Hertz 접촉 이론을 이용한 평판 구조물의 충돌 해석
Impact Analysis of a plate structures Employing Hertzian Contact Theory

임홍석†·유홍희*
Hong Seok Lim and Hong Hee Yoo

Key Words : Hertzian contact theory(Hertz 접촉이론), cantilever plate structures(외팔 평판 구조물), impact analysis(충돌 해석), translational acceleration(병진 가속도)

ABSTRACT

A modeling method for the impact analysis of plate structures employing Hertzian contact theory is presented in this paper. Since local deformation as well as bending deflection of the plate occurs due to the collision, it has to be considered for the impact analysis. When the coefficient of restitution is employed for the impact analysis, the local deformation is not considered. For more accurate and reliable impact analysis, however, the local deformation should be considered. The effects of the location of collision and the collision mass on the impact duration time and the contact force magnitude are investigated through numerical studies employing Hertzian contact theory.

1. 서 론

평판 구조물은 여러 가지 공학적 예제에서 발견되는 중요한 구조 형태이며 항공기나 로켓의 날개, 인공위성의 태양열 전지판, 그리고 헬리콥터의 블레이드 등과 같은 외팔 평판 구조물 형태의 예제들을 대표적으로 볼 수 있다. 이들 중에 특별히 비행기나 로켓의 날개는 이륙 또는 발사 시에 병진 방향 가속도를 받게 된다. 그리고 이러한 평판의 병진 방향 가속도는 시스템 강성 변화를 가져오게 되어 그 동적 특성들을 변화시키게 된다. 이러한 구조물들은 때때로 작동 시 충돌을 일으키게 되며 (날개에 충돌하는 우박 충돌 효과나 피탄의 충돌 효과) 이러한 충돌은 평판의 굽힘 변형과 같은 국부 변형을 발생시키므로 충돌 해석 시 그 영향이 고려되어야 한다. 또한 충돌 해석에 사용되는 반발계수로는 이 국부 변형의 영향이 고려되지 않으므로 이러한 운동을 하는 구조물의 충돌에 의한 동적 특성의 정확한 규명을 위해서는 평판의 국부 변형의 영향을 고려한 충돌 모델링과 해석을 위한 연구가 필요하다.

강체 운동을 하는 구조물의 진동 특성에 대한 연구는 참고문헌[1-5]에서 보여지는 바와 같이 블레이드형 구조물부터 참고문헌[6-9]에서의 평판형 구조물들에 대해 이루어지고 있는 것을 볼 수 있으나 충격은 고려하지 않았고, 강체 운동을 하는 구조물의 충격해석에 관한 연구는 참고문헌[10-14]에서 보여지나 충격으로 인한 충격력을 간단한 형태로 가정해서 이러한 해석 모델은 특정 경우에만 적용된다. 그러나 로켓이나 항공기는 작동 중에 (강체 운동을 하며) 충돌을 일으킬 수 있으며, 발생하는 충돌은 충돌 대상에 따라 매우 다양하므로 평판의 국부 변형과 큰 상관관계를 지닐 수도 있다. 따라서 본 연구의 목적은 강체 운동을 하는 구조물에 대한 다양한 충돌을 보다 정확히 해석하기 위해 구조물의 국부 변형을 고려한 충돌 해석 모델링을 도출하고 강체 운동의 크기와 충돌 위치 등에 따른 충돌 시간과 충격력의 변화를 관찰하고자 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 서론에 이어 다음 절에서는 충돌이 일어나는 병진 가속을 받는 외팔 평판의 굽힘 방향 운동방정식을 유도하고 충돌 시 발생하는 접촉력을 구조물의 국부 변형을 고려한 수정된 Hertz 접촉 이론을 이용하여 유도하였으며 3 절에서는 해석 결과를 도출하고 충돌 위치 변화와 충돌 물체의 질량에 따른 충돌시간과 접촉력의 크기 등에 관해 논의하였다. 마지막 절에서는 본 논문의 결론을 수록하였다.

