

## 평균골격응력을 이용한 불포화토의 탄-점소성 구성방정식 Elasto-viscoplastic Constitutive Model of Unsaturated Soil based on Average Skeleton Stress

김영석, Young-Seok KIM

한국건설기술연구원 지반방재·환경연구실 선임연구원,  
Senior Researcher, Geotechnical Disaster & Environment Research, Korea Institute of Construction Technology

**SYNOPSIS:** It has been recognized that unsaturated soil behavior plays an important role in geomechanics. In the last decade several constitutive models have been proposed and used in the analysis. Many of them, however, are constructed in the frame work of rate independent model such as elasto-plastic one. Although rate dependency is an important characteristics of soil for both saturated and unsaturated soils, very few models have been developed taking account of rate dependency. In the present paper, we have developed an elasto-viscoplastic model considering an effect of suction based on the overstress-type viscoplasticity with soil structure degradation. In the model, we have adopted an averaged pore pressure composed of pore water pressure and air pressure to determine the effective stress.

**Key words :** Unsaturated soil, Suction, Elasto-viscoplastic model, Averaged skeleton stress

### 1. 서론

일반적으로 흙은 흡입자 및 간극을 채우고 있는 물과 공기로 구성되는 3상혼합체, 즉 불포화토이다. 많은 지반 공학적 문제가 이러한 불포화토를 대상으로 하고 있으므로, 그 역학적 거동을 해명하여 예측할 필요가 있다. 실제로 지반의 역학적 거동을 예측하기 위해서는 적절한 구성방정식이 필요한데, 기존에 제안된 불포화토의 구성방정식은 대부분이 시간에 의존하지 않는 탄-소성 구성방정식의 범주 안에서 정식화 되었다. 그러나, 점성토의 시간 의존성 거동은 포화토 뿐만이 아니라 불포화토에서도 중요한 특성이므로 고려할 필요가 있다.

본 논문에서는 혼합체이론(Mixture theory)의 테두리안에서 평균골격응력(Average Skeleton Stress)의 도입과 탄-점소성 구성식 파라미터의 석션 의존성을 동시에 고려함으로써 불포화토의 탄-점소성 구성방정식을 새롭게 유도하였다. 즉, 초과응력형(Overstress-type) 탄-점소성 이론을 바탕으로 내부구조의 변화를 고려한 포화 점성토의 구성방정식에 불포화토의 역학특성인 석션의 효과를 새롭게 도입하는 것으로 불포화토의 구성방정식을 제안하였다.

### 2. 불포화토의 탄-점소성 구성방정식

#### 2.1 모델 가정 및 평균골격응력

불포화토의 역학거동을 예측하기 위해서는 다음과 같은 사항을 고려해야 한다(Wheeler and Karube, 1995; Jommi, 2000).

- 부분 응력 (partial stress) : 흙 골격에서 유체의 평균압력에 따라 변화하는 응력
- 석션 효과 : 입자간 접촉면에서 작용하는 접착력(cementing action)에 의한 추가적인 결속력 (bonding force)을 제공

즉, 불포화토에서는 포화토에서의 유효응력을 정의할 수 없으므로, 새로운 응력을 도입할 필요가 있다. 또한, 석션의 효과도 반드시 고려해야 한다. 본 연구에서는 평균골격응력(Average skeleton stress)이란 새로운 응력변수의 도입과 동시에 석션 의존성을 탄-점소성 구성식 파라미터에서 고려함으로써 새로운 불포화토의 탄-점소성 구성식을 유도하였다(구성식 파라미터의 석션 의존성이 필수 조건이기 때문에 평균골격응력을 유효응력이라고 부르지 않는다.).

본 연구에서 정의한 평균골격응력이란, 다공질모체이론(Theory of porous media, TPM)을 바탕으로 기체(공기)와 액체(물)을 하나의 유체로 보고, 흙골격과 그 간극을 흐리는 유체의 분응력(Partial stress)으로부터 구해지는 평균간극압(Averaged pore-pressure)에 의해 정의되는 응력이다(Ehlers, 2003). 각 상의 분응력은 다음과 같이 정의된다.

$$\sigma_{ij}^s = \sigma''_{ij} + (1-n)P^F \delta_{ij} \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}^l = nS_r u_w \delta_{ij} \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}^g = n(1-S_r)u_a \delta_{ij} \quad (3)$$

