begin{aligned}
{}^d \delta A &\equiv \delta A - {}^s \delta A \approx {}^d(\delta A) \\
&= \int_{r=a}^{b} \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho h \Big[\delta u_\xi \left(-\Omega^2\, {}^d u_\xi - 2\Omega\, {}^d \dot{u}_\eta + {}^d \ddot{u}_\xi \right) \\
&\qquad + \delta u_\eta \left(-\Omega^2\, {}^d u_\eta + 2\Omega\, {}^d \dot{u}_\xi + {}^d \ddot{u}_\eta \right) \Big]\, r\, d\theta\, dr \\
{}^d \delta V &\equiv \delta V - {}^s \delta V \approx {}^d(\delta V) \\
&= \int_{r=a}^{b} \int_{\theta=0}^{2\pi} h \Big[\left(\delta u_{\xi,r}\, {}^d u_{\xi,r} + \delta u_{\eta,r}\, {}^d u_{\eta,r} \right) {}^s \sigma_{\xi\xi} \\
&\qquad + \frac{1}{r^2} \left[(\delta u_{\xi,\theta} - \delta u_\eta)({}^d u_{\xi,\theta} - {}^d u_\eta) + (\delta u_{\eta,\theta} + \delta u_\xi)({}^d u_{\eta,\theta} + {}^d u_\xi) \right] {}^s \sigma_{\eta\eta} \Big]\, r\, d\theta\, dr \\
&\quad + \int_{r=a}^{b} \int_{\theta=0}^{2\pi} \Big[\delta u_{\xi,r} \left(1 + {}^s u_{\xi,r} \right) {}^d N_{\xi\xi} + \frac{1}{r} (\delta u_{\eta,\theta} + \delta u_\xi) \left(1 + \frac{1}{r}\, {}^s u_\xi \right) {}^d N_{\eta\eta} \\
&\qquad + \left\{ \delta u_{\eta,r} \left(1 + \frac{1}{r}\, {}^s u_\xi \right) + \frac{1}{r} (\delta u_{\xi,\theta} - \delta u_\eta) \left(1 + {}^s u_{\xi,r} \right) \right\} {}^d N_{\xi\eta} \Big]\, r\, d\theta\, dr
\end{aligned}$$

$${}^d N_{\xi\xi} = \int_{z=-h/2}^{h/2} {}^d \sigma_{\xi\xi}\, dz = \overline{E} h \left[{}^d u_{\xi,r} \left(1 + {}^s u_{\xi,r} \right) + \nu \frac{1}{r} ({}^d u_{\eta,\theta} + {}^d u_\xi) \left(1 + \frac{1}{r}\, {}^s u_\xi \right) \right]$$

$${}^d N_{\eta\eta} = \int_{z=-h/2}^{h/2} {}^d \sigma_{\eta\eta}\, dz = \overline{E} h \left[\nu\, {}^d u_{\xi,r} \left(1 + {}^s u_{\xi,r} \right) + \frac{1}{r} ({}^d u_{\eta,\theta} + {}^d u_\xi) \left(1 + \frac{1}{r}\, {}^s u_\xi \right) \right]$$

$${}^d N_{\xi\eta} = \int_{z=-h/2}^{h/2} {}^d \sigma_{\xi\eta}\, dz = G h \left[{}^d u_{\eta,r} \left(1 + \frac{1}{r}\, {}^s u_\xi \right) + \frac{1}{r} ({}^d u_{\xi,\theta} - {}^d u_\eta) \left(1 + {}^s u_{\xi,r} \right) \right]$$

디스크의 면내변위를 다음과 같이 Fourier 급수로 표현하고,

$${}^d u_\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \left({}^d u_{\xi Cn} \cos n\theta + {}^d u_{\xi Sn} \sin n\theta \right) \tag{17}$$

$${}^d u_\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \left({}^d u_{\eta Cn} \cos n\theta + {}^d u_{\eta Sn} \sin n\theta \right)$$

r의 함수인 변위 ${}^{d}u_{\xi Cn}$, ${}^{d}u_{\xi Sn}$, ${}^{d}u_{\eta Cn}$ 및 ${}^{d}u_{\eta Sn}$을 다음과 같이 절점변위벡터 ${}^{d}u_{n}$와 보간 함수 $N_{\xi Cn}(r)$, $N_{\xi Sn}(r)$, $N_{\eta Cn}(r)$ 및 $N_{\eta Sn}(r)$을 사용하여 표현하면,

