

형상기억합금을 이용한 3 차원 비선형 트러스 지능작동기 해석

Analysis of 3-D non-linear truss smart actuator using SMA

양성필*·김상헌·리녕학·류정현·조맹효†

Seongpil Yang, Sanghaun Kim, Li Ningxue, Junghyun Ryu, Maenghyo Cho

Key Words: Shape memory alloy, Three dimensional truss, Non-linear simulation, Actuator

ABSTRACT

Shape memory alloys (SMA) have interesting features which are the superelastic effect (SE), shape memory effect (SME), two-way SME (TWSME), and so on. These are utilized in actuation factor. The thermo-mechanical constitutive equations of SMA proposed by Lagoudas et al. were employed in the present study for simulating SMA truss structures. The constitutive equation includes the necessary internal variables to account for the material transformations and is utilized in the non-linear finite element procedure of three dimensional truss structures that composed SMA bar (wholly or partially). In this study, we observed which element should be actuated to get a desired shape (actuation shape) from computational analysis. To reach this goal, we apply SMA constitutive equation to non-linear finite element formulation. And then, we simulate two-way shape memory effect as well as superelastic effect of various three dimensional truss using SMA.

구조물을 작동기 분야에 적용할 수 있는 방법을 제시하고자 한다.

SMA의 거동을 해석하기 위해 Lagoudas의 구성방정식을 이용하였고, 유한요소해석 정식화를 통해 수치해석을 수행하였다. 그리고 비선형 수치해석을 위해 Crisfield의 진변형률을 이용한 Corotation 정식화를 사용하였다.

———— 기호설명 ————	
G	Gibb's free energy
ξ	Martensite volume fraction
Λ	Phase transformation tensor
Π	Thermodynamic force
λ	Lagrange multiplier
L_e	Transformation matrix
Q_{int}	Internal force
K	Tangent stiffness matrix

1. 서론

형상기억합금(Shape Memory Alloy)은 소성변형이 없이도 오스테나이트와 마르텐사이트 사이의 상변이에 의해 최대 10%의 큰 변형률을 얻을 수 있는 특징을 가진 합금이다. 이러한 특징으로 인해 형상기억합금은 일반적인 금속이나 합금에서는 찾아볼 수 없는 초탄성(superelasticity)거동과 형상기억효과(shape memory effect)등이 나타난다. 먼저 초탄성거동이란, 오스테나이트 상태에서 힘을 가하여 변형을 시킨 후 힘을 제거하면 재료의 모양이 원래대로 돌아가는 것을 의미한다. 형상기억효과는 오스테나이트 상변이 시작 온도 아래에서 하중을 가했다가 제거했을 경우 변형이 남아있게 되는데, 재료에 오스테나이트 상변이 종료 온도 이상으로 열을 가해주면 재료가 다시 원래의 모양으로 돌아오는 현상을 의미한다.

본 연구에서는 위와 같은 특징을 가진 형상기억합금을 이용한 3 차원의 트러스 구조물의 비선형 수치해석을 통해 거동을 살펴보고 형상기억합금 트러스

2. 구성방정식

2.1 형상기억합금의 구성방정식

형상기억합금은 온도와 응력이 변화함에 따라 오스테나이트와 마르텐사이트 사이의 상변이가 일어나게 되는데, 마르텐사이트 체적비 ξ 를 이용하여 순수 상변이만을 고려하면 Gibbs 자유에너지를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$G = G^A(\sigma_{ij}, T) + \xi [G^M(\sigma_{ij}, T) - G^A(\sigma_{ij}, T)] + G^{mix} \quad (1)$$

G^{mix} (Transformation Strain)는 응력 또는 온도의 변화에 따라 미세하게 발생하므로 이들의 효과를 무시할 수 있다.

$$G^{mix} = G^{mix}(\sigma_{ij}, T, \xi, \epsilon'_{ij}) = f(\xi, \epsilon'_{ij}) \quad (2)$$

식(1),(2)에 의해 SMA 총 Gibbs 자유에너지는 다음과 같이 표현된다. 또한 이 식은 상변이 동안에도 에너지가 보존됨을 보여준다.

