

# 중동력을 받는 외팔보의 진동특성에 미치는 세장비의 영향

## Effects of Slenderness ratio on Dynamic Behavior of Cantilever Beam Subjected to Follower Force

손인수\* · 윤한익\* · 안태수\*\*

In-Soo Son, Han-Ik Yoon and Tae-Su Ahn

**Key Words** : Timoshenko Beam(티모셴코 보), Dynamic Behavior(동특성), Follower Force(중동력), Slenderness ratio(세장비), Tip Mass(끝단질량)

### ABSTRACT

In this paper, the purpose is to investigate the stability and variation of natural frequency of a Timoshenko cantilever beam subjected to follower force and tip mass. In addition, an analysis of the flutter instability(flutter critical follower force) of a cantilever beam as slenderness ratio is investigated. The governing differential equations of a Timoshenko beam subjected to an end tangential follower force is derived via Hamilton's principle. The two coupled governing differential equations are reduced to one fourth order ordinary differential equation in terms of the flexural displacement. Finally, the influence of the slenderness ratio and tip mass on the critical follower force and the natural frequency of a Timoshenko beam are investigated.

### 1. 서론

일반적으로 보의 길이에 비해 그 단면적이 매우 작기만 하면 전단변형의 효과는 무시할 수 있음이 잘 알려져 있다. 보의 단면적과 길이에 대한 비는 세장비(slenderness ratio)이며 이를 이용하면 보의 기하학적 형상과 관심 있는 모드가 어떤 것인지, 그리고 몇 개의 모드를 고려할 것인지에 따라 오일러-베르누이 보 모델과 티모셴코 보 모델 중 어느 모델을 사용할지를 결정할 수 있다. 참고문헌 (1), (2)에는 세장비와 전단변형 및 회전관성의 영향에 의한 외팔보의 고유진동수비를 잘 나타내 주고 있다. 하지만 크랙을 가진 외팔보에 끝단질량과 중동력이 작용하는 경우 세장비의 영향에 의한 보의 고유진동수 변화에 대한 결과는 찾아보기 힘들다. 크랙이 없는 경우 세장비에 따른 임계 중동력에 대한 연구는 몇몇 진행되어져 왔다.<sup>(3,4)</sup> 특히, Lee<sup>(5)</sup> 등은 보의 끝단에 탄성지지 된 티모셴코 보에 중동력이 작용하는 경우 탄성지지와 세장비의 영향에 의한 안정성 연구를 수행하였다. 만약 보의 불안정에 큰 영향을 미치는 크랙이

존재하는 경우는 그 결과와 상이할 것이라 판단된다. 따라서 이 연구는 집중 중동력을 받는 티모셴코 보에 크랙이 존재하는 경우에 보의 고유진동수에 미치는 세장비의 영향에 대한 선행 연구로서 수행되어진 것이다. 특히 끝단질량의 영향을 고려한 경우 세장비와 임계 중동력의 상관관계 및 보의 고유진동수에 미치는 영향에 대한 결과도 도출하였다.

### 2. 중동력을 받는 Timoshenko 보

자유진동에 대하여 티모셴코 보 이론을 적용한 외팔보의 운동방정식을 Hamilton의 원리를 이용하여 유도하면 다음과 같다.<sup>(6)</sup>

$$EI \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + \kappa GA \left( \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \psi(x,t) \right) - \frac{mI}{A} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$\kappa GA \left( \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right) - P \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

\* 정회원, 동의대학교 기계공학과  
E-mail : isson92@deu.ac.kr  
Tel : (051) 890-2239, Fax : (051) 890-2232