$$ {}^{d}u_{\xi Cn} = N_{\xi Cn}(r)^{T}\,{}^{d}u_{n},\ {}^{d}u_{\xi Sn} = N_{\xi Sn}(r)^{T}\,{}^{d}u_{n},\ {}^{d}u_{\eta Cn} = N_{\eta Cn}(r)^{T}\,{}^{d}u_{n},\ {}^{d}u_{\eta Sn} = N_{\eta Sn}(r)^{T}\,{}^{d}u_{n} \tag{18} $$

식(16)로부터 교란상태에서의 운동방정식이 각각의 절 직경 수(number of nodal diameters) n에 대하여 다음과 같이 얻어진다.

$$ [M_n]\{{}^{d}\ddot{u}_n\} + 2\,\Omega\,[M_{Gn}]\{{}^{d}\dot{u}_n\} + \left[K_n - \Omega^2 M_n\right]\{{}^{d}u_n\} = \{0\} \tag{19} $$

여기서

$$ \begin{aligned}
M_n &= \int_{r=a}^{b} \pi\rho h\left[N_{\xi Cn}\,N_{\xi Cn}^{T} + N_{\xi Sn}\,N_{\xi Sn}^{T} + N_{\eta Cn}\,N_{\eta Cn}^{T} + N_{\eta Sn}\,N_{\eta Sn}^{T}\right] r\,dr \\
M_{Gn} &= \int_{r=a}^{b} \pi\rho h\left[-N_{\xi Cn}\,N_{\eta Cn}^{T} - N_{\xi Sn}\,N_{\eta Sn}^{T} + N_{\eta Cn}\,N_{\xi Cn}^{T} + N_{\eta Sn}\,N_{\xi Sn}^{T}\right] r\,dr \\
K_n &= \int_{r=a}^{b} \pi h\Big(r\,{}^{s}\sigma_{\xi\xi}\left[N_{\xi Cn,r}\,N_{\xi Cn,r}^{T} + N_{\eta Cn,r}\,N_{\eta Cn,r}^{T} + N_{\xi Sn,r}\,N_{\xi Sn,r}^{T} + N_{\eta Sn,r}\,N_{\eta Sn,r}^{T}\right] \\
&\quad + \frac{1}{r}\,{}^{s}\sigma_{\eta\eta}\Big[(nN_{\xi Sn} - N_{\eta Cn})(nN_{\xi Sn} - N_{\eta Cn})^{T} + (nN_{\eta Sn} + N_{\xi Cn})(nN_{\eta Sn} + N_{\xi Cn})^{T} \\
&\qquad + (nN_{\xi Cn} + N_{\eta Sn})(nN_{\xi Cn} + N_{\eta Sn})^{T} + (nN_{\eta Cn} - N_{\xi Sn})(nN_{\eta Cn} - N_{\xi Sn})^{T}\Big] \\
&\quad + \overline{E}\,r\left(1 + {}^{s}u_{\xi,r}\right)^{2}\left[N_{\xi Cn,r}\,N_{\xi Cn,r}^{T} + N_{\xi Sn,r}\,N_{\xi Sn,r}^{T}\right] \\
&\quad + \overline{E}\,\nu\left(1 + {}^{s}u_{\xi,r}\right)\left(1 + \frac{1}{r}\,{}^{s}u_{\xi}\right)\Big[N_{\xi Cn,r}\,(nN_{\eta Sn} + N_{\xi Cn})^{T} + (nN_{\eta Sn} + N_{\xi Cn})\,N_{\xi Cn,r}^{T} \\
&\qquad - N_{\xi Sn,r}\,(nN_{\eta Cn} - N_{\xi Sn})^{T} - (nN_{\eta Cn} - N_{\xi Sn})\,N_{\xi Sn,r}^{T}\Big] \\
&\quad + \overline{E}\,\frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{r}\,{}^{s}u_{\xi}\right)^{2}\Big[(nN_{\eta Sn} + N_{\xi Cn})(nN_{\eta Sn} + N_{\xi Cn})^{T} \\
&\qquad + (nN_{\eta Cn} - N_{\xi Sn})(nN_{\eta Cn} - N_{\xi Sn})^{T}\Big] \\
&\quad + G\,\frac{1}{r}\left(1 + {}^{s}u_{\xi,r}\right)^{2}\Big[(nN_{\xi Sn} - N_{\eta Cn})(nN_{\xi Sn} - N_{\eta Cn})^{T} + (nN_{\xi Cn} + N_{\eta Sn})(nN_{\xi Cn} + N_{\eta Sn})^{T}\Big] \\
&\quad + G\left(1 + {}^{s}u_{\xi,r}\right)\left(1 + \frac{1}{r}\,{}^{s}u_{\xi}\right)\Big[N_{\eta Cn,r}\,(nN_{\xi Sn} - N_{\eta Cn})^{T} + (nN_{\xi Sn} - N_{\eta Cn})N_{\eta Cn,r}^{T} \\
&\qquad - N_{\eta Sn,r}\,(nN_{\xi Cn} + N_{\eta Sn})^{T} - (nN_{\xi Cn} + N_{\eta Sn})N_{\eta Sn,r}^{T}\Big] \\
&\quad + Gr\left(1 + \frac{1}{r}\,{}^{s}u_{\xi}\right)^{2}\left[N_{\eta Cn,r}\,N_{\eta Cn,r}^{T} + N_{\eta Sn,r}\,N_{\eta Sn,r}^{T}\right]\Big)\,dr
\end{aligned} $$

