

# 구조물의 모달해석에 관한 연구

## Modal Analysis of Structures

김홍진† · 박제우\* · 황재승\*\*

Hongjin Kim, Je-Woo Park and Jae-Seung Hwang

**Key Words** : 모드참여계수(Modal participation factor), 모드형상(Mode shape), 시스템식별(System identification).

### ABSTRACT

The load distribution to each mode of a structure under seismic loading depends on the modal participation factor. The factor of an idealized analytical model, however, is different to the actual one due to modeling and construction error. Therefore, there exist limits on the estimation of actual behavior. In this study, an identification procedure for participation factor based on vibration test is proposed. The procedure has an advantage that the mode shape vector can also be estimated directly from the participation factor. The numerical simulation using a three story building is performed to evaluate the proposed procedure.

## 1. 서 론

모드참여계수(Modal Participation Factor)는 지반가속도가 각 모드에 미치는 영향을 나타내는 계수이다. 모드참여계수를 통하여 지진하중을 받는 전단 구조물에서 지반의 가속도와 각층 질량에 의해 생성되는 관성력이 각 모드에 배분, 전달된다. 모드참여계수는 내진설계해석에서 중요한 역할을 하기 때문에 해석과정에서 이를 구하는 방법은 구조동역학을 다루는 많은 문헌에 나타나 있다.<sup>(1)-(2)</sup>

그러나 이상화된 해석 구조물의 모드참여계수는 해석적 모델링이나 시공오차 등에 의하여 실 구조물의 참여계수와 다르기 때문에 실제 거동을 예측, 반영하기에 한계가 있다. 이상화된 전단구조물의 모드벡터는 실 구조물의 모드벡터와 차이가 있으며, 이로 인한 모드참여계수의 차이에 의해 구조물의 거동을 다르게 예측할 수 있다.

본 연구에서는 진동실험에 기초한 다자유도 구조물의 모드참여계수를 산정하는 방법을 제안한다. 이를 위해 구조물에 작용하는 지진하중과 응답을 이용하여 모드참여계수를 예측하는 기법을 이론적으로 정립한다. 모드참여계수를

구하기 위한 수학적 전개를 위하여 1개의 입력과 1개의 출력을 가지는 SISO (single input single output) 시스템을 고려하였다. 이러한 SISO 시스템 기반의 산정기법은 산정된 모드참여계수로부터 모드벡터를 바로 식별해낼 수 있는 장점을 갖고 있다. 본 연구의 모드참여계수와 모드벡터 산정방법을 검증하기 위하여 3층 전단건물에 대한 수치해석을 수행하였다.

## 2. 모드참여계수를 통한 모드형상 산정

### 2.1 모드참여계수 (Modal participation factor)

지반가속도를 받는  $n$ 층 전단구조물의 운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = -M\{1\}\ddot{x}_g \quad (1)$$

여기서,  $M$ ,  $C$ ,  $K$ 는 각각 구조물의 질량, 감쇠 강성행렬이며,  $\{1\}$ 는 모든 원소가 1인  $n$ 차의 열벡터,  $x$ 는 구조물과 지반의 상대변위,  $\ddot{x}_g$ 는 지반가속도이다. 식 (1)을 식 (2)와 같은 변환에 의해 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$x = \Phi\eta \quad (2)$$

$$\Phi^T M \Phi \ddot{\eta} + \Phi^T C \Phi \dot{\eta} + \Phi^T K \Phi \eta = -\Phi^T M \{1\} \ddot{x}_g \quad (3)$$

여기서,  $\eta$ 는 모드일반화좌표,  $\Phi$ 는 모드행렬이다. 모드분리에 의하여 각각의 모드는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

† 교신저자; 경북대학교 건축토목공학부 건축공학전공  
E-mail : hjk@knu.ac.kr  
Tel : (053) 950-7539, Fax : (053) 950-6590

