

## 모래에서 인장력을 고려한 Mohr-Coulomb 파괴규준 Mohr-Coulomb Failure Criterion with Tensile Strength in Sand

김태형<sup>1)</sup>, Tae-Hyung Kim, 이용수<sup>2)</sup>, Yong-Su Lee, 황웅기<sup>2)</sup>, Woong-Ki Hwang,  
강기민<sup>3)</sup>, Ki-Min Kang, 안영균<sup>4)</sup>, Yonug-Kyun Ahn

- 1) 한국해양대학교 건설환경공학부 조교수, Assistant Professor, Div. of Civil and Environ. Engineering, Korea Maritime University
- 2) 한국해양대학교 토목환경공학과 석사과정, Graduate Student, Depart. of Civil and Environ. Engineering, Korea Maritime University
- 3) (주)쏘일테크엔지니어링 상무, Managing Director, Soiltech Engineering Co.,Ltd.
- 4) 삼부토건주식회사 현장소장, Site Manager, Sambu Construction Co., Ltd

**SYNOPSIS** : Unsaturated soil mechanics has been often used to find out a cause of failure (tensile failure) of retaining walls and hill slopes containing sandy soils. Checking shear strength is a popular method by considering suction stress developed from pore water menisci among the grains and saturated pockets of pore water under negative pressure. Linear Mohr-Coulomb failure criterion is generally adopted as a failure criterion. However, depending on relative density, stress history, and the magnitude of stress, the failure behavior of sand may not follow linear M-C frictional behavior. For stress in the large compressive ranges, say from tens to hundreds of kPa, the linear M-C criterion is an adequate representation for the shear strength behavior of sand. However, less than tens of kPa, the M-C criterion often can not be accurately represented. Depending on failure criterion, the uniaxial tensile strength is different over 100% relative error. For sand behavior under small compression regimes, therefore, such as under low or zero gravity, or under undergoing tensile failure in the crest area of hill slopes or behind retaining walls, it is important to consider the non-linear behavior.

**Key words** : Unsaturated soil mechanics, non-linear Mohr-Coulomb failure criterion, tensile strength, retaining wall, slope, sand

### 1. 서 론

흙의 인장강도는 포화도와 종류에 따라 그 크기가 수십에서 수백 kPa에 이르기 때문에 많은 지반공사의 안정성과 성능에 중요한 영향을 미칠 수 있다(Fang and Fernandez, 1981; Lu et al., 2007). 그러나 많은 지반공학자는 인장강도가 압축강도와 비교하면 상대적으로 그 값이 작고, 적합한 인장력 측정법의 결여로 인한 신뢰할 수 있는 데이터의 부족과 이로 인한 인장강도 예측 이론의 부재 등으로 흙의 인장강도는 영에 가깝다고 생각하거나 무시되고 있다. 특히 재료자체의 점착력이 없는 모래의 경우 인장강도는 거의 고려의 대상이 되지 못하고 있다.

하지만 최근의 모래의 인장강도에 대한 이론적 실험적 연구결과를 보면(Kim, 2001; Kim and Hwang, 2003; Lu et al, 2005, 2007; Kim et al, 2007), 습윤 또는 불포화 모래의 경우, 입자들 사이에서 간극수의 메니스커스와 부의 간극수압 조건에서 간극수가 결합응력을 제공하여 인장강도를 유발한다는 것이 밝혀졌다. 물론 이 인장강도는 결합력을 제공해주는 물이나 습기가 증발하면 소멸하는 특성을 갖고 있다.

습기나 물에 의해 발현된 인장강도를 고려한 Mohr-Coulomb(M-C) 파괴규준은 그림 1과 같이 표현될 수 있다. 대부분의 실제 공학문제에서 접하게 되는 응력단계가 수십 또는 수백 kPa 정도의 모래질 흙은, 그림 1에 제안된 선형 M-C 파괴규준이 유용하게 적용된다. 여기에서 모래의 전단강도는 수직응력의 선형함수로 가정한다. 건조 모래의 경우, 흙의 영역에서 어느 위치 어느 방향에서 전단강도와 수직응력의 비가 한계상태  $\tan\phi$ 에 도달하면 파괴 또는 극한 상태에 도달된다.