2. 운동방정식

2.1 운동방정식 유도

Fig. 1 은 가로 a, 세로 b 그리고 일정두께 h를 가지는 외팔 평판을 보여준다. 이 평판은 가속을 받는 고정단에 부착되어 있으며 구와 임의의 시간 t_I 에 R점에서 굽힘 방향으로 충돌이 발생한다. 평판 상의 임의의 한 점인 P점의 탄성변형 변위는 직교방향 변수인 u_1, u_2, u_3 로 나타내어 진다. 여기서 ρ 는 평판의 단위면적당 질량이고 E, E_s

† 교신저자: 한양대학교 대학원 기계공학과
E-mail : limit75@dreamwiz.com
Tel : (02) 2299-8169, Fax : (02) 2299-8169
* 한양대학교 기계공학부

은 보와 구의 강성 계수, h 는 보의 높이, A 는 단면 면적, ν, ν_s 은 보와 구의 Poisson ratio, I 는 보의 관성 모멘트, r_p, r_s 는 보와 구의 반지름(보는 무한대의 곡률을 가지는 평판으로 가정), m 은 구의 질량, 그리고 D 는 굽힘 강성 계수 이다. 여기서 하첨자 s는 구를 나타낸다 그리고 D 는 굽힘 강성 계수 이다.

여기서 μ_1, μ_2, μ_3 는 변형 변수 u_1, u_2, u_3 를 위한 일반 좌표의 수이다.

평판의 운동방정식은 참고문헌 [9]에서 유도한 것과 같이 Von Karman strain 으로부터 얻어진 총 변형 에너지와 Kane's method 를 사용하고 이에 충격으로 인한 충격력를 사용하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$F_j^* + F_j^U + F_j^I = 0 \quad \left(i = 1,2,\cdots,\mu_1+\mu_2+\mu_3\right) \tag{1}$$

여기서 F_j^* 는 일반관성력이고, F_j^U 는 평판의 탄성에너지로부터 유도된 일반작용력, 그리고 F_j^I 충격으로 인한 일반 작용력이다. 평판에 작용하는 충격력은 접촉력 F_C 와 dirac delta function $\delta\left(x - R_x\right)\delta\left(y - R_y\right)$ 의 곱으로 나타낼 수 있다. 따라서, 충격력에 의한 일반작용력은 식(3)와 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
&F_i^I = 0 \qquad \left(i = 1,2,\cdots,\mu_1\right)\\
&F_{i+\mu_1}^I = 0 \qquad \left(i = 1,2,\cdots,\mu_2\right)\\
&F_{i+\mu_1+\mu_3}^I \\
&= \int_0^a\int_0^b \left(\frac{\partial \hat{v}^P}{\partial \dot{q}_{ki}}\right)\cdot\left(-F_C\delta\left(x-R_x\right)\delta\left(y-R_y\right)\right)\hat{a}_3 dydx\\
&= -F_C\phi_{3i}\left(R_x\right)\phi_{3i}\left(R_y\right) \qquad \left(i = 1,2,\cdots,\mu_3\right)
\end{aligned} \tag{2}$$

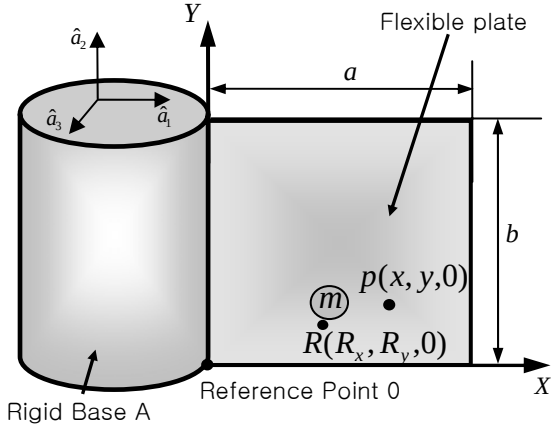

Fig. 1 Configuration of a cantilever plates

선형 면내 변형율을 얻기 위해서 다음 두 개의 면내 운동 방정식을 풀어야 한다.