$$G = G^A(\sigma_{ij}, T) + \xi [G^M(\sigma_{ij}, T) - G^A(\sigma_{ij}, T)] + f(\xi, \epsilon'_{ij}) \quad (3)$$

한편, 위 식(3)의 표현의 한계는 상변이 정도를 ξ

† 교신저자; 서울대학교 기계항공공학부

E-mail : mhcho@snu.ac.kr

Tel : (02) 880-1693, Fax : (02) 886-1693

* 서울대학교 기계항공공학부

로 나타내었기 때문에 미세구조에서 재복귀효과를 설명할 수 없다는 것이다. 그러나 거시적인 현상학적 거동은 정확하게 표현할 수 있다.

$$G(\sigma_{ij}, T, \xi, \varepsilon'_{ij}) = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{2} \bar{S} : \sigma - \frac{1}{\rho} \sigma : [\bar{\alpha}(T - T_0)] + \bar{c} \left[(T - T_0) - T \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) \right] - \bar{s}_0 T + \bar{u}_0 + f(\xi) \quad (4)$$

$$\begin{cases} \bar{S} := S^A + \xi \Delta S \\ \bar{\alpha} := \alpha^A + \xi \Delta \alpha \\ \bar{c} := c^A + \xi \Delta c \\ \bar{s}_0 := s_0^A + \xi \Delta s_0 \\ \bar{u}_0 := u_0^A + \xi \Delta u_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta S = S^M - S^A \\ \Delta \alpha = \alpha^M - \alpha^A \\ \Delta c = c^M - c^A \\ \Delta s_0 = s_0^M - s_0^A \\ \Delta u_0 = u_0^M - u_0^A \end{cases}$$

위 식은 식(3)에 대하여 형상기억합금이 가지고 있는 오스테나이트와 마르텐사이트 두 상의 물성치를 이용하여 나타낸 식이다. 여기서, S 는 컴플라이언스, α 는 열팽창 계수, c 는 비열, s_0 는 초기엔트로피, u_0 는 초기내부에너지를 나타낸다.

$$T\dot{\eta} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho \dot{\psi} - \rho s \dot{T} \geq 0 \quad (5)$$

식(5)는 열역학적 제 1 법칙과 Helmholtz 자유에너지 식을 이용하여 열역학 제 2 법칙인 Trussdell&Noll Strong local form 으로 실제 자연계에서와 같은 에너지의 발산을 표현한 식이다. 여기에서는 열발산(Heat Radiation)과 열발생(Heat Generation)이 없다고 가정하였다. ($T\dot{\eta}$) ≥ 0

$$\dot{G} = \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial G}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial G}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial G}{\partial \varepsilon'_{ij}} \dot{\varepsilon}'_{ij} \quad (6)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{te} + \varepsilon'_{ij} \quad (7)$$

총 Gibbs 자유에너지의 시간에 대한 증분 형태인 식(6)과 변형률을 열탄성과 상변이 부분으로 나눈 식(7)에 의해서 식(5)는 다음의 에너지 발산식이 전개된다.

$$T\dot{\eta} = \left(\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial G}{\partial \varepsilon'_{ij}} \right) \dot{\varepsilon}'_{ij} - \rho \frac{\partial G}{\partial \xi} \dot{\xi} \geq 0, \quad T\dot{\eta} \geq \phi' z \quad (8)$$

여기서 ϕ' 는 상변이 동안에 발생하는 에너지 발산을 나타내며 일관성 방정식(Consistent Equation)이라고 한다. 그리고 경화함수 $f(\xi, \varepsilon'_{ij})$ 는 상변이 변형률(ε'_{ij})에 독립적이다. 즉, Kinematic Transformation

Hardening 가 무시된 탄성 변형에너지를 담당하며 항상 양의 값을 가져야 한다. 또한 상변이 동안 다른 구별되는 미세구조의 형성 때문에 변곡점이 존재해야 한다. 또한 앞서 언급된 이유로 상변이 변형률은 마르텐사이트 체적증분에 비례할 것이다.