하지만, 상대밀도, 응력이력, 응력크기에 따라 모래의 거동은 기존의 M-C 거동을 따르지 않을 수도 있다. 일반적으로 수십에서 수백 kPa의 큰 압축범위에서 선형 M-C 파괴규준은 모래의 강도에 표현에 적합하다. 하지만 수십 kPa이내의 낮은 압축응력범위에서, 선형 M-C 파괴규준은 종종 모래의 전단강도 거동을 표현하는데 있어 적합하지 않을 수 있다. 예를 들어, 낮은 또는 0 응력상태와 같은 낮은 압축응력 상황에서 옹벽 배면, 언덕, 사면의 정점에서 모래 지반의 거동은 기존의 선형 M-C 파괴규준으로 정확히 설명될 수 없다.

그래서 본 연구에서는 인장강도를 포함한 M-C 파괴규준을 압축응력의 범위(수십 ~ 수백 kPa vs. 수십 kPa 이내)에 따라 구분하여 제안하였다. 제안된 이론을 바탕으로 인장강도와 전단강도 중 하나인 겔보기 점착력과 관계식을 유도하였다. 이를 위해 Lu와 Likos(2006)에 의해 제안된 흡입응력(suction stress) 개념을 사용하였다. 이 흡입응력은 불포화 모래에서 모관현상에 의해 발생된 등방 입자간 응력으로 정의된 응력이다.

## 2. 인장강도를 포함한 선형 Mohr-Coulomb 파괴규준

대부분의 실제 공학문제의 경우 응력단계가 수십 또는 수백 kPa 정도로, 선형 Mohr-Coulomb(M-C) 파괴규준이 폭넓게 사용되고 있다. 이 규준을 그림으로 표시하면 그림 1과 같다. 이 그림에서 모래의 전단강도는 수직응력의 선형함수로 가정한다. 건조 모래의 경우, 흙의 영역에서 어느 위치 어느 방향에서 전단강도와 수직응력의 비가 한계상태  $\tan\phi$ 에 도달하면 파괴 또는 극한 상태에 도달된다.

$$\tau = \sigma \tan \phi \quad (1)$$

습윤 또는 불포화 모래의 경우, 입자들 사이에서 간극수의 메니스커스와 부의 간극수압 조건에서 포화된 간극수가 결합응력을 제공한다. 그림 1의 상부 왼쪽 그림처럼, 균질하고 등방인 모래의 경우 이 결합응력이 바로 등방인장강도  $\sigma_{iid}$ 이다. 이것은 수직응력축의 가장 왼쪽에 위치하고 있다. 이와 같은 조건에서, 어느 위치 어느 방향에서 전단강도는 존재하지 않는다. 파괴는 인장응력이 모관응력에 의해 발생된 결합력에 이르면 발생된다. 이 응력은 외부 응력의 존재에 상관없이 존재한다. 왜냐하면 흙이 등방인장응력으로 파괴되면 전단응력이 발생하지 않기 때문에 흙의 등방인장강도는 내부마찰각과는 관계가 없다.