\* 경북대학교 건축토목공학부 건축공학전공

\*\* 전남대학교 건축학부

$$\ddot{\eta}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = -\frac{\phi_i^T M(1)}{\phi_i^T M \phi_i} \ddot{x}_g \quad (4)$$

여기서,  $\phi_i$ ,  $\eta_i$ ,  $\xi_i$ ,  $\omega_i$ 는 각각  $i$ 번째 모드벡터와 모드변위, 감쇠비와 진동수이다. 각 모드에 해당하는 모드참여계수는 식(4)로부터 다음과 같이 정의된다.

$$\Gamma_{i=} \frac{\phi_i^T M(1)}{\phi_i^T M \phi_i} \quad (5)$$

식 (5)에서 모드참여계수는 각층의 질량뿐만 아니라 모드벡터에도 영향을 받기 때문에 모드벡터를 정규화하는 방법에 따라 달라지는 것을 알 수 있다.

## 2.2 시스템식별에 의한 모드참여계수 산정

가속도 값을 출력으로 하는 SISO (single input single output) 시스템에서  $p$ 층의 출력은 식 (2)에 의해서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\ddot{x}_p = (\phi_{p1} \ \phi_{p2} \ \dots \ \phi_{pn}) \begin{pmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\eta}_n \end{pmatrix} \quad (6)$$

여기서  $\phi_{pi}$ 는  $i$ 번째 모드의  $p$ 번째 모드값을 나타낸다. 만일 출력위치에 대한 각 모드의 모드값을 '1'로 정규화한다면 식 (6)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\ddot{x}_p = (1 \ 1 \ \dots \ 1) \begin{pmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\eta}_n \end{pmatrix} \quad (7)$$

모드공간에서의 운동방정식 (4)와 (7)은 아래 식 (8), (9)와 같은 전형상태공간모델 (typical state space model)로 변환이 가능하다.

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ [-\omega_i^2] & [-2\xi_i \omega_i] \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0_{m1} \\ -(I)_p \end{pmatrix} \ddot{x}_g \quad z = \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$y = (-\omega_1^2 \ \dots \ -\omega_n^2 \ -2\xi_1 \omega_1 \ \dots \ -2\xi_n \omega_n) \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \\ \dot{\eta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\eta}_n \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n (-I)_i \ddot{x}_g \quad (9)$$

여기서 0,  $I$ 는 각각  $n \times n$ 의 영행렬과 단위행렬이며,  $0_{n \times 1}$ 은  $n \times 1$ 의 '0' 벡터를 나타내고, []로 표현된 변수는 대각성분이 각각  $-\omega_i^2$ 과  $-2\xi_i \omega_i$ 인  $n \times n$  대각행렬을 나타내며,  $(I)_p$ 는  $p$ 층을 '1'로 정규화한 모드벡터의  $i$ 모드참여계수이다. 위식 (8)과 (9)는 간단히 기술하면 다음과 같다.

$$\dot{z} = Az + bu \quad (10)$$

$$y = cz + du \quad (11)$$

여기서  $u$ 는 시스템의 입력, 즉 지반가속도를 나타내며,  $A$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ 는 각각  $2n \times 2n$ ,  $2n \times 1$ ,  $1 \times 2n$ ,  $1 \times 1$  시스템 행렬이다. 위 식으로부터 시스템행렬  $b$ 를 구하면 모드참여계수를 구할 수 있음을 알 수 있다.

진동실험으로부터 시스템식별기술에 의해 구현된 임의상태공간모델은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{\bar{z}} = \bar{A}\bar{z} + \bar{b}u \quad (12)$$

$$y = \bar{c}\bar{z} + \bar{d}u \quad (13)$$

여기서  $\bar{z}$ 는 상태변수이고,  $\bar{A}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$ ,  $\bar{d}$ 는 시스템식별에 의해 구해진 시스템행렬이다.

식 (10)과 (11)의 상태변수 ( $z$ )는 모드공간에서의 모드변위라는 물리적인 의미를 갖고 있음에 반해, 식 (12)와 (13)의 임의상태공간모델은 입력 ( $u$ )과 출력 ( $y$ ) 사이의 관계만을 만족시키기 위하여 결정되기 때문에 중간매개변수로 사용되는 상태변수 ( $\bar{z}$ )와 시스템행렬은 임의의 형태를 가진다.