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\mu_1}\left[\begin{array}{l}\left(\int_0^a\int_0^b \rho\phi_{1i}\phi_{1j}dydx\right)\ddot{q}_{1j}\\ +\left(\int_0^a\int_0^b\left(\gamma\phi_{1i,x}\phi_{1j,x}+Gh\phi_{1i,y}\phi_{1j,y}\right)dydx\right)q_{1j}\end{array}\right]\\
&+\sum_{j=1}^{\mu_2}\left[\left(\int_0^a\int_0^b\left(\gamma\nu\phi_{1i,x}\phi_{2j,y}+Gh\phi_{1i,y}\phi_{2j,x}\right)dydx\right)q_{2j}\right]\\
&\qquad = -\dot{v}_1\left(\int_0^a\int_0^b \rho\phi_{1i}dydx\right)
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\mu_2}\left[\begin{array}{l}\left(\int_0^a\int_0^b \rho\phi_{2i}\phi_{2j}dydx\right)\ddot{q}_{2j}\\ +\left(\int_0^a\int_0^b\left(\gamma\phi_{2i,y}\phi_{2j,y}+Gh\phi_{2i,x}\phi_{2j,x}\right)dydx\right)q_{2j}\end{array}\right]\\
&+\sum_{j=1}^{\mu_1}\left[\left(\int_0^a\int_0^b\left(\gamma\nu\phi_{2i,x}\phi_{1j,y}+Gh\phi_{2i,y}\phi_{1j,x}\right)dydx\right)q_{1j}\right]\\
&\qquad = -\dot{v}_2\left(\int_0^a\int_0^b \rho\phi_{2i}dydx\right)
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\gamma \equiv Eh/(1-\nu^2)$$

여기서 두 미분 방정식의 특해를 진동 방정식을 얻는데 이용한다. 아래 첨자의 표시 중 콤마 뒤에 나타나는 것은 이들에 대한 편미분으로 예를 들어 $\phi_{i,xx}$는 $\phi_{i,}$ 를 x로 두 번 편미분한 것을 두 미분 방정식의 일반해를 이용하여 참고문헌[9]에 정의된 대로 면내 선형 변형율을 구하고 이를 굽힘방향 운동 방정식을 얻는데 이용한다

식(3),(4)로부터 구한 선형 변형율 들을 굽힘 변형 에너지 식에 대입하여 굽힘방향 운동 방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\mu_3}\left[\begin{array}{l}\left(\int_0^a\int_0^b \rho_p\phi_{3i}\phi_{3j}dydx\right)\ddot{q}_{3j}\\ +\left(\int_0^a\int_0^b D\left(\phi_{3i,xx}\phi_{3j,xx}+\phi_{3i,yy}\phi_{3j,yy}+\nu\phi_{3i,xx}\phi_{3j,yy}\right.\right.\\ \left.\left.+\nu\phi_{3i,yy}\phi_{3j,xx}+2\left(1-\nu\right)\phi_{3i,xy}\phi_{3j,xy}\right)dydx\right)q_{3j}\end{array}\right]\\
&+\sum_{j=1}^{\mu_3}\left[\left(\int_0^a\int_0^b\gamma\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx}\left(\phi_{3i,x}\phi_{3j,x}+\nu\phi_{3i,y}\phi_{3j,y}\right)\\ +\varepsilon_{yy}\left(\phi_{3i,y}\phi_{3j,y}+\nu\phi_{3i,x}\phi_{3j,x}\right)\end{pmatrix}dydx\right)q_{3j}\right]\\
&+\sum_{j=1}^{\mu_3}\left[\left(\int_0^a\int_0^b Gh\varepsilon_{xy}\left(\phi_{3i,y}\phi_{3j,x}+\phi_{3i,x}\phi_{3j,y}\right)dydx\right)q_{3j}\right]\\
&= -a_z\left(\int_0^a\int_0^b \rho\phi_{3i}dydx\right) \qquad \left(i = 1,2,\cdots\cdots,\mu_3\right)
\end{aligned} \tag{5}$$

$$D = Eh^3/12\left(1-\nu^2\right)$$

2.2 접촉력 F_C 유도

Hertz 접촉이론으로부터 평판과 구의 자유 충돌 시의 접촉력 F_C 을 구하면, 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$F_C = \alpha\delta^{\frac{3}{2}} \tag{6}$$

여기서 δ 는 충돌하는 물체간 상대 변위를 나타내며 k_i 와 α 는 다음과 같다.

$$k_p = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \qquad k_s = \frac{1-\nu_s^2}{\pi E_s}$$

$$\alpha = \frac{4}{3\pi(k_p+k_s)}\sqrt{\frac{r_p r_s}{r_p+r_s}}$$
$$= \frac{4}{3\pi(k_p+k_s)}\sqrt{r_p} \quad (\because r_p = \infty)$$

굽힘 방향으로만 충돌이 일어나므로 굽힘 방향 운동 방정식만 고려하고 충돌 발생 시간 t_I 이후부터 충돌 종료 시까지 발생하는 접촉력 F_C 는 충돌 시간 동안 시간에 따라 변하게 되므로 준정적 과정으로 가정하여 매 해석 단계마다 개선된 접촉력 F_C 를 적용하여 운동방정식을 풀게 된다.