$$f = f(\xi), \quad f(0) = 0, \quad f(\xi) \geq 0 \quad (9)$$

$$\dot{\varepsilon}'_{ij} = \Lambda_{ij} \dot{\xi}$$

여기서 Λ_{ij} 는 상변이 텐서로서 형상기억합금의 종류 또는 축방향에 따른 상변이 정도를 나타낸다. 식(9)를 식(8)에 대입하면 에너지 발산식이 다음과 같이 간단하게 전개된다.

$$T\dot{\eta} = \left(\sigma_{ij} \Lambda_{ij} - \rho \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) \dot{\xi} = \Pi \dot{\xi} \geq 0, \quad T\dot{\eta} = \phi' \quad (10)$$

위의 식에서 Π 는 열역학적 힘(Thermodynamic Force)이라고 하며 열역학적 힘과 마르텐사이트 체적증분량의 곱으로 구해지는 일관성 방정식은 다음에 나오는 Kuhn-Tucker Condition 에 의해 주어진 온도에서의 탄성구간과 상변이 구간을 나타내는 중요한 식이 된다.

$$\dot{\xi} = \lambda \frac{\partial \phi'}{\partial \Pi} \quad (11)$$

$$\lambda \geq 0 \text{ and } \phi' \leq Y \Rightarrow \lambda(\phi' - Y) = 0 \quad (12)$$

$$\Pi < \pm Y^*, \quad \dot{\xi} = 0 : \text{Elastic Region} \quad (13)$$

$$\Pi = \pm Y^*, \quad \dot{\xi} > 0 : \text{Transformation Region}$$

식(11)은 관련흐름법칙으로써 라그랑지 승수(Lagrange multiplier: λ)는 마르텐사이트 체적변형률에 비례한다는 것이고, 식(12)는 일반적인 Kuhn-Tucker Condition 의 형태이며, 여기서 Y 는 상변이가 일어나기 시작하는 시점의 응력값을 나타낸다. 식(13)은 유도된 SMA 구성방정식에 대한 Kuhn-Tucker Condition 을 적용한 것으로써, 앞서 언급한 바와 같이 제안된 구성방정식에 의한 형상기억합금의 거동이 탄성 구간과 상변이 구간으로 연속성 있게 거동하도록 하는 중요한 식이다. 여기서 Y^* 는 Y 와 ϕ' 의 관계를 Π 의 관계로 나타낸 값이다.

변형이 시간증분에 대해 독립적(Rate-Independent)이라는 가정하에 에너지발산식(Dissipation Potential) ϕ' 도 Rate-Independent 이다.

$$\dot{\phi}' = 0 \quad (14)$$

위 식은 상변이 구간에서 일관성 조건을 나타내며 이 조건과 식(10)을 이용하면 다음과 같이 열역학적 힘에 대한 일관성 조건이 구해진다.

$$\dot{\Pi} = 0 \quad (15)$$

식(15)는 상변이 구간에서 연속조건을 나타내며 이를 이용하면 다음과 같은 접선 관계식이 구해진다.

$$d\sigma = \left[\bar{S}^{-1} - \frac{\bar{S}^{-1} : \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma} : \bar{S}^{-1} : \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}}{\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma} : \bar{S}^{-1} : \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma} \mp \frac{\partial \Pi}{\partial \xi}} \right] : d\varepsilon + \bar{S}^{-1} : \left[\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma} : \bar{S}^{-1} : \bar{\alpha} - \frac{\partial \Pi}{\partial T} \right) - \bar{\alpha} \right] dT \quad (16)$$

$$\Pi = \sigma : \Lambda + \frac{1}{2} \sigma : \Delta S : \sigma + \sigma : \Delta \alpha (T - T_0) - \rho \Delta c \left[(T - T_0) - T \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) \right] + \rho \Delta s_0 T - \rho \Delta u_0 - \rho \frac{\partial f}{\partial \xi} \quad (17)$$

식(15),(16)을 이용하여 상변이 구간에서의 응력, 온도, 마르텐사이트 체적증분량을 구할 수 있다.