여기서,  $\sigma_{ij}^s, \sigma_{ij}^l, \sigma_{ij}^g$  은 각각 고체상, 액체상, 기체상의 분응력텐서,  $\sigma''_{ij}$  은 평균골격응력텐서,  $n$ 은 유체의 체적함유률,  $S_r$ 은 포화도,  $u_a$ 는 간극공기압,  $u_w$ 는 간극수압,  $\delta_{ij}$ 는 Kronecker의 델타를 나타낸다. 또한,  $P^F$ 는 평균간극압으로 Dalton의 법칙에 따라 다음과 같이 정의된다.

$$P^F = (1-S_r)u_a + S_r u_w \quad (4)$$

전응력은 각 상의 합, 즉 식(1), (2), (3)의 합으로 정의되며, 결과적으로 평균골격응력은 식(6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^s + \sigma_{ij}^l + \sigma_{ij}^g = \sigma''_{ij} + P^F \delta_{ij} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sigma''_{ij} &= \sigma_{ij} - P^F \delta_{ij} \quad (6) \\ &= \sigma_{ij} - [(1-S_r)u_a + S_r u_w] \delta_{ij} \\ &= \sigma_{ij} - u_a \delta_{ij} + S_r (u_a - u_w) \delta_{ij} \end{aligned}$$

식(6)은 Bishop 응력에서  $\chi$ 란 파라미터를 포화도를 나타는  $S_r$ 로 바꾸면 수식상으로는 일치하게 되나, 평균골격응력은 혼합체 이론을 바탕으로 유도된 응력이므로 Bishop 응력과는 다른 응력변수라고 할 수 있다. 또한, 흙이 포화상태가 되면 평균골격응력은 Terzaghi의 유효응력과 일치하게 되어 포화토-불포화토에서 하나의 동일한 응력변수로 사용이 가능하다.

## 2.2 불포화토의 탄-점소성 구성방정식의 유도

본 연구에서 초과응력형(Overstress-type) 탄-점소성 이론을 바탕으로, 내부구조의 변화를 고려한 포화 점성토의 구성식에 석션의 효과를 새롭게 도입하는 것으로 불포화토의 탄-점소성 구성식을 제안하였다(Kimoto, 2002, Kim, 2005). 또한, 구성방정식 중의 응력은 앞 절에서 설명한 평균골격응력을 사용하고 있다. 불포화토의 가장 중요한 특징인 석션 효과는 내부구조를 고려한 파라미터에서 설명하고 있다.

새롭게 제안한 불포화토의 구성방정식은 과압밀경계면, 석션효과 파라미터, 정적항복함수 및 점소성 포텐셜함수로 구성되어 있으며, 다음과 같이 정의하고 있다.

○ 과압밀경계면  $f_b$

과압밀경계면(Overconsolidation boundary surface)은 정규압밀영역( $f_b \geq 0$ ) 및 과압밀영역 ( $f_b < 0$ )을 정의하는 함수로써 다음과 같이 표현한다.

$$f_b = \bar{\eta}^*_{(0)} + M^*_m \ln\left(\frac{\sigma''_m + b}{\sigma''_{mb} + b}\right) = 0 \quad (7)$$

$$\bar{\eta}^*_{(0)} = \{(\eta^*_{ij} - \eta^*_{ij(0)})(\eta^*_{ij} + \eta^*_{ij(0)})\}^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

$$\eta^*_{ij} = \frac{S_{ij}}{\sigma''_m + b} \quad (9) \quad \sigma''_{mb} = \sigma''_{ma(s)} \exp\left(\frac{1+e}{\lambda-\kappa} \varepsilon_v^{vp}\right) \quad (10)$$

여기서,  $\sigma''_m$ 은 평균골격응력,  $S_{ij}$ 는 편차응력텐서,  $M^*_m$ 은 파괴응력비,  $\eta^*_{ij(0)}$ 은 이방압밀후의 응력비,  $b$ 는 재료파라미터를 의미한다. 또한, 식중의  $\sigma''_{ma(s)}$ 는 석션의 효과를 고려한 항목으로써 다음과 같이 정의하고 있다.

$$\sigma''_{ma(s)} = \sigma''_{ma} \left[ 1 + S_I(s_i) \left( \exp\left(-s_d \left(\frac{s_i}{s} - 1\right)\right) \right) \right] \quad (11)$$

여기서,  $\sigma''_{ma}$ 는 내부구조를 고려한 응력,  $s_i$ 는 초기 석션,  $s$ 는 현재의 석션,  $S_I(s_i)$ 는 초기 석션  $s_i$ 가 작용할 때의 강도증가율,  $s_d$ 는 강도의 변화속도를 나타내는 파라미터이다. 그림 1은 wetting과 같이 석션이 감소 될 때 석션 효과가 어떻게 구성방정식에 반영되는지 모식적으로 나타내고 있다.