\*\* 동의대학교 대학원 기계공학과

여기서  $y(x,t)$  는 횡방향 변위,  $\psi(x,t)$  는 전단변형,  $\kappa$  는 전단계수이다. 또  $P$ ,  $A$ , 그리고  $G$  는 각각 종동력과 보의 단면적, 그리고 전단탄성계수를 나타내고 있다.  $m$ ,  $E$ , 그리고  $I$  는 각각 보의 단위 길이당 질량, 영계수, 그리고 보의 단면 2차 모멘트를 의미한다. 식 (1), (2)로부터  $\psi(x,t)$  를 소거시키면 횡변위  $y(x,t)$  에 대한 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$EI\left(1 - \frac{P}{\kappa GA}\right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \rho I \left[1 + \frac{E}{\kappa G} - \frac{P}{\kappa GA}\right] \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\kappa G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0 \quad (3)$$

여기서  $\rho$  는 보의 밀도이며, 횡변위와 전단변형은 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y(x,t) = Y(x) e^{i\omega_f t}, \quad (4)$$

$$\psi(x,t) = \phi(x) e^{i\omega_f t} \quad (5)$$

여기서  $\omega_f$  는 보의 고유진동수이며  $i = \sqrt{-1}$  를 나타낸다. 식 (4)를 식 (1)에 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$Y^{iv} + \left[ \frac{(1 - \omega^2 \beta r^2)p + \omega^2(\beta + r^2)}{(1 - p\beta)} \right] Y'' + \frac{\omega^2(\omega^2 \beta r^2 - 1)}{(1 - p\beta)} Y = 0 \quad (6)$$

여기서  $()'$  은 무차원 좌표  $\xi (=x/L)$  에 대한 미분을 나타내며, 식 (6)에 사용된 각 무차원 파라미터는 다음과 같다.

$$\omega^2 = \frac{mL^4 \omega_f^2}{EI}, \quad \beta = \frac{Er^2}{\kappa G}, \quad r^2 = \frac{I}{AL^2}, \quad p = \frac{PL^2}{EI} \quad (7)$$

여기서  $L$  은 보의 전체 길이를 나타내며, 세장비는  $1/r$  이다. 식 (6)의 일반해를 구하면 다음과 같다.

$$Y(\xi) = A_1 \sinh(\lambda_1 \xi) + A_2 \cosh(\lambda_1 x) + A_3 \sin(\lambda_2 x) + A_4 \cos(\lambda_2 \xi) \quad (8)$$

여기서

$$\lambda_{1,2} = \left[ \frac{\sqrt{k_2} \mp k_1}{2} \right]^{1/2} \quad (9)$$

이며,  $k_1$  과  $k_2$  는 각각 다음과 같다.

$$k_1 = \frac{(1 - \omega^2 \beta r^2)p + \omega^2(\beta + r^2)}{(1 - p\beta)}, \quad (10)$$

$$k_2 = k_1^2 - 4\omega^2 \frac{(\omega^2 \beta r^2 - 1)}{(1 - p\beta)}$$

동일한 방법으로 계산을 하면 전단변형에 대해서도 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\phi(\xi) = q_1 A_2 \sinh(\lambda_1 \xi) + q_1 A_1 \cosh(\lambda_1 x) + q_2 A_4 \sin(\lambda_2 x) - q_2 A_3 \cos(\lambda_2 \xi) \quad (11)$$

여기서

$$q_1 = (1 - p\beta)\lambda_1 + \frac{\omega^2 \beta}{\lambda_1}, \quad q_2 = (p\beta - 1)\lambda_2 + \frac{\omega^2 \beta}{\lambda_2} \quad (12)$$

이다. 끝단질량을 가진 외팔보의 경계조건은

$$Y(0) = \phi(0) = 0, \quad \frac{d\phi(1)}{dx} = 0, \quad \frac{dY(1)}{dx} - \phi(1) = \mu \omega^2 \beta Y(1) \quad (13)$$

이다. 여기서  $\mu$  는 무차원 끝단질량으로

$$\mu = \frac{M}{mL} \quad (14)$$

이다. 식 (8), (11)의 미지수들은 식 (13)의 경계조건을 이용하여 각각 구할 수 있다. 또 계의 고유진동수는 다음과 같은 고유치의 기본 형태로 변환하여 쉽게 구할 수 있다.

$$\Lambda \mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad |\Lambda| = 0 \quad (14)$$

여기서  $\Lambda$  는 식 (12)의 경계조건을 대입하여 얻은 각각의 식을 행렬형태로 표현한 것이다. 또  $|\Lambda|$  는  $\Lambda$  의 행렬식을 나타내고 있으며,  $\mathbf{X}$  는 다음과 같다.

$$\mathbf{X} = [A_1, A_2, A_3, A_4]^T \quad (15)$$

여기서 위첨자 T는 전치를 의미한다.