$$ {}^{d}u_{n} = \begin{Bmatrix} {}^{d}u_{Cn} \\ {}^{d}u_{Sn} \end{Bmatrix} $$

$$ {}^{d}u_{Cn} = \left({}^{d}u_{\xi Cn1}\ \ {}^{d}u_{\eta Sn1}\ \ {}^{d}u_{\xi Cn2}\ \ {}^{d}u_{\eta Sn2}\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ {}^{d}u_{\xi Cnm}\ \ {}^{d}u_{\eta Snm}\right)^{T} $$

$$ {}^{d}u_{Sn} = \left({}^{d}u_{\xi Sn1}\ \ -{}^{d}u_{\eta Cn1}\ \ {}^{d}u_{\xi Sn2}\ \ -{}^{d}u_{\eta Cn2}\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ {}^{d}u_{\xi Snm}\ \ -{}^{d}u_{\eta Cnm}\right)^{T} $$

진동수 ω_n, 절 직경 수 n의 순환대칭모드로 진동하는 디스크의 절점 변위를 다음과 같이 표현하면,

$$ {}^{d}u_{n} = Re\left\{U_n\,e^{j\omega_n t}\right\} \tag{20} $$

식(19)로부터 다음과 같은 고유진동 방정식이 얻어진다.

$$ \left[(j\omega_n)^2 M_n + (j\omega_n)2\Omega M_{Gn} + \left(K_n - \Omega^2 M_n\right)\right]\{U_n\} = \{0\} \tag{21} $$

여기서 $j=\sqrt{-1}$이며, M_n 및 K_n는 대칭행렬이고 M_{Gn}는 사대칭행렬이다.

식(21)을 만족하는 고유진동수 ω_n는 실수이며, 부호가 다른 고유진동수가 존재한다. 또한, 고유진동수 $\omega_n \geqq 0$에 대한 고유벡터가 U_n이면 고유진동수 $-\omega_n$에 대한 고유벡터는 U_n의 복소 공액 $\overline{U}_n$이다.

디스크의 절점 변위를 다음과 같이 표현하면,

$$\begin{aligned}\left\{{}^d u_n\right\} &= \frac{1}{2}\left\{U_n\, e^{j\omega_n t} + \overline{U}_n\, e^{-j\omega_n t}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\begin{Bmatrix} U_{Cn} \\ U_{Sn} \end{Bmatrix} e^{j\omega_n t} + \begin{Bmatrix} \overline{U}_{Cn} \\ \overline{U}_{Sn} \end{Bmatrix} e^{-j\omega_n t}\right\}\end{aligned} \tag{22}$$

$n \geqq 1$일 때의 고유진동 변위는 $U_{Cn} - jU_{Sn} = 0$이면 전향 진행파(forward traveling wave)이고, $U_{Cn} + jU_{Sn} = 0$이면 후향 진행파(backward traveling wave)임을 알 수 있다.