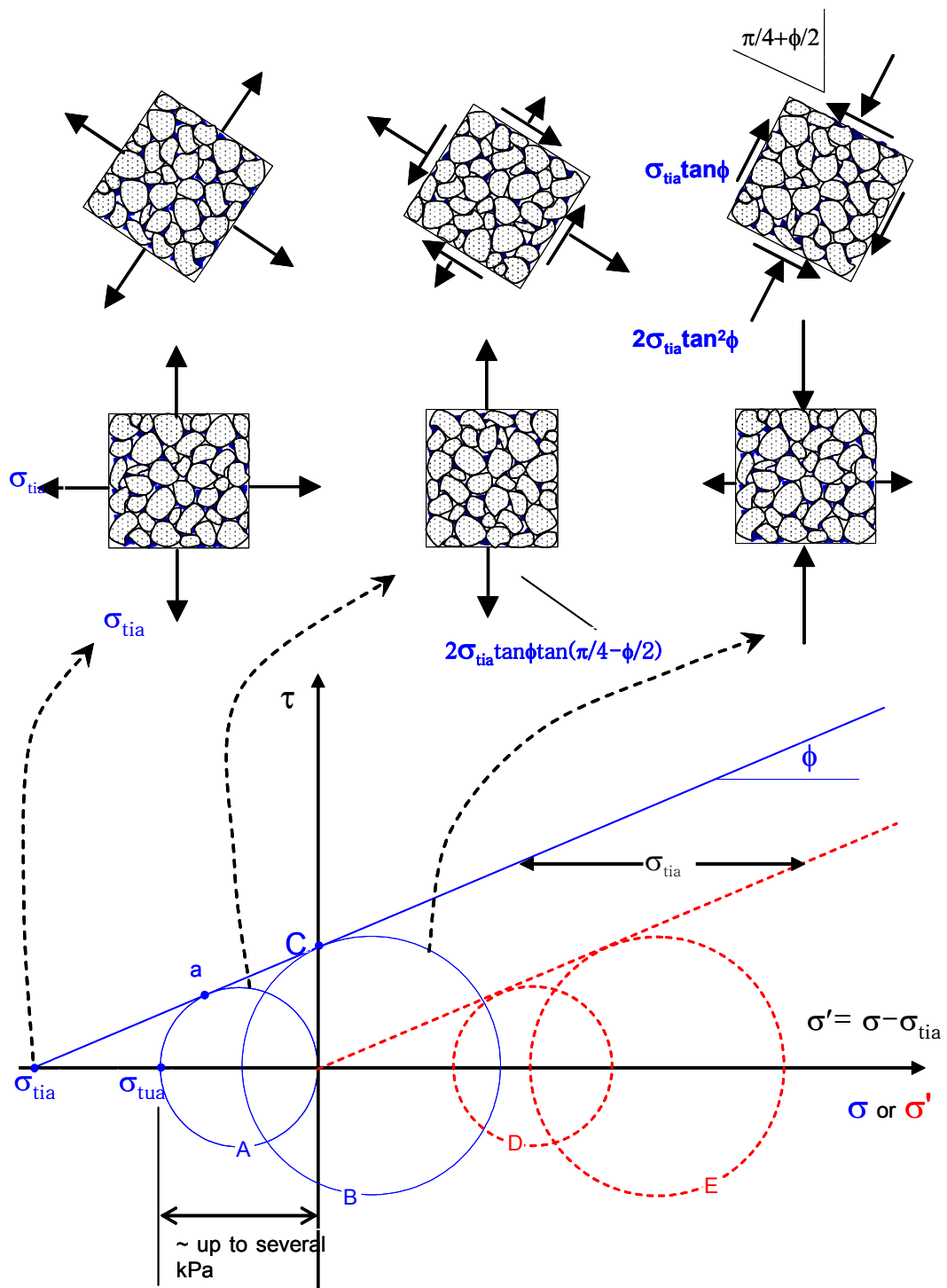


그림 1. Mohr-Coulomb 파괴규준에 의한 등방인장강도, 일축인장강도, 결보기 점착력과 이에 대한 응력상태의 개념적인 도식

일축인장장도  $\sigma_{tia}$ 는 흙 요소가 한 쌍의 주응력 평면에 수직으로 인장응력이 작용하고 직각 평면에 작용하는 응력이 0인 상태에서 파괴되는 경우에 발생하는 것으로 정의된다. 실제로 일축이라는 조건이 일축인장장도 측정 실험에서 구현되지 않는다. 왜냐하면 대부분의 조립토를 사용한 공시체는 형태를 유지하기 위해 형틀로 구속되어 있기 때문이다.