### 3. 수치해석결과 및 고찰

이 연구에서는 수치해석에서 유도된 운동방정식을 이용하여 외팔보의 세장비에 따른 임계 종동력 값, 그리고 종동력과 끝단질량이 보의 고유진동수 변화에 미치는 영향을

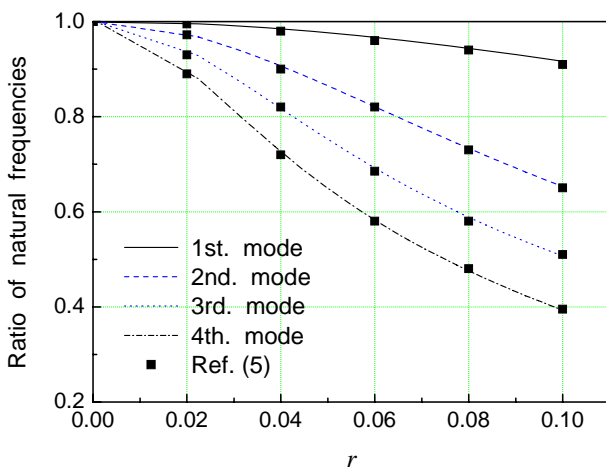
수치해석 예제를 통해 비교하고 고찰하였다. 수치해석은 Mathematica (5.0)를 이용하여 계산을 수행하였다. 일반적으로 종동력을 받는 외팔보에서 종동력이 증가할수록 1차 모드 고유진동수는 서서히 증가하고, 2차 모드 고유진동수는 감소하는데 두 모드의 고유진동수가 일치하는 점의 종동력 값이 그 계의 플러터 불안정을 유발하는 임계 종동력 ( $p_{cr}$ ) 값이다. 이 연구에서 세장비( $1/r$ )의 영향을 해석하기 위하여 참고문헌 (1)의  $\kappa = 5/6$ ,  $E/\kappa G = 3.20$ 의 값을 사용하였다. 먼저 수치해석의 타당성을 검토하기 위하여 Table 1과 Fig. 1에 이 연구의 결과와 참고문헌의 결과들을 비교하였다.

Table 1에서는 파라미터  $r^2$ 에 따른 티모셴코 보의 무차원 고유 진동수를 참고문헌 (7)과 비교한 결과이다. 이 결과에서 볼 수 있는 것처럼 최대 오차가 약 0.5% 정도로 두 결과가 거의 일치함을 알 수 있다. 또 Fig. 1은 세장비의 영향에 의한 보의 고유진동수 비를 4차 모드까지 나타낸 것으로 참고문헌과 거의 동일한 결과이다.

Table 2는 세장비 및 끝단질량에 의한 외팔 보의 임계 종동력값을 나타낸 것이다.  $r$ 의 크기가 증가할수록 임계 종동력값은 작아지며, 끝단질량과 임계 종동력값은 서로 반비

**Table 1** Natural frequency of Timoshenko cantilever uniform beam

$r^2$	$\omega_1$		$\omega_2$	
	Present	Ref.(7)	Present	Ref.(7)
10-7	3.52	3.51	22.03	22.03
0.0004	3.50	3.50	21.46	21.47
0.0016	3.46	3.46	19.98	20.01
0.0036	3.40	3.40	18.09	18.14
0.0064	3.32	3.32	16.16	16.23
0.01	3.22	3.22	14.39	14.46