3.3 보간 함수

회전이 없는 정상상태에서의 정적 평형방정식의 일반해는 다음과 같다.

$${}^s u_\xi = C_1\, r + C_2\, r^{-1} \tag{23}$$

회전이 없는 교란상태에서의 정적 평형방정식의 일반해는 다음과 같다.

For $n = 0$

$$\begin{aligned} {}^d u_{\xi Cn} &= C_1\, r + C_2\, r^{-1} \\ {}^d u_{\eta Cn} &= -S_1\, r - S_2\, r^{-1} \end{aligned} \tag{24}$$

For $n = 1$

$$\begin{aligned} {}^d u_{\xi Cn} &= C_1(1-3\nu)\, r^2 + C_2 r^{-2} + C_3 + C_4(3-\nu)\ln r \\ {}^d u_{\eta Sn} &= C_1(5+\nu)\, r^2 + C_2\, r^{-2} - C_3 - C_4\,[(3-\nu)\ln r + (1+\nu)] \\ {}^d u_{\xi Sn} &= S_1(1-3\nu) r^2 + S_2\, r^{-2} + S_3 + S_4(3-\nu)\ln r \\ {}^d u_{\eta Cn} &= -S_1(5+\nu) r^2 - S_2 r^{-2} + S_3 + S_4\,[(3-\nu)\ln r + (1+\nu)] \end{aligned} \tag{25}$$

For $n \geqq 2$

$$\begin{aligned} {}^d u_{\xi Cn} &= -C_1[(1+\nu)n - 2(1-\nu)]\, r^{(n+1)} + C_2 r^{-(n+1)} + C_3 r^{(n-1)} + C_4[(1+\nu)n + 2(1-\nu)]\, r^{-(n-1)} \\ {}^d u_{\eta Sn} &= C_1[(1+\nu)n + 4]\, r^{(n+1)} + C_2 r^{-(n+1)} - C_3 r^{(n-1)} + C_4[(1+\nu)n - 4]\, r^{-(n-1)} \\ {}^d u_{\xi Sn} &= -S_1[(1+\nu)n - 2(1-\nu)]]\, r^{(n+1)} + S_2 r^{-(n+1)} + S_3 r^{(n-1)} + S_4[(1+\nu)n + 2(1-\nu)]\, r^{-(n-1)} \\ {}^d u_{\eta Cn} &= -S_1[(1+\nu)n + 4]\, r^{(n+1)} - S_2 r^{-(n+1)} + S_3 r^{(n-1)} - S_4[(1+\nu)n - 4]\, r^{-(n-1)} \end{aligned} \tag{26}$$

두께가 일정한 환상 디스크의 1차원 유한요소 보간 함수는 상기의 정적 해를 이용하여 얻어진다.

4. 회전하는 디스크의 고유진동 해석

수치해석에서 사용되는 환상 디스크의 물성치 및 크기는 다음과 같다.

$\rho = 7850$ kg/m^3, $E = 207$ GPa, $\nu = 0.3$, $h = 0.01\ \ 0$ m, $b = 1.000$ m.

$a/b = 0.5$의 환상 디스크에 대하여 3차원 유한요소 모델 및 제시된 1차원 환상 디스크 모델을 각각 사용하여 회전하는 디스크의 면내 고유진동을 해석하였다. 3차원 유한요소 모델에서는 디스크를 원주방향으로 36등분하고 등분된 부채꼴 디스크 단편을 반경방향으로 20등분, 원주방향으로 4등분, 축방향으로 2등분하여 분할된 20× 4× 2개의 육면체 20절점 고체요소를 사용하고 부채꼴 디스크 단편의 순환대칭

성을 이용하는 유한요소법[13]을 사용하였다. 1차원 환상 디스크 모델에서는 디스크를 반경방향으로 등분하여 본 연구에서 구축된 2절점의 환상 디스크 요소를 사용하였다.