접촉력을 구하기 위해서는 충돌 물체간 상대변위 δ 를 구해야 하므로 우선 이 변위로부터 나타나는 상대 속도를 Hertz 접촉이론을 이용하고 보의 굽힘 변형을 고려하여 다음과 같이 구한다. 또한 여기서는 $e=1$ 인 완전 탄성충돌만을 가정하여 충돌에 의한 에너지 손실은 없다.

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \sqrt{\dot{\delta}_0^2 - \frac{4}{5}\beta\delta^{\frac{5}{2}}} + \dot{u}_3 \qquad (\text{압축}) \\ \dot{\delta} &= -\sqrt{\frac{4}{5}\beta\left(\delta_{\max}^{\frac{5}{2}} - \delta^{\frac{5}{2}}\right)} + \dot{u}_3 \quad (\text{인장}) \end{aligned} \tag{7}$$

여기서 $\dot{\delta}_0$ 은 충돌 직전 두 물체간 상대속도이며 $\delta_{\max}$ 는 $\dot{\delta}=0$ 일 때(상대 속도의 방향이 바뀌순간)의 충돌 물체간 상대 변위를 나타낸다. 그리고 β 는 다음과 같다.

$$\beta = \frac{\rho L + m}{\rho L m}\alpha$$

충돌 과정은 접촉이 시작하면서 두 물체가 눌리는 압축 과정이 진행되다가 최대 상대 변위에 도달 후 두 물체가 떨어지는 인장 과정이 진행된다. 따라서 식(7)에서 충돌 물체간 상대 속도는 압축과 인장 두 단계로 구분하여 해석을 수행하며 압축과 인장 단계의 판별을 위해 다음 판별식을 이용한다.

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \sqrt{\dot{\delta}_0^2 - \frac{4}{5}\beta\delta^{\frac{5}{2}}} + \dot{u}_3 > 0 \quad \text{압축} \\ \dot{\delta} &= \sqrt{\dot{\delta}_0^2 - \frac{4}{5}\beta\delta^{\frac{5}{2}}} + \dot{u}_3 \le 0 \quad \text{인장} \end{aligned} \tag{8}$$

또한 식(11)에서 각 단계의 첫 번째 항은 두 물체간 자유 충돌 경우의 물체간 상대속도를 나타내며 거기에 보의 굽힘 변형을 고려하기 위해 보의 굽힘 변형 속도인 두 번째 항을 추가하여 수정된 상대속도를 사용한다.

Fig.2 는 매 해석 단계마다 접촉력을 개선하는 과정을 보여준다. 여기서 t_{step} 는 각 단계의 해석 시간 크기이다. 이러한 과정을 거쳐 구한 접촉력을 식(9)의 보의 굽힘방향 운동방정식에 대입하여 풀어 충돌시간과 충돌시간 동안의 접촉력의 변화, 충돌효과를 고려한 보의 움직임을 나타낼 수 있다.

3. 수치 해석 결과

3.1 보의 근사화함수

이 장에는 앞서 유도된 진동방정식을 사용하여 수치해석을 수행하였다. 사용된 평판의 모드 함수들은 가로와 세로방향의 보 함수들을 곱하여 구하는데 가로방향은 외팔 보의 모드함수를 세로방향은 병진 및 회전에 의한 강체운동 함수 2 개와 양단 자유 보의 모드함수를 각각 사용한다. (참고문헌 [15] 참조) 사용된 보의 근사화 함수들은 충돌 시 나타나는 고차모드를 표현하기 위해 강체운동이 없는 외팔보의 굽힘진동 특성함수 를 식(9)과 같이 수정하여 사용하였다. 각 항의 계수 A,B,C,D 는 외팔 보 경계조건으로부터 도출하였다.