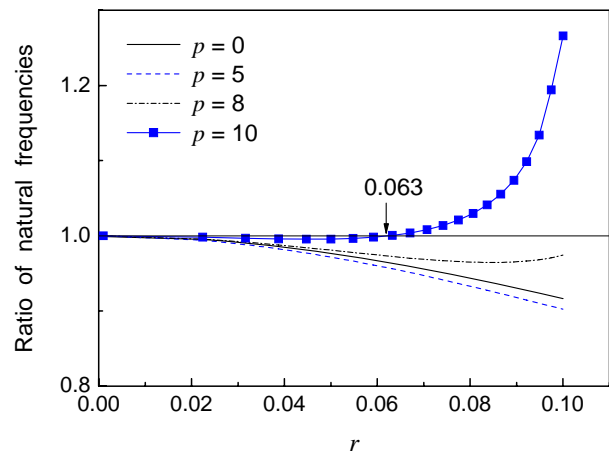
**Fig. 1** Influence of shear force and rotary motion on natural frequencies of cantilever uniform beam

례적인 경향을 가짐을 알 수 있다.

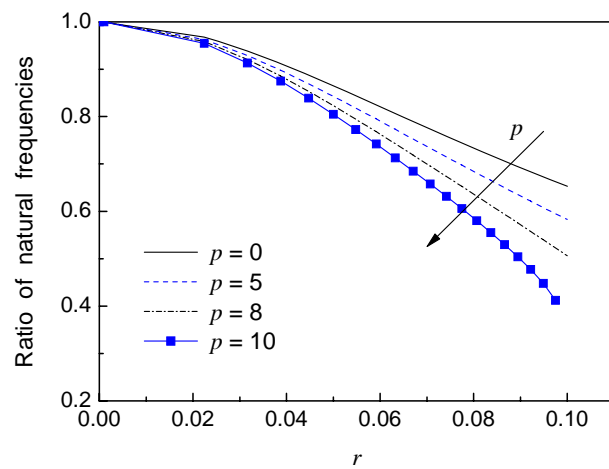
Fig. 2는 끝단질량이 없는 경우 세장비와 종동력의 영향에 의한 보의 고유진동수 비를 나타낸 것이다. 1차 모드에서는 종동력의 값이 일정정도 이하( $p = 7.4$ )에서는 종동력이 작용하지 않는 경우에 비하여 고유진동수비가 더 낮게 나타나지만 그 이상의 경우에는 오히려 진동수비가 더 크게 나타남을 알 수 있다. 특히 종동력이 10인 경우 세장비가 15.9( $r = 0.63$ ) 이상인 경우 오일러 보인 경우에 비

**Table 2** Critical follower force as slenderness ratio

$r$	Critical follower force ( $p_{cr}$ )		
	$\mu = 0$	$\mu = 0.2$	$\mu = 0.5$
0.02	19.21	16.17	15.56
0.04	17.15	14.77	14.33
0.06	14.53	12.91	12.63
0.08	12.03	11.01	10.83
0.1	9.91	9.27	8.65



(a) First mode



(b) Second mode

**Fig. 2** Natural frequencies of Timoshenko cantilever beam according to the follower force ( $\mu = 0$ )

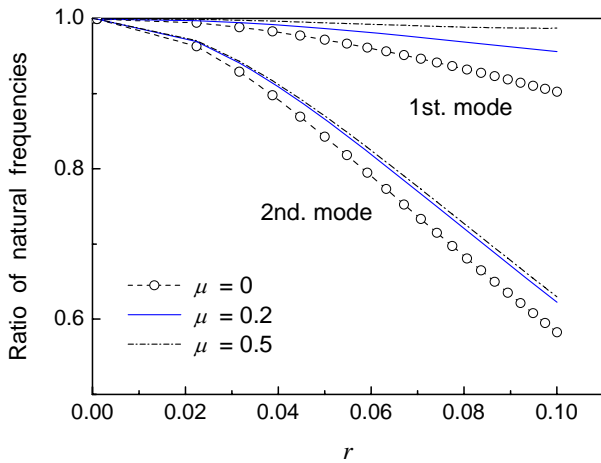


Fig. 3 Influence of tip mass on natural frequencies of Timoshenko cantilever beam( $p = 5$ )