만약 인장응력 영역에서 전단강도와 수직응력의 비가 압축응력 영역에서처럼 유지된다면, 즉  $\tan\phi$ 로, 논리적으로 일축인장장도는 최대주응력이 0인 상태로 유지될 때 등방인장장도로 여길 수 있을 것이다. 이 상태의 응력은 그림 1에서 원 A로 표시되었고 이에 해당되는 흙 요소는 그림의 상부 중간 그림으로 표현된다. 다르게 얘기하면, 파괴는 인장강도가 결합력에 이르렀기 때문에 발생하는 것이 아니라, 점 a 에서 전단강도와 수직응력의 비가  $\tan\phi$  도달했기 때문에 발생된다. 그러므로 측정된 일축인장장도는 실제로 등방 결합응력의 발현의 결과로 발생된 마찰 강도인 것이다. 그림 1의 상부 중간 그림에 묘사된 것처럼, 그 상태에서 발현된 전단강도의 크기는  $\sin\phi \tan\phi (\pi/4 - \phi/2)\sigma_{tia}$ 가 된다.

등방인장장도에 의해 발현된 최대 전단강도는 M-C 규준과 전단응력축이 교차되는 부분으로(그림에서 점 C), 보통 문헌에서 겔보기 점착력이라 불려진다. 여기에 해당되는 응력상태(Mohr 원)는 그림 1에서 원 B로 표현되었고 흙 요소는 오른쪽 상부 그림과 같다. 그림에서 볼 수 있는 바와 같이 C 는 점착력이라기 보다는 전단응력으로 겔보기 점착력이라는 현재의 표현은 잘못된 것이다. 반면, 등방인장장도는 사실상 입자간 결합력으로 이것이 “겔보기 점착력”에 더 가깝다고 볼 수 있다.

등방인장장도  $\sigma_{tia}$ , 겔보기 점착력 C, 일축인장장도  $\sigma_{tia}$  사이의 수학적 관계는 그림 1의 기하학적 관계를 고려하여 다음과 같이 정립될 수 있다.

$$\frac{C}{\sigma_{tia}} = \tan \phi \quad (2a)$$

$$\frac{C}{\sigma_{tia}} = \frac{1}{2 \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)} \quad (2b)$$

$$\frac{\sigma_{tia}}{\sigma_{tia}} = 2 \tan \phi \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \quad (2c)$$

그림 2는 식 (2)의 관계를 설명한 것으로, 모래에서 발현된 등방결합응력 또는 등방인장장도에 대한 겔보기 점착력 C의 효율은 마찰각 20°에서 40%인 반면 마찰각 70°에서는 270%이상으로 증가하였다. 마찰각 45°에서 발현된 겔보기 점착력 C는 등방인장장도와 같다. 등방인장장도에 대한 일축인장장도의 효율은 마찰각이 20°에서 51%이고 마찰각 70°에서 97%로 변화 하였다. 이것은 M-C의 재료의 경우 이상적인 직접인장실험에서 측정된 일축인장장도는 등방인장장도와 같거나 초과할 수 없다는 것을 보여주는 중요한 근거이다.

M-C 포락선과 교차하고 전단응력축의 점 C를 지나는 원 B는 몇 가지 흥미로운 특징이 있다. 첫 번째는 이 원은 그림 1의 오른쪽 상부에 볼 수 있는 바와 같이 한 쌍의 유일한 주응력상태에서만 얻어질 수 있다. 최대 주응력은 압축이고 최소 주응력은 인장이다. 최소 주응력과 최대주응력의 비는 주동토압계수와 같다. 최대주응력으로 부터  $\pi/4 + \phi/2$  면에서 수직응력이 0인 유일한 하나의 평면이 존재한다. 그러나 이 순수 전단면에 대한 수직면에 추가적인 압축수직응력  $2\sigma_{tia}\tan^2\phi$ 가 존재한다.