2.2 트러스 구조물의 선형 유한요소해석 정식화

트러스 구조를 FEM 을 통해 해석하려면 먼저 각 트러스의 요소를 아래의 식(18)과 같이 3 차원의 전체좌표계에서 1 차원의 국부좌표계로 변환해주는 것이 필요하다.

$$\mathbf{q}' = \mathbf{L}_e \mathbf{q} \quad , \quad \mathbf{L}_e = \begin{bmatrix} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{bmatrix} \quad (18)$$

위의 은 변환행렬(Transformation Matrix)로서 은 각 X,Y,Z 축의 방향코사인이다. 국부 좌표계(Local Coordinate)에서 변형률-변위 행렬(\mathbf{B}_e)과 국부(Local)강성행렬(\mathbf{k}'_e)은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{B}_e = \frac{1}{l_e} [1 \quad -1] \quad , \quad \mathbf{k}'_e = \mathbf{B}_e^T E_e \mathbf{B}_e A_e l_e \quad (19)$$

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{L}_e^T \mathbf{k}'_e \mathbf{L}_e \quad (20)$$

그리고 식(19)의 국부(Local)좌표계에서의 강성행렬에 변환행렬을 사용하면 전체(Global)좌표계에서의 강성행렬이 완성된다. 여기서 E_e 는 요소의 탄성계수, A_e 는 요소의 단면적, l_e 은 요소의 길이를 나

타낸다. 선형에서 증분 평형방정식과 응력 증분식은 다음과 같다.

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{K} \Delta \mathbf{Q} \quad , \quad \Delta \sigma_e = E_e \mathbf{B}_e \Delta \mathbf{q} \quad (21)$$

본 연구의 해석은 증분형태의 SMA 구성방정식의 수치해석을 위해 비교적 계산시간이 짧고 간단한 Cutting Plane Return Mapping Algorithm 을 사용하였다. 한편, 식(21)을 통해 증분힘(Incremental Force)에 대한 요소의 증분변위, 증분변형률, 증분 응력을 구할 수 있다.

2.3 비선형 유한요소해석 정식화

비선형 유한요소 정식화를 위해 본 연구에서는 Green-Lagrangian strain 을 이용하였다.

$$DCOSX = \frac{L_0 + u_2 - u_1}{L} \quad , \quad DCOSY = \frac{v_2 - v_1}{L} \quad , \quad DCOSZ = \frac{w_2 - w_1}{L} \quad (22)$$

위 식 (22)는 업데이트된 부재를 기준으로 한 각 부재마다 전체(Global)좌표계 축으로의 방향코사인을 나타낸다.

$$\mathbf{B}_T = [-DCOSX \quad -DCOSY \quad -DCOSZ \quad +DCOSX \quad +DCOSY \quad +DCOSZ] \quad (23)$$

그리고 방향코사인을 이용하여 변형률과 변형량 사이의 관계인 식 (23)을 만든다.

$$\mathbf{Q}_{int} = \mathbf{B}_T^T \mathbf{N} \quad , \quad \mathbf{N} = \frac{EA}{L_0} \mathbf{u}_i \quad (24)$$

Tangent stiffness matrix 를 이끌어내기 위해 위의 식(24)와 같이 truss 의 내력을 구할 수 있다. 그리고 나서 변분법을 통해 내력의 tangent stiffness matrix 성분을 구할 수 있다.

$$\delta \mathbf{Q}_{int} = \delta \mathbf{B}_T^T \mathbf{N} + \mathbf{B}_T^T \delta \mathbf{N} = (\mathbf{K}_M^T + \mathbf{K}_G^T) \delta \mathbf{u} = \mathbf{K}^T \delta \mathbf{u} \quad (25)$$

$$(\mathbf{K}_M^T = \frac{EA}{L_0} \mathbf{B}_T^T \mathbf{B}_T \quad , \quad \mathbf{K}_G^T = \delta \mathbf{B}_T^T \mathbf{N})$$

위의 식(25)에서 $\delta \mathbf{B}_T^T$ 은 앞에서 구한 식(23)을 이용하여 각 국부(Local)좌표계의 성분으로 미분을 취하면 쉽게 구할 수 있다.