가관측행렬 (observability matrix)를 이용하면 임의상태공간모델의 시스템행렬과 전형상태모델의 시스템행렬의 관계를 아래와 같이 구할 수 있다.<sup>(3)</sup>

$$Qb = \bar{Q}\bar{b} \quad (14)$$

여기서  $Q$ 와  $\bar{Q}$ 는 각각 전형상태공간모델, 임의상태공간모델의 가관측행렬이다. 그런데 열벡터  $b$ 는 식 (8)과 같이 처음  $n$ 번째 요소가 모두 0이므로 다음과 같이 전형상태공간모델의 가관측행렬을  $n \times n$ 의 항렬로 구획하여 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{n1} \\ -(I)_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_1 \end{pmatrix} \bar{b} \quad (15)$$

따라서 모드참여계수는 다음과 같이 간단한 관계식으로부터 구할 수 있다.

$$(\Gamma_i)_p = -Q_{22}^{-1} Q_2 b \quad (16)$$

### 2.3 모드참여계수와 모드형상과의 관계

식 (5)로부터  $j$ 층을 '1'로 정규화했을 때의  $i$ 차 모드참여계수  $(\Gamma_i)_j$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(\Gamma_i)_j = \frac{(\phi_i)_j^T M \mathbf{1}}{(\phi_i)_j^T M (\phi_i)_j} \quad (17)$$

여기서,  $(\phi_i)_j$ 는  $i$ 차 모드벡터에서  $j$ 층에서 값을 '1'로 정규화했을 때의 모드벡터이다. 만약  $k$ 층의  $i$ 차 모드 값을 '1'로 정규화한 모드벡터를  $(\phi_i)_k$ 라고 정의하면, 이때의 모드벡터는  $j$ 층을 '1'로 정규화했을 때의 모드벡터와 다음과 같은 관계를 가진다.

$$(\phi_i)_k = \frac{(\phi_i)_j}{(\phi_k)_j} \quad (18)$$

여기서  $(\phi_k)_j$ 는  $j$ 층을 '1'로 정규화한  $i$ 차 모드벡터의  $k$ 번째 층의 값이다. 식(18)을 식 (17)에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$(\Gamma_i)_j = \frac{1}{(\phi_k)_j} \frac{(\phi_i)_j^T M \mathbf{1}}{(\phi_i)_k^T M (\phi_i)_k} = \frac{1}{(\phi_k)_j} (\Gamma_i)_k \quad (19)$$

여기서,  $(\Gamma_i)_k$ 는  $i$ 차 모드의  $k$ 층 모드 값을 '1'로 정규화했을 때의 모드참여계수이다. 식 (18)의 관계를 통하여 식별된 모드참여계수를 이용하여 다음과 같이 모드형상을 구할 수 있다.

$$(\phi_k)_j = \frac{(\Gamma_i)_k}{(\Gamma_i)_j} \quad (20)$$

## 3. 모드형상 산정 수치해석 예제

### 3.1 예제 구조물

본 수치해석 예제에서 사용되는 3층의 전단 건물로 가정하였으며 구조물과 하층의 동적특성은 아래 표1에 나타나 있다. 표1에서 각 모드별 모드형상은 3층의 모드 값을 1로 정규화한 값을 구하였으며, 각 모드별 모드참여계수는 모드벡터의 정규화 층에 따라 세 가지 경우를 나타내었다. 식(5)에서 설명한 것과 같이 모드참여계수는 정규화 방법에 따라 달라지는 것을 알 수 있다.