등방인장강도를 건조모래와 습윤모래의 거동 차이를 양적으로 구분하기 위해 응력 변형 요소로 사용하였다. 이것은 그림 1에서 파괴포락선을 오른쪽으로 이동하여 표현하였다. Lu 와 Likos(2006)는 등방인장강도를 유효응력의 한 부분으로 “흡입응력(suction stress)  $\sigma^s$ ”이라 정의하였다. 흡입응력이라 불리는 입자간 응력은 Terzaghi의 유효응력에서 간극수압과 같은 역할을 한다. 일반적으로 흡입응력은 서로 다른 함수특성 메커니즘에서 발생된 van der Waals 인력, 전기이중층 척력, 모관응력 등 세 가지 요소로 구성된다. 이 중에서 앞의 두 가지 메커니즘은 모래의 입자간 응력에서 무시될 수 있어 모관응력이 모래의 결합력을 나타내는 주 요인이다. 불포화 상태에서 흡입응력의 크기는 간극수압 또는 흙의 흡입력의 크기와 같을 필요는 없다. 흡입응력개념에서, 포화된 또는 불포화된 흙에 대한 유효응력은 하나의 통일된 형태로 표현될 수 있다.

$$\sigma' = \sigma - u_a - \sigma^s = \sigma - u_a - f(u_a - u_w) = \sigma - u_a - f(S) \quad (3)$$

여기에서  $u_a$ 는 간극공기압,  $u_w$ 는 간극수압,  $S$ 는 포화도이다. 만약 위의 일반화된 유효응력개념을 사용하면, 그림 1에 점선으로 표현된 Mohr원 D와 E에서처럼, 모세관 현상에 의한 등방인장응력을 갖는 습윤 모래는 등방인장강도를 가지고 있지 않은 건조한 모래와 동등하게 취급될 수 있다.

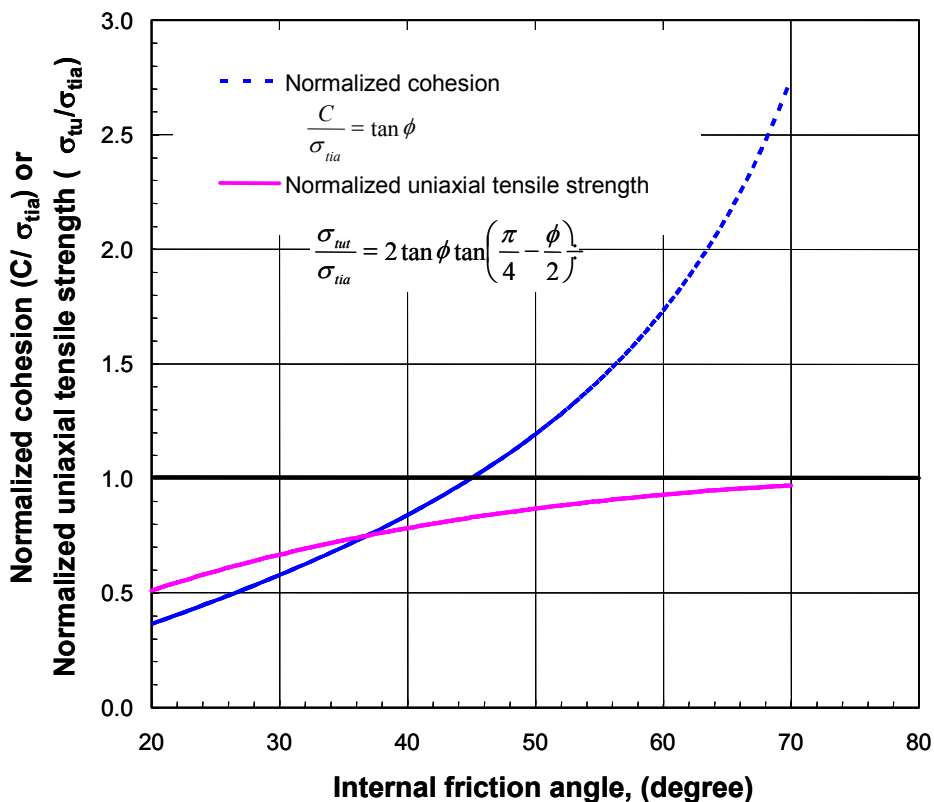


그림 2. 내부마찰각에 따른 등방인장강도에 의해 정규화된 일축인장강도와 겉보기 점착력의 변화 양상

### 3. 인장강도를 포함한 비선형 Mohr-Coulomb 파괴규준

상대밀도, 응력이력, 응력크기에 따라 모래의 거동은 기존의 선형 M-C 마찰거동을 따르지 않을 수도 있다. 일반적으로 수십에서 수백 kPa의 큰 압축범위에서 그림 3에서 원 A와 원 B로 표현된 경우, M-C 파괴규준은 모래의 전단강도에 표현에 적합하다. 하지만 수십 kPa이내의 낮은 압축응력범위에서와 특히 인장응력 영역에서, M-C 파괴규준은 종종 모래의 전단강도 거동을 표현하는데 있어 적합하지 않을 수 있다.