3. 수치해석 예제 및 결과

3.1 수치해석 예제

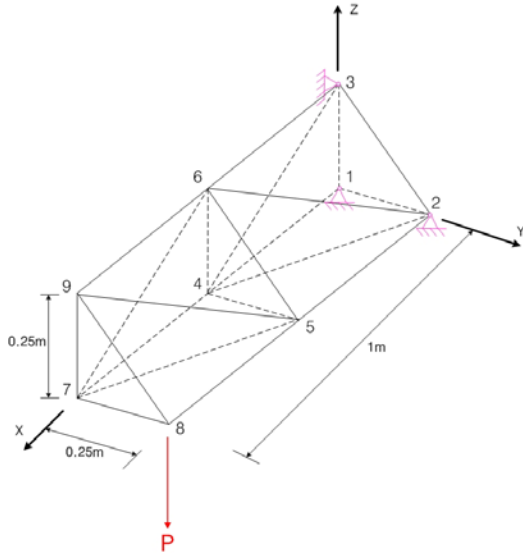


Fig. 1 The geometry of the SMA truss

위의 Fig.1 은 본 연구에서 해석하려는 SMA 를 이용한 3 차원 트러스 구조물로서, 9 개의 node 와 21 개의 element 로 구성되어 있고, 재료의 물성치는 아래의 Table 1. 과 같다.

Table 1. Material Properties of SMA bar

ϕ_{SMA} [m]	2e-3	T_0 [K]	316
E_A [Pa]	70e9	A_f [K]	316
E_M [Pa]	30e9	A_s [K]	301
α_A [/K]	22e-6	M_s [K]	273
α_M [/K]	10e-6	M_f [K]	260

이를 이용하여 증분형태의 FEM 과 SMA 구성방정식을 바탕으로 Newton-Rhapson 방법을 이용하여 SMA 의 거동이 수치해석 된다.