표 1. 다자유도 전단구조물의 동적특성

각층 질량		22.758 kg			
각층 감쇠		6.50 N sec/m			
각층 강성		3,764 N/m			
모드 특성	모드	1차모드	2차모드	3차모드	
	모드형상	1층	0.4450	-1.2470	1.8019
		2층	0.8019	-0.5550	-2.2470
		3층	1.0000	1.0000	1.0000
	모드참여계수	1층 정규화	0.5431	0.3493	0.1076
		2층 정규화	0.9787	0.1554	-0.1341
		3층 정규화	1.2204	-0.2081	0.0597
감쇠비 (%)		0.50	1.40	2.03	
진동수 (Hz)		0.9000	2.5216	3.6439	
출력		각층 절대 가속도			
외란		백색잡음			

### 3.2 시스템 식별 결과

3층 전단건물을 모델링하여 수치해석을 수행한 후, 각 층의 절대 가속도를 구하였다. 시스템식별을 위하여 N4SID (State Space Subspace System Identification) 기법을 이용하였다.<sup>(4)</sup> 시스템 식별에 사용된 모델은 상태방정식 모델이며, 차수는 6이다.

시스템 식별에 사용된 응답은 지반가속도이며 각층 절대 가속도를 이용하였다. 3층 전단구조물의 경우 SISO 시스템의 출력으로 사용할 수 있는 가속도 값이 세 개가 있기 때문에 각각의 경우에 대한 시스템 식별과 모드참여계수 산정을 수행하였다. 첫 번째 경우는 지반 가속도를 입력으로 사용하고 1층 가속도를 출력으로 사용한 것이며, 두 번째와 세 번째 경우는 각각 출력으로 2층, 3층 가속도를 사용한 것이다. 각 경우에 대한 기호와 사용입력과 출력을 표 2와 같이 나타내었다.

표 2. 시스템 식별을 위한 입출력 신호

식별 기호	입력	출력
Case 1	지반 가속도	1층 절대 가속도
Case 2	지반 가속도	2층 절대 가속도
Case 3	지반 가속도	3층 절대 가속도

지반 가속도와 1층 가속도를 이용하여 구한 상태방정식은 표3과 같다. 표4의 상태방정식을 이용한 전달함수와 시스템 식별에 사용된 전달함수의 비교는 그림 1과 같다. 표 3의 시스템 행렬로부터 구한 구조물의 고유진동수와 감쇠비가 그리고 참여계수가 표 4에 나타나 있다. 표 4에서 모드참여계수는 각 모드에 대한 1층의 모드벡터 값을 '1'로 가정했을 때의 값이다. 표1에 주어진 1층 정규화한 모드벡터를 이용한 모드참여계수와 동일한 값을 산정하는 것을 알 수 있다.

표 3. Case 1의 시스템 식별결과

행렬	값					
A	-1.6250	6.6302	-3.0290	3.9831	-9.9566	1.4873
	-9.8791	-0.6792	-9.6434	3.4626	-3.3839	-0.7438
	9.8104	11.2586	-0.0111	-0.2074	16.0704	-9.8427
	-6.3747	-4.1202	0.4556	-0.0840	7.3600	6.3363
	7.6165	1.6358	-12.7977	-8.5417	-0.7489	12.5439
	-1.8075	2.9767	3.5119	-4.2237	-11.9826	1.7200
B <sup>T</sup>	0.1101	0.1923	-0.4618	0.1578	0.1054	0.1266
C	31.7569	0.0044	-1.3325	1.1393	0.0806	-31.7144
D	0					

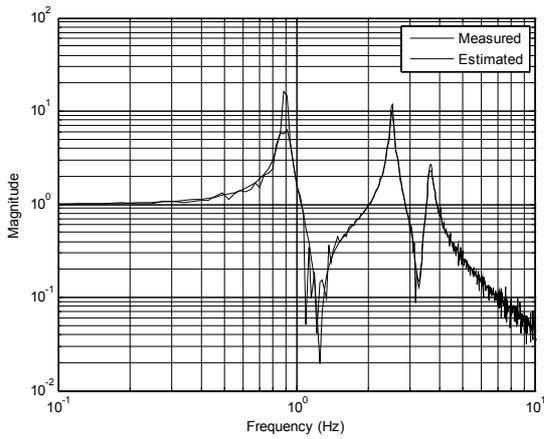


그림 1. 전달 함수 비교 (Case 1)