도표 1. Comparison of the in-plane natural frequencies of a disk of $a/b=0.5$ with free inner-free outer boundaries for $n=0$

Ω (rad/s)	Frequency Order	ω_n (rad/s)							
		1-D Annular Disk Model							3-D FE Model
		2 Elements	4 Elements	8 Elements	16 Elements	32 Elements	64 Elements	128 Elements	
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	7156	7131	7125	7124	7123	7123	7123	7123
	3	24366	22362	21864	21741	21710	21702	21700	21700
	4	38642	35805	35087	34909	34864	34853	34850	34848
1000	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	7428	7405	7400	7398	7398	7398	7398	7555
	3	24816	22800	22294	22169	22137	22130	22128	22127
	4	38612	35841	35133	34956	34912	34901	34898	34925
2000	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	8194	8176	8171	8170	8170	8170	8170	8720
	3	26070	24016	23489	23357	23325	23316	23314	23317
	4	38611	36037	35358	35187	35145	35134	35132	35249

도표 2. Comparison of the in-plane natural frequencies of a disk of $a/b=0.5$ with free inner-free outer boundaries for $n=1$

Ω (rad/s)	Frequency Order	ω_n (rad/s)							
		1-D Annular Disk Model							3-D FE Model
		2 Elements	4 Elements	8 Elements	16 Elements	32 Elements	64 Elements	128 Elements	
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	9073	8983	8959	8953	8952	8951	8951	8951
	4	9073	8983	8959	8953	8952	8951	8951	8951
	5	26792	24386	23775	23623	23585	23576	23573	23572
	6	26792	24386	23775	23623	23585	23576	23573	23572
	7	37547	35069	34297	34097	34046	34034	34030	34028
	8	37547	35069	34297	34097	34036	34034	34030	34028
1000	1	1000 B	1000 B	1000 B	1000 B	1000 B	1000 B	1000 B	1000
	2	1000 B	1000 B	1000 B	1000 B	1000 B	1000 B	1000 B	1000
	3	8608 B	8517 B	8493 B	8487 B	8485 B	8485 B	8485 B	8485
	4	10296 F	10203 B	10177 F	10171 F	10169 F	10169 F	10169 F	10169
	5	27289 F	24881 F	24270 F	24118 F	24081 F	24071 F	24069 F	24068
	6	27314 B	24903 F	24280 B	24125 B	24086 B	24077 B	24074 B	24073
	7	37664 B	35146 B	34410 B	34221 B	34173 B	34161 B	34158 B	34157
	8	37702 F	35286 F	34520 F	34321 F	34271 F	34258 F	34255 F	34253
2000	1	2000 B	2000 B	2000 B	2000 B	2000 B	2000 B	2000 B	2000
	2	2000 B	2000 B	2000 B	2000 B	2000 B	2000 B	2000 B	2000
	3	8819 B	8723 B	8698 B	8691 B	8690 B	8689 B	8689 B	8689
	4	12190 F	12086 F	12056 F	12048 F	12046 F	12046 F	12046 F	12046
	5	28606 F	26164 F	25539 F	25383 F	25345 F	25335 F	25332 F	25331
	6	28810 B	26402 B	25759 B	25597 B	25557 B	25547 B	25544 B	25544
	7	37938 B	35461 B	34777 B	34604 B	34561 B	34550 B	34548 B	34546
	8	38230 F	35971 F	35243 F	35054 F	35007 F	34995 F	34992 F	34990

도표 3. Comparison of the in-plane natural frequencies of a disk of $a/b=0.5$ with free inner-free outer boundaries for $n=2$