$$\begin{aligned} \phi(x) = A\sin\lambda_i\frac{x}{L} + B\cos\lambda_i\frac{x}{L} \\ + Ce^{\lambda_i(x/L-1)} + De^{-\lambda_i(x/L+1)} \end{aligned} \tag{9}$$

기존의 보 함수는 hyperbolic 함수가 포함되어 함수의 개수가 증가하면 hyperbolic 함수의 값이 증가하여 적분 시 수렴되지 않는 문제점이 있었으

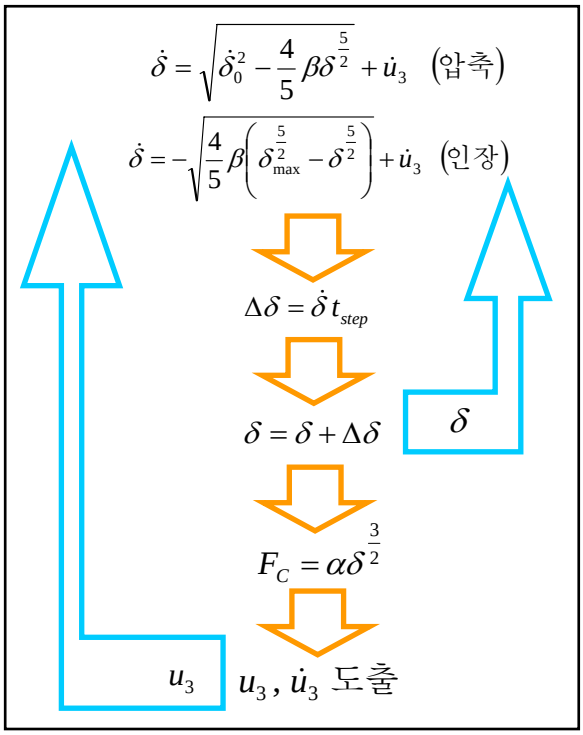

Fig. 2 Contact force analysis process

나 여기서는 hyperbolic 함수 대신 exponential 함수를 사용하여 이런 문제를 해결하였다. 해석에 사용한 모드함수의 개수는 100 개로 충돌로 인해 나타나는 고차모드를 표현하기에 충분한 개수로 선정하였다.

Table 1 은 해석에 사용된 보와 구의 제원을 나타내고 있다.

3.2 충돌 위치에 따른 충돌 시간과 접촉력

Fig. 3 은 평판의 충돌 위치에 대한 충돌 시간과 접촉력의 변화를 나타내고 있다. 충돌이 발생하면서 두 물체간 접촉은 압축이 일어나는 단계에서 접촉력은 증가하여 최대점에 도달한 후 접촉 현상은 인장 단계로 넘어가 접촉력은 감소하면서 두 물체가 완전히 분리되면 0 이 된다. 그리고 보의 굽힘 변형으로 인해 압축과 인장 단계에서의 접촉력의 충돌 시간에 따른 변화 경향과 각 단계의 작용 시간에 차이를 발생시킨다. 일반적으로 충돌은

Table 1 Properties of the beam and sphere

$a=b\,[m]$	$\nu = \nu_s$	$E = E_s\,[N/m^2]$
5.0	0.3	7×10^{10}
$h\,[m]$	$r_s\,[m]$	$\rho\,[kg/m]$
0.05	0.01	1.2

매우 짧은 시간 동안 발생하므로 충돌에 의한 보의 굽힘 변형은 두 물체간 접촉 상대 변위를 줄이는 쪽으로 영향을 미친다. 그러한 영향으로 인해 Fig. 3 에서 보여지는 바와 같이 압축 단계에서의 접촉력의 상승율에 비해 인장 단계에서는 급격히 접촉력이 감소하게 된다.