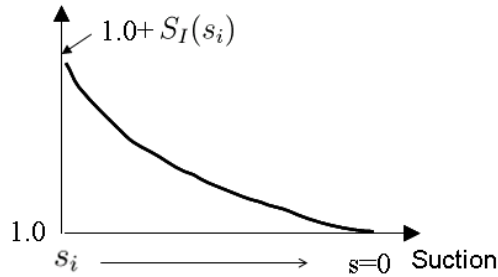


그림 1. 석션 감소시(wetting) 석션 효과의 변화

○ 정적항복함수  $f_y$  와 점소성포텐셜함수  $f_p$

정적항복함수  $f_y$  와 점소성포텐셜함수  $f_p$ 는 다음의 식으로 정의된다.

$$f_y = \bar{\eta}^*_{(0)} + \tilde{M}^* \ln\left(\frac{\sigma''_m + b}{\sigma''_{my} + b}\right) = 0 \quad (12) \quad f_p = \bar{\eta}^*_{(0)} + \tilde{M}^* \ln\left(\frac{\sigma''_m + b}{\sigma''_{mc} + b}\right) = 0 \quad (13)$$

정규압밀영역에서는  $\tilde{M}^* = M^*_m$ 이며, 과압밀영역에서는 식(14)와 같이 정의된다.

$$\tilde{M}^* = - \frac{\sqrt{\eta^*_{ij} \eta^*_{ij(0)}}}{\ln(\sigma''_m + b) / (\sigma''_{mc} + b)} \quad (14) \quad \sigma''_{mc} = \sigma''_{mb} \exp\left(\frac{\sqrt{\eta^*_{ij(0)} \eta^*_{ij(0)}}}{M^*_m}\right) \quad (15)$$

단,  $\tilde{M}^* = M^*_m$ 에 도달한 후는  $\tilde{M}^* = M^*_m$ 이라고 정의한다.

그림 2와 3에는 정규압밀상태 및 과압밀상태에서의 과압밀경계면, 정적항복함수, 점소성포텐셜함수를 나타내고 있다.

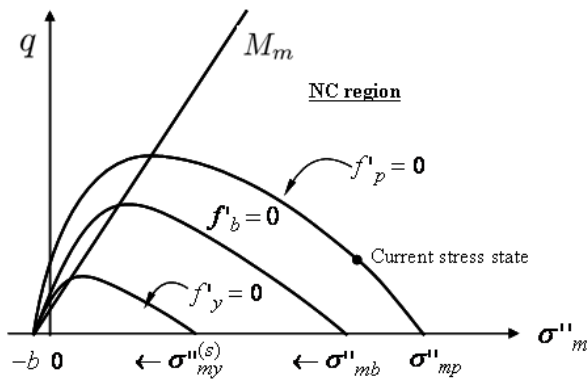


그림 2. 정규압밀 상태

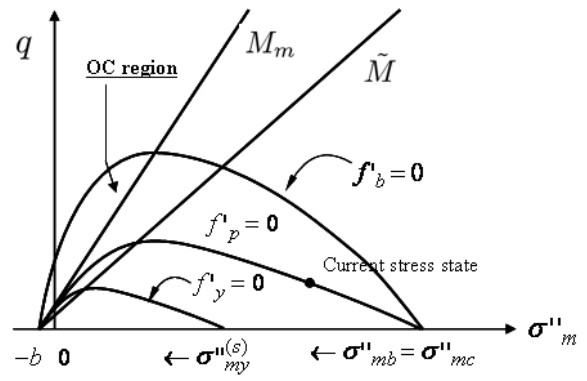


그림 3. 과압밀 상태

### ○ 점소성 변형률속도의 흐름법칙

점소성포텐셜함수는 다음과 같이 Perzyna 형태의 점소성 이론을 바탕으로 정의하고 있다 (Perzyna, 1963, Oka, 1982; Oka et al., 2004).