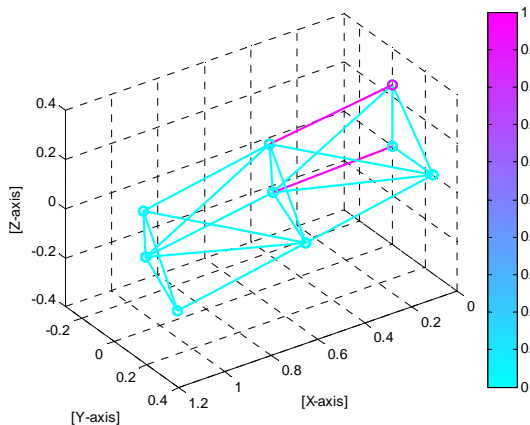


Fig. 2 Deformed shape of 3-D SMA structure

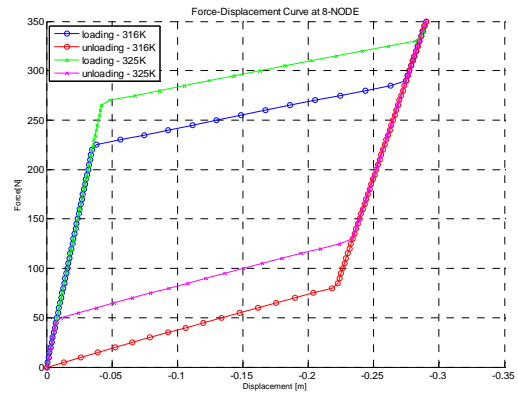


Fig. 3 Force – Displacement Curve

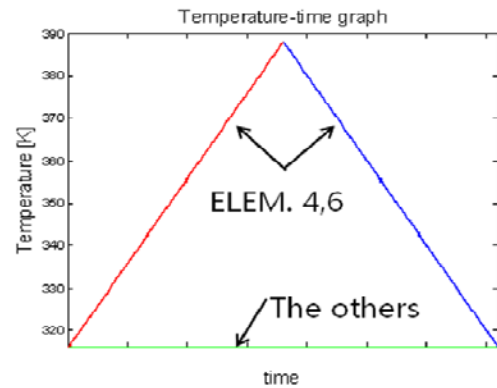


Fig. 4 Temperature - Time graph

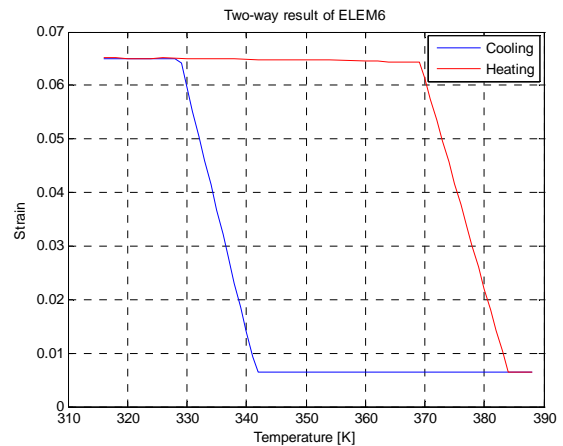


Fig. 5 Two-way result of ELEM.6

3.2 수치해석 결과

먼저, 3 차원 SMA 트러스 구조물의 초탄성효과를 알아보기 위해 Fig.1 의 8 번 node 에서 - Z 방향으로 350N 까지 하중을 단계적으로 증가시켰다가 감소시켰다. 최대하중인 350N 의 힘을 가하면 Fig.2 의 모양처럼 2 개의 요소에서 상변이가 나타나며 구조물에 변형이 생긴다. 그리고 하중을 증가시켰다가 감소시키기에 따라 Fig.3 에서 나타나듯이 거동 중간에 큰 변형이 생기고, 거동이 끝날 때에는 다시 원래의

형태로 되돌아옴을 알 수 있다. 초기온도(T_0)를 증가시켜도 오스테나이트 끝온도(A_f)보다 높기 때문에 똑같이 초탄성 거동이 보임을 알 수 있다.

다음으로, 구조물에 하중을 최대로 준 상태의 잔류 응력 하에 상변이가 생긴 2 개의 요소에 Fig.4 와 같이 온도를 가열했다가 냉각시킴에 따라 상변이에 의한 요소와 구조물의 거동을 살펴보았다. 대표적으로 두 요소 중 위쪽 요소의 거동을 살펴보면 Fig.5 와 같이 온도에 따라 일정 구간에서 상변이가 일어나며 급격한 변형률의 증가 또는 감소가 발생한다.

4. 결 론

본 연구에서는 SMA 를 이용한 트러스 구조물에 하중이 가해졌을 때 그 구조물이 초기 온도에 따라 어떻게 거동하는 지를 살펴보고, 이에 따른 상변이를 관찰하였다. 그리고 하중이 가해진 구조물에 온도를 제어하여, 요소의 상변이가 변화함에 따른 구조물을 작동시켜보았다. 또한 이러한 결과를 통해 트러스 구조를 가진 SMA 작동기를 설계 및 제작할 경우 원하는 작동을 위해 요소의 움직임을 알아보고 구조물의 거동을 파악함으로써 작동기를 제작하기 전에 SMA 트러스 작동기의 거동을 미리 예상하여, 최상의 성능을 가지는 작동기의 설계를 구현할 수 있을 것이다.

후 기

본 연구는 국방과학연구소의 기초연구과제의 지원으로 수행되었습니다.

참 고 문 헌

- (1) Cho, M. H. and Kim, S. H., 2005, " Structural Morphing Using Two-way Shape Memory Effect of SMA" , International Journal of Solids and Structures. Vol.42, Issues 5-6, pp.1759-1776.
- (2) Kim, S. H. and Cho, M. H., 2007, " Numerical simulation of a double SMA wire actuator using the two-way shape memory effect of SMA" , Smart Materials and Structures. Vol.16, pp.372-381.
- (3) Crisfield, M. A., 1990, " A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements" , Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol.18, pp.131-150
- (4) Argyris, J., 1982, " An excursion into large rotations" , Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol.32, pp.85-155