그림 3에 표현된 것은 낮은 응력 단계에서 인장강도의 개념이다. 전단강도와 수직응력 사이의 비선형 관계는 작용 수직응력이 수 kPa 보다 작은 경우 종종 발생된다. 전단응력 대 수직응력의 비는 보통 수직응력이 감소함에 따라 급격히 증가한다. 예를 들어, Kim(2001)에 의하면 건조된 깨끗한 F-75 Ottawa 모래의 경우, 수직응력이 0.5 ~ 1.0 kPa이내의 경우 마찰각이 23°이고, 수직응력이 0.25 ~ 0.5 kPa 범위에서는 28°, 수직응력이 0.1 ~ 0.25 kPa 범위에서는 47°까지 증가한다. 매우 낮은 수직응력에서 F-75 모래의 경우 70°까지 마찰각이 나타나는 것으로 보고된 경우도 있다(Sture et al., 1998).

낮은 수직응력 상태에서 측정된 모래의 큰 마찰각은 엇물림(interlocking) 메커니즘으로 주로 설명된다. 모래 입자의 거친 표면 형태로 인해 작용된 수직응력의 방향이 입자간 접촉방향과 일치하지 않기 때문에, 작용된 낮은 수직응력은 추가적으로 입자간 전단응력을 발생시킬 수 있다. 이런 현상은 조밀한 모래에서 낮은 압축응력 조건에서 일정한 부피 팽창 현상과도 관련된다. 이런 비선형 전단응력거동의 한 가지 중요한 점은 겔보기 점착력 값이 하나로 고정되지 않는다는 점이다. 심지어 건조한 모래의 경우 사용된 응력범위에 따라 수백에서 수천 Pa 크기의 낮은 겔보기 점착력이 종종 관측된다.

낮은 또는 0 응력상태와 같은 낮은 압축응력 상황에서나 용벽 배면 또는 언덕의 정점에서 인장 파괴가 진행 중인 상황에서 모래의 거동은 앞에서 언급된 비선형 거동을 고려하는 것이 중요하다. 또한 습윤조립재와 관련된 재료 가공, 제조, 이동, 낮은 압축응력 조건의 모래질 흙에서 인장과 파괴 등과 관련해서도 비선형 거동의 적용이 가능하다.

그림 3에서처럼, 일축인장강도에 대한 닫힌 형태의 식에 맞추기 위해 인장 영역에서 선형 전단강도거동이 가정 되었다. 인장영역에 대한 선형 부분을 정의하는데 필요한 마찰각은 압축 영역에서 수직응력이 거의 0인 지점에서 접선을 그어 구하였다. 인장 영역에서 선형 항복포락선 가정이 정당한 이유는, 앞에서 설명된 것처럼, 일축인장강도  $\sigma_{tut}$ 와 등방인장강도  $\sigma_{tit}$  사이의 차이는 마찰각이 증가함에 따라 감소한다. 마찰각이 50° 이상의 경우 그림 2에서 보는바와 같이 차이는 실제로 10% 미만이다. 그러므로 인장 영역에서 선형 항복포락선 가정은 타당하고 볼 수 있다.

비록 대부분의 인장강도 측정이 일축인장강도 조건과 근사하지만 대부분의 인장실험테크닉은 등방인장강도나 일축인장강도를 측정하는 것이 아니라는 것을 알아야 한다(2장 참조). 그리고 그림 2에서 언급된 것처럼 마찰각이 점점 증가함에 따라 등방인장강도와 일축인장강도의 차이가 점점 감소되어 별로 차이가 없다는 점이다. 예를 들어, 만약 낮은 응력단계에서 마찰각이 50°이면, 일축인장응력은 등방인장강도의 87%이다. 만약 마찰각이 60°이면 일축인장강도는 등방인장강도의 93%이다.