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = C_{ijkl} \langle \Phi_1(f_y) \rangle \frac{\partial f_p}{\partial \sigma''_{kl}} \quad (16)$$

$$C_{ijkl} = a' \delta_{ij} \delta_{kl} + b' (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (17) \quad C_1 = 2b', \quad C_2 = 3a' + 2b' \quad (18)$$

$$C_1 = \left[ \frac{S_{i1}}{S_{i1r}} \right] \times C_{01}, \quad C_2 = \left[ \frac{S_{i2}}{S_{i2r}} \right] \times C_{02} \quad (19)$$

여기서,  $\langle \rangle$ 는 McCauley의 괄호이며 괄호안의 값이 0보다 크면  $\langle x \rangle = x$ 이며, 괄호안이 0보다 작으면  $\langle x \rangle = 0$ 이다.  $S_i$ 는 석션의 효과를 나타내고 있다. 또한,  $C_{01}$ 는 석션이  $S_{i1r}$  일때,  $C_{02}$ 는 석션이  $S_{i2r}$  일때의 점소성 파라미터를 나타낸다. 즉,  $C_1$ 과  $C_2$ 는 석션효과를 고려한 점소성 파라미터를 의미한다. 마지막으로  $\Phi_1$ 은 변형률 속도를 나타내고 있으며, 다음과 같이 정의하고 있다.

$$\gamma \Phi_1(f_y) = C' \sigma''_m \exp \left\{ m' \left( \bar{\eta}^* + \tilde{M}^* \ln \frac{\sigma''_m + b}{\sigma''_{my}^{(s)} + b} \right) \right\} = C' \sigma''_m \exp \left\{ m' \left( \bar{\eta}^* + \tilde{M}^* \ln \frac{\sigma''_m + b}{\sigma''_{mb} + b} \right) \right\} \quad (20)$$

$$C = C' \exp \left( m' \tilde{M}^* \ln \frac{\sigma''_{mai} + b}{\sigma''_{myi}^{(s)} + b} \right) \quad (21)$$

여기서  $m'$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ 는 점소성 파라미터를 나타낸다.

## ○ 전체 변형률속도텐서

전체 변형률속도텐서  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  는 탄성변형률속도텐서  $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$  와 점소성변형률속도텐서  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}$  의 합으로 다음과 가정하고 있다.

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} \quad (22)$$

## 3. 결론

본 논문에서는 시간의존성을 고려한 불포화토의 탄-점소성 구성방정식을 제안하였다. 새롭게 제안한 구성방정식은, 평균골격응력의 도입과 구성식 중에서 석션효과를 동시에 고려함으로써 불포화토의 탄-점소성 구성식으로 유도하였다. 본 논문에서 도입한 평균골격응력은 기체(공기)와 액체(물)를 하나의 유체로 보고, 흡골격과 그 간극을 흐리는 유체의 분응력으로부터 구해지는 평균간극압에 의해 정의되는 응력으로, 흡이 포화되면 Terzaghi의 유효응력과 일치하게 된다. 즉, 포화토-불포화토의 응력변수로서 동시에 사용이 가능한 응력이다.

## 참고문헌

1. Ehlers, W. (2003), Continuum and numerical simulation of porous materials in science and technology, *Modeling and mechanics of granular and porous materials*, chapter 9, pp.245-291.
2. Jommi, C. (2000), Remarks on the constitutive modeling of unsaturated soils, *Experimental Evidence and Theoretical Approaches in Unsaturated Soils*, Tarantino, A. and Mancuso, C. eds., Balkema, pp.139-153.
3. Kim, Y. S. (2005), *Elasto-viscoplastic modeling and Analysis for Cohesive Soil Considering Suction and Temperature Effects*, Doctoral thesis, Kyoto University.
4. Kimoto, S. (2002), *Constitutive Models for Geomaterials Considering Structural Changes and Anisotropy*, Doctoral thesis, Kyoto University.
5. Oka, F. (1982) : Elasto-viscoplastic constitutive equation for overconsolidated clay, *Proc. 1st International Symposium on Numerical Models in Geomechanics*, Zurich, Dungar, R., Pande, G. N. and Studer, J. A., eds., Balkema, pp.147-156.
6. Oka, F., Kodaka, T. and Kim, Y.-S. (2004) : A cyclic viscoelastic-viscoplastic constitutive model for clay and liquefaction analysis of multi-layered ground, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, **28**, pp.131-179.
7. Perzyna, P. (1963) : The constitutive equations for work-hardening and rate sensitive plastic materials, *Proc. Vibrational Problems*, Warsaw, **4** (3), pp.281-290.
8. Wheeler, S. J. and Karube, D. (1995), Constitutive modeling, *Proc. 1st Int. Conference on Unsaturated Soils*, UNSAT '95, pp.1323-1356.