표 4. 구조물의 동적특성 식별결과 (Case 1)

모드	고유진동수 (Hz)	감쇠비 (%)	참여계수
1차 모드	0.8999	0.50	0.5431
2차 모드	2.5216	1.40	0.3493
3차 모드	3.6439	2.03	0.1076

전체 시스템 식별 결과를 바탕으로 산정한 모드참여계수를 모드별로 정리한 것이 표 5에 나타나 있다. 표 1에 주어진 모드참여계수와 비교하여 보았을 때 3층의 모드 값을 '1'로 정규화한 Case 3을 제외하고는 동일한 모드참여계수를 산정하는 것을 알 수 있다. Case 3의 경우도 모드참여계수가 거의 일치한다.

표 5. 참여계수 식별결과

모드	Case 1	Case 2	Case 3
1차모드	0.5431	0.9787	1.2227
2차모드	0.3493	0.1554	-0.2810
3차모드	0.1076	-0.1341	0.0585

표 7의 참여계수를 이용하여 식 (20)에 의해 구한 구조물의 각 모드 형상이 표 6에 나타나 있다. 그림 2에는 산정된 모드형상을 해석모델의 모드형상과 비교하여 나타내었다.

또한 비교를 위하여 Alvin 등<sup>(5)</sup>이 제안한 CBSI (Common Based-normalized System Identification) 방법을 이용하여 구한 모드형상을 구하여 나타내었다. 본 논문에서 제안한 방법에 의한 모드참여계수와 이를 통한 모드형상의 산정이 정확하게 이루어짐을 알 수 있다.

표 6. 모드형상 식별결과

층	1차 모드형상	2차 모드형상	3차 모드형상
1층	0.4450	-1.2430	1.8398
2층	0.8005	-0.5531	-2.2945
3층	1.0000	1.0000	1.0000

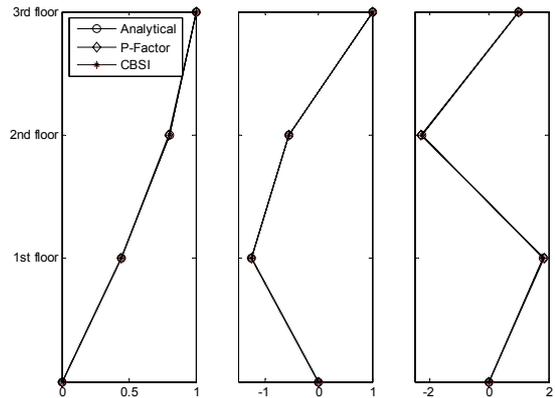


그림 2. 모드형상 비교

#### 4. 결 론

본 연구에서는 진동실험에 기초한 다자유도 구조물의 모드참여계수를 산정하는 방법을 제안하였다. 또한 산정된 모드참여계수로부터 모드벡터를 식별하는 과정을 제안하였다. 제안한 산정방법을 검증하기 위하여 3층 전단건물에 대한 수치해석을 수행결과 모드참여계수와 모드형상을 정 큰 차이 없이 예측하는 것으로 나타났다.

#### 참 고 문 헌

- (1) Clough, R. W. and Penzien, P., 1975, Dynamics of Structure, McGraw-Hill.
- (2) Paz, M. and Leigh, W., 2004, Structural Dynamics : Theory and Computation, Kluwer Academic Publishers.
- (3) 황재승, 2007, "진동실험에 기초한 다자유도 구조물의 모드질량 산정기법", 대한건축학회논문집, Vol. 23, No. 2, pp. 11~18.
- (4) Ljung, L., 2007, System identification toolbox user's guide, Mathworks.
- (5) Alvin, K. F. and Park, K. C., 1994, "Second-order structural identification procedure via state-space-based system identification", AIAA Journal, Vol. 32, pp. 397-406.