Ω (rad/s)	Frequency Order	ω_n (rad/s)							
		1-D Annular Disk Model							3-D FE Model
		2 Elements	4 Elements	8 Elements	16 Elements	32 Elements	64 Elements	128 Elements	
0	1	3023	3020	3020	3020	3019	3019	3019	3019
	2	3023	3020	3020	3020	3019	3019	3019	3019
	3	13858	13489	13386	13360	13353	13352	13351	13351
	4	13858	13489	13386	13360	13353	13352	13351	13351
	5	32840	29334	28369	28125	28064	28048	28045	28043
	6	32840	29334	28369	28125	28064	28048	28045	28043
	7	36080	33912	33127	32920	32867	32854	32851	32849
	8	36080	33912	33127	32920	32867	32854	32851	32849
1000	1	2507 F	2503 F	2503 F	2502 F	2502 F	2502 F	2502 F	2502
	2	4029 B	4027 B	4027 B	4027 B	4027 B	4027 B	4027 B	4027
	3	13954 B	13574 B	13469 B	13442 B	13435 B	13434 B	13433 B	13433
	4	14770 F	14396 F	14291 F	14264 F	142567 F	14255 F	14255 F	14255
	5	33377 B	29954 F	28998 B	28748 B	28685 B	28670 B	28666 B	28664
	6	33484 F	29981 B	29016 F	28779 F	28720 F	28705 F	28701 F	28700
	7	36449 F	34084 B	33338 B	33143 B	33094 B	33082 B	33079 B	33077
	8	36460 B	34396 F	33584 F	33368 F	33314 F	33300 F	33296 F	33295
2000	1	2341 F	2337 F	2335 F	2335 F	2335 F	2335 F	2335 F	2335
	2	5443 B	5440 B	5438 B	5438 B	5438 B	5438 B	5438 B	5438
	3	14944 B	14544 B	14433 B	14404 B	14397 B	14395 B	14395 B	14395
	4	16574 F	16172 F	16055 F	16024 F	16017 F	16015 F	16014 F	16014
	5	34783 F	31293 F	30397 F	30172 F	30115 F	30101 F	30098 F	30096
	6	34922 B	31882 B	30892 B	30639 B	30575 B	30559 B	30555 B	30553
	7	37525 B	34745 B	34026 B	33844 B	33798 B	33787 B	33784 B	33782
	8	37937 F	35979 F	35124 F	34896 F	34838 F	34823 F	34820 F	34818

도표 1, 2 및 3에는 내부 및 외부 경계가 자유인 환상 디스크에 대하여 $n=0$, 1, 2의 각각의 경우에 회전 각속도 Ω가 0, 1000 및 2000 rad/s일 때 계산된 면내 고유진동수를 제시하였다. B는 후향 진행파, F는 전향진행파의 경우이다. $n=0$의 경우에는 최저차 면내 고유진동수는 0이며 고유모드는 디스크의 z축 방향 강체 회전운동이다. $n=1$의 경우에는 2개의 최저차 면내 고유진동수는 모두 Ω이며 고유모드는 후향 진행파인 디스크의 면내 강체 병진운동이다.

도표 4. In-plane natural frequencies of a disk of $a/b=0.5$ with clamped inner-free outer boundaries

n	Ω (rad/s)	ω_n (rad/s)							
		Frequency Order							
		1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	6284	17137	29233	49593	50926			
	1000	6340	17448	29587	50231	51501			
	2000	6494	18331	30589	52043	53136			
1	0	8315	8315	17055	17055	30435	30435	48232	48232
	1000	8009 F	8710 B	17081 B	17696 F	30751 F	30812 B	48831 F	48879 B
	2000	7832 F	9135 B	17764 B	18908 F	31699 F	31832 B	50588 F	50655 B
2	0	12121	12121	17554	17554	33536	33536	46994	46994
	1000	11415 F	13024 B	17158 B	18547 F	33836 F	33907 B	47618 F	47632 B
	2000	10966 F	13914 B	17493 B	20025 F	34745 F	34910 B	49410 B	49414 F

도표 5. In-plane natural frequencies of a disk of $a/b=0.5$ with free inner-clamped free outer boundaries

n	Ω (rad/s)	ω_n (rad/s)							
		Frequency Order							
		1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	14481	19626	32135	51387	51644			
	1000	14201	19653	31952	51142	51352			
	2000	13386	19663	31366	50238	50536			
1	0	15252	15252	20298	20298	33381	33381	49584	49584
	1000	14276 F	15886 B	19506 B	20953 F	33212 F	33221 B	49268 F	49354 B
	2000	12965 F	16051 B	18668 B	21398 F	32692 B	32694 F	48336 F	48522 B
2	0	16613	16613	23018	23018	36637	36637	48361	48361
	1000	15524 F	17397 B	22237 B	23649 F	36443 B	36583 F	48049 F	48127 B
	2000	14129 F	17741 B	21425 B	24036 F	35945 B	36291 F	47121 F	47303 B

1차원 환상 디스크 모델을 사용하여 계산된 고유진동수는 환상 디스크 요소 수를 증가시킴에 따라서 급속히 수렴하고 있으며, 3차원 유한요소 모델을 사용하여 얻어진 고유진동수에 매우 근접하고 있다.