등방인장강도  $\sigma_{tit}$ , 겔보기 점착력  $C$ , 일축압축강도  $\sigma_{tut}$  사이의 수학적 관계는 선형 M-C 재료에서와 같은 방법으로 기하학적 관계를 활용하여 다음과 같이 정립될 수 있다.

$$\frac{C_t}{\sigma_{tit}} = \tan \phi_t \quad (4a)$$

$$\frac{C_t}{\sigma_{tut}} = \frac{1}{2 \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_t}{2}\right)} \quad (4b)$$

$$\frac{\sigma_{tut}}{\sigma_{tit}} = 2 \tan \phi_t \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_t}{2}\right) \quad (4c)$$

여기서 아래 첨자 t 는 비선형 M-C 파괴포락선 하에서 겉보기 점착력과 마찰각에 대한 값을 나타낸다.

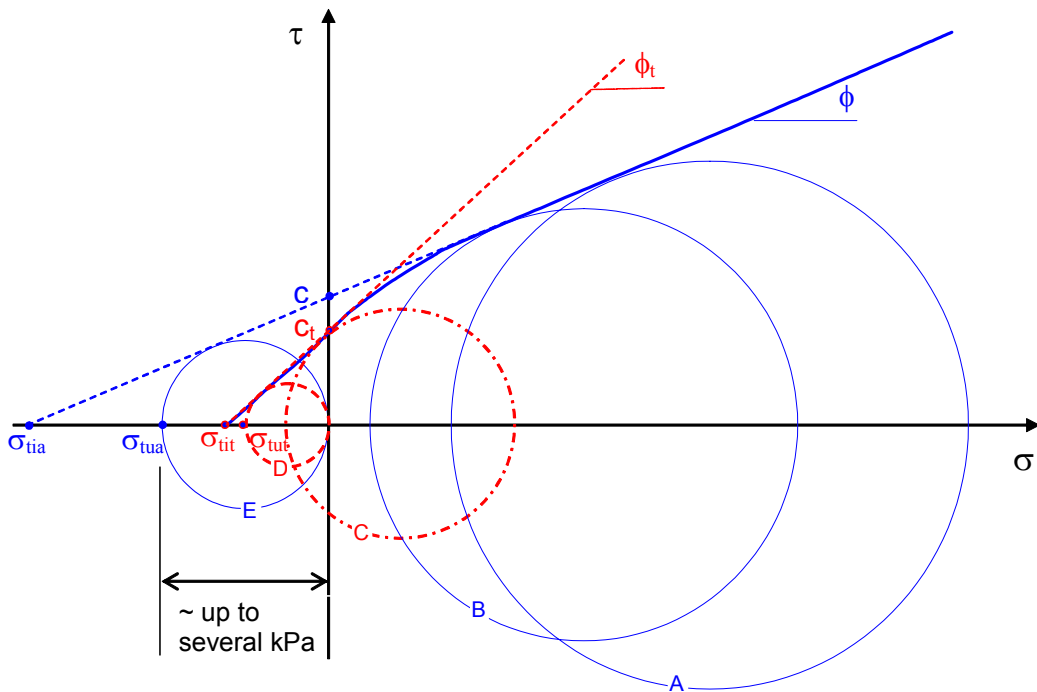


그림 3. 모래에 대한 인장 영역을 포함한 비선형 Mohr-Coulomb 파괴규준의 개념적인 도식

#### 4. 비선형 Mohr-Coulomb 파괴규준의 고려 필요성

비선형 M-C 거동을 고려해야 하는 이유는 식 (2b)와 식 4(b)의 비를 고려하여 검증할 수 있다.

$$\frac{\sigma_{tut}}{\sigma_{tut}} = \frac{C_t}{C} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_t}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)} \quad (5)$$