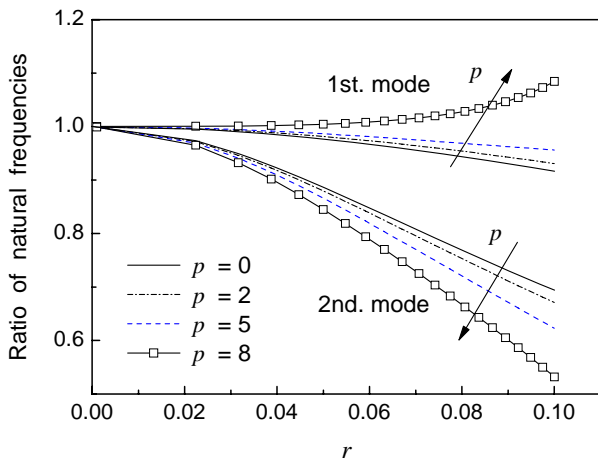


Fig. 4 Influence of follower force on natural frequencies of Timoshenko beam( $\mu = 0.2$ )

하여 고유진동수가 더 크다는 것을 알 수 있다. 또 2차 모드에서는 종동력과 진동수비는 서로 반비례적인 경향을 보인다.

Fig. 3은 무차원 종동력  $p = 5$ 로 작용하는 경우 끝단질량과 세장비의 영향에 의한 보의 고유진동수 변화를 도시하였다. 끝단질량과 진동수비는 서로 비례적인 경향을 가짐을 알 수 있다.

Fig. 4는 무차원 끝단질량의 크기가 0.2인 경우 종동력의 영향에 의한 보의 고유진동수 비를 나타내었다. 1차 모드에서는 종동력의 영향에 의하여 진동수비가 점점 증가하는 경향을 보이고 2차 모드에서는 그 반대의 경향으로 변화한다.

#### 4. 결론

외팔보에 종동력과 끝단질량이 작용하는 경우 보의 세장비의 영향에 따른 보의 임계 종동력과 고유진동수 변화에 대하여 수치해석 하였다. 이 연구는 크랙을 가지는 경우 임계 종동력과 세장비의 관계를 파악하기 위한 선행 연구로 진행되었다. 본 연구의 결과는 종동력과 끝단질량을 고려하여 티모센코 보 이론을 적용할 경우 수치해석 예제의 선택에 있어 단면적과 길이의 결정에 참고할 수 있을 것이라 판단된다.

#### 참고 문헌

- (1) Harris, C. M., 1961, Shock and Vibration Handbook(Fourth Edition), McGraw-Hill, Chapter 7.
- (2) Igor, A. K. and Olga, I. L., 2001, Formulas for Structural Dynamics, McGraw-Hill.
- (3) Kounadis, A. and Tatsikadelis, J. T., 1976, "Shear and rotatory inertia effect on Beck column", Journal of Sound and Vibration, Vol. 49, pp. 171~178.
- (4) Saito, H. and Otomi, K., 1979, "Vibration and Stability of Elastically Supported Beams Carrying an Attached Mass Under Axial and Tangential Loads", Journal of Sound and Vibration, Vol. 62, pp. 257~266.
- (5) Lee, S. Y., Chen, T. Y. and Wang, W. R., 1995, "Non-conservative Instability of a Timoshenko Beam Subjected to a Partially Tangential Follower Force", Journal of Sound and Vibration, Vol. 188, No. 1, pp. 25~38.
- (6) Meirovitch, L., 1967, Analytical Methods in Vibration, The Macmillan Company, New York, Chapter 5.
- (7) Rossi, R. E., Laura, P. A. A. and Gutierrez, R. H., 1990, "A Note on Transverse Vibrations of a Timoshenko Beam of Non-uniform Thickness Clamped at One End and Carrying a Concentrated Mass at the Other", Journal of Sound and Vibration, Vol. 143, No. 3, pp.491~502.