도표 4에는 내부 경계가 고정이고 외부 경계가 자유인, 도표 5에는 내부 경계가 자유이고 외부 경계가 고정인 환상디스크에 대하여 $n=0$, 1, 2의 각각의 경우에 회전 각속도 Ω가 0, 1000 및 2000 rad/s 일 때, 반경방향으로 64개의 환상 디스크 요소로 등분된 1차원 환상 디스크 모델을 사용하여 계산된 면내 고유진동수를 제시하였다.

5. 결 론

본 논문에서는 일정한 각속도로 회전하고 있는 환상 디스크의 면내 고유진동을 정밀하게 해석하기 위하여 운동방정식을 유한변형 이론과 가상일의 원리로부터 유도하였다. 일정한 각속도로 회전하고 있는 정상상태에서의 환상 디스크의 반경방향 변위는 1차원 환상 디스크 요소를 사용하여 구축된 정적 비선형 방정식을 사용하여 구해지고, 교란상태에서의 면내 고유진동은 정상상태에서의 반경방향 변위 및 정상상태로부터 교란된 변위의 함수로 표현되는 면내운동방정식으로부터 절 직경 수에 따르는 1차원 환상 디스크 요소를 사용하여 구축된 진동 방정식을 사용하여 해석하였다. 1차원 환상 디스크 요소의 보간 함수로는 환상 디스크의 정적 변형모드가 사용되었다. 제시된 1차원 환상 디스크 모델의 정밀성 및 수렴성을 확인하였고, 양단 경계가 자유-자유, 고정-자유, 또는 자유-고정인 환상 디스크의 고유진동을 제시된 모델을 사용하여 해석하고 그 결과를 제시하였다.

참 고 문 헌

1. A.W. Leissa(1969), “Vibration of Plates”, NASA SP-160, Office of Technology Utilization, NASA, Reproduced by National Technical Information Service, U.S. Department of Commerce.

2. A.W. Leissa(1977), “Recent Research in Plate Vibrations : Classical Theory,” Shock and Vibration Digest, Vol.9, No.10, pp.13-24.

3. A.W. Leissa(1978), “Recent Research in Plate Vibrations : Complicating Effects,” Shock and Vibration Digest, Vol.10, No.12, pp.21-35.

4. A.W. Leissa(1981), “Plate Vibration Research, 1976-1980 : Classical Theory,” Shock and Vibration Digest, Vol.13, No.9, pp.11-22.

5. A.W. Leissa(1981), “Plate Vibration Research, 1976-1980 : Complicating Effects,” Shock and Vibration Digest, Vol.13, No.10, pp.19-36.

6. A.W. Leissa(1987), “Recent Studies in Plate Vibrations, 1981-85 : Part I. Classical Theory,” Shock and Vibration Digest, Vol.19, No.2, pp.11-18.
7. A.W. Leissa(1987), “Recent Studies in Plate Vibrations, 1981-85 : Part II. Complicating Effects,” Shock and Vibration Digest, Vol.19, No.?, pp.10-24.
8. T.Irie, G. Yamada, Y. Muramoto(1984), “Natural Frequencies of In-plane Vibration of Annular Plates,” Journal of Sound and Vibration, Vol.97, No.1, pp.171-174.
9. J.S. Chen, J.L. Jhu(1996), “On the In-plane Vibration and Stability of a Spinning Annular Disk,” Journal of Sound and Vibration, Vol.195, No.4, pp.585-593.
10. N.H. Farag, J. Pan(2003), “Modal Characteristics of In-plane Vibration of Circular Plates Clamped at the Outer Edge,” Journal of the Acoustical Society of America, Vol.113, No.4, pp.1935-1946.
11. Moreshwar Deshpande, C.D. Mote Jr.(2003), “In-plane Vibrations of a Thin Rotating Disk,” Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME, Vol.125, No.1, pp.68-72.
12. C.I. Park(2008), “Frequency Equation for the In-plane Vibration of a Clamped Circular Plate,” Journal of Sound and Vibration, Vol.313, No.1-2, pp.325-333.
13. 김창부, 심수섭(1998), “회전하는 순환대칭 구조물의 유한요소 진동해석 기법,” 한국소음진동공학회지, 제8권 6호, pp.1150-1157.