포화도 2%의 습윤 F-75 Ottawa 모래에 대해 실시된 Kim(2001)의 직접전단실험 결과를 이용하여 면응력 범위에 따라 다음과 같이 겉보기 점착력과 내부마찰각을 각각 구할 수 있다.

$$C_t = 263 \text{ (Pa), and } \phi_t = 49^\circ \quad \text{for } 100 \leq \sigma \leq 250 \text{ (Pa)}$$

$$C = 382 \text{ (Pa), and } \phi = 34^\circ \quad \text{for } 500 \leq \sigma \leq 1000 \text{ (Pa)}$$

위 값을 식 (5)에 대입하면 다음과 같이 일축인장강도에서 100% 이상의 상대 오류가 발생된다. 그러므로 비선형 M-C 거동을 고려해야 한다.

$$\frac{\sigma_{tu}}{\sigma_{ta}} = \frac{C_t \tan\left(\frac{\pi - \phi_t}{4} - \frac{\phi_t}{2}\right)}{C \tan\left(\frac{\pi - \phi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)} = \frac{263 \tan(45 - 24.5)}{382 \tan(45 - 17)} = 0.48$$

## 5. 결 론

습윤 또는 불포화 모래의 경우, 입자들 사이에서 간극수의 메니스커스와 부의 간극수압 조건에서 간극수가 결합응력을 제공하여 인장강도가 유발된다. 발현된 인장강도를 고려한 M-C 파괴규준은 압축응력의 범위에 따라 선형과 비선형으로 구분하여 적용이 되어야 한다. 왜냐하면 상대밀도, 응력이력, 응력크기에 따라 모래의 거동은 기존의 선형 M-C 마찰거동을 따르지 않을 수도 있기 때문이다. 일반적으로 수십에서 수백 kPa의 큰 압축범위에서 선형 M-C 파괴규준은 모래의 전단강도에 표현에 적합하다. 하지만 수십 kPa이내의 낮은 압축응력범위에서 선형 M-C 파괴규준은 모래의 전단강도 거동을 표현하는데 있어 적합하지 않을 수 있다. 선형 또는 비선형 파괴규준 어느 것을 적용하느냐에 따라 일축인장강도 값은 100% 이상의 상대적이 차이가 발생된다. 그러므로 낮은 또는 0 응력상태의 옹벽 배면, 언덕, 사면의 정점과 같은 지반구조물에서 모래 지반의 거동은 비선형 M-C 파괴규준을 적용하는 것이 타당할 것으로 판단된다.

## 참고문헌

1. Fang, H. Y. and Fernandez (1981), "Determination of tensile strength of soils by unconfined-penetration test", *ASTM STP 740*, pp.130-144.
2. Kim, T-H. (2001), Moisture-induced tensile strength and cohesion in sand, PhD Dissertation, Department of Civil, Environmental and Architectural Engineering, University of Colorado, Boulder, CO.
3. Kim, T-H. and Hwang, C. (2003), "Modeling of tensile strength on moist granular earth material at low water content," *Engineering Geology*, Vol. 69, pp. 233-244.
4. Kim, T-H., Kim, C-K., Jung, S-J., Lee, J-H. (2007), "Tensile strength characteristics of contaminated and compacted sand-bentonite mixtures", *Environmental Geology*, Vol. 52, No. 4, pp. 653-661



5. Lu, N. and Likos, W.J. (2006), "Suction stress characteristic curve for unsaturated soil," *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 132, No. 2, pp. 131-142.
6. Lu, N., Wu, B., and Tan, C.P. (2005), "A tensile strength apparatus for cohesionless soils," *Proceedings of Experus 2005*, A. Tarantino et al. (eds.), Balkema.
7. Lu, N., Wu, B., and Tan, C.P. (2007), "Tensile strength characteristics of unsaturated sands," *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* 133(2): 144-154.
8. Sture, S., Costes, N. C., Batiste, S. N., Lankton, M. R., Alshibli, K. A., Jeremic, B., Swanson, R. A. and Frank, M. (1998), "Mechanics of Granular Materials at Low Effective Stresses", *Journal of Aerospace Engineering, ASCE*, Vol. 11, No. 3, pp. 67-72.