Fig. 3 에서 고정점으로부터의 거리 a로 표현되는 충돌 위치가 고정점 근처로 갈수록 회전에 의한 충격량의 크기가 작아져 접촉력의 크기는 감소하는 경향을 나타낸다. 그러나 충격 위치의 영향으로 인해 고정점 근처에서는 굽힘 변형량이 감소해서 충돌 시간은 증가하게 되며 또한 충격량이 감소함에도 접촉력이 오히려 증가하는 지점이 존재함을 확인할 수 있다. 이는 회전체에서의 충격은 충격량과 굽힘 변형의 상호작용에 의해 접촉력이 최대인 지점이 결정된다는 것을 알 수 있으며 여기서는 보의 끝단보다 약간 고정단 방향으로 치우친 $a=4m$ 지점에서 최대 접촉력이 발생한다. 그리고 Fig. 3 에서 그래프의 면적은 충돌 시 발생하는 충격량을 나타내며 접촉력의 최대값을 경계로 압축 단계와 인장 단계의 면적비가 충돌 전후의 충격량의 비 즉, 반발계수를 의미한다. 본 논문에서는 완전 탄성 충돌을 가정하여 재료적 특성에 의한 반발계수를 $e=1$ 로 정의하였으나 굽힘 변형을 고려했을 때 충돌에 의한 변형에 의해 손실되는 충격량의 비율 e_b 는 사용한 예제의 경우 0.3~0.6 정도의 값을 가지며 충돌 위치에 따라 각각 다른 값을 가진다. 식(14)에서는 충돌 위치에 따른 반발계수의 값을 나타내고 있다.

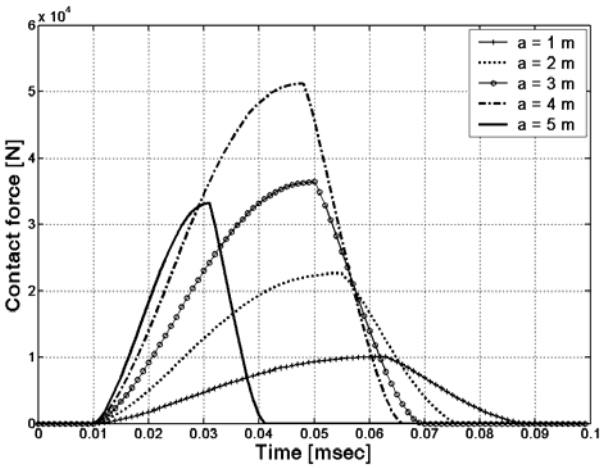

Fig. 3 Variation of contact force in contact point versus time with impact and different impact position ($e=1, t_I = 0.01ms, \dot{v}_1 = 5m/s,\ m = 0.1kg$)

$$
\begin{aligned}
a = 5 \ &\Rightarrow e_b = 0.4665 \\
a = 4 \ &\Rightarrow e_b = 0.3852 \\
a = 3 \ &\Rightarrow e_b = 0.5724 \\
a = 2 \ &\Rightarrow e_b = 0.5765 \\
a = 1 \ &\Rightarrow e_b = 0.5798
\end{aligned}
\tag{14}
$$

충돌 위치에 따른 굽힘 변형에 의한 반발계수 값은 접촉력이 최대가 되는 $a = 4m$ 지점을 제외하고는 고정점 근처로 갈수록 굽힘 변형이 감소하므로 굽힘 변형에 의한 손실이 감소하여 증가하게 된다.

3.3 충돌구의 질량에 따른 충돌 시간과 접촉력

Fig. 4 는 구의 질량 변화에 대한 충돌 시간과 접촉력의 변화를 나타내고 있다. 여기서 구의 질량이 증가할수록 충돌에 의해 발생하는 충격량이 증가하여 접촉력의 크기는 증가한다. 또한, 여기서 충격량 증가로 보의 굽힘 변형량은 증가하여 충돌 시간은 감소하여야 하나 충격량의 증가량이 매우 작아서 이보다는 충격량 증가에 의한 두 물체간 접촉 상대 변위가 증가하는 효과가 더 크게 작용하므로 충돌 시간은 구의 질량이 증가할수록 증가하게 된다. 접촉력과 충돌 시간은 구의 질량이 증가함에 따라 그 변화량이 감소하여 일정한 값으로 수렴되어가는 것을 확인할 수 있다. 이는 참고문헌[14]에서 충돌 물체의 질량이 증가함에 따라 충격량은 일정한 값으로 수렴되어 감을 확인할 수 있고 따라서 이 경우도 역시 위와 동일한 원인에 의해 질량 증가에 따른 변화량이 점차로 감소하여 접촉력과 충돌 시간이 일정한 값으로 수렴되어 간다고 볼 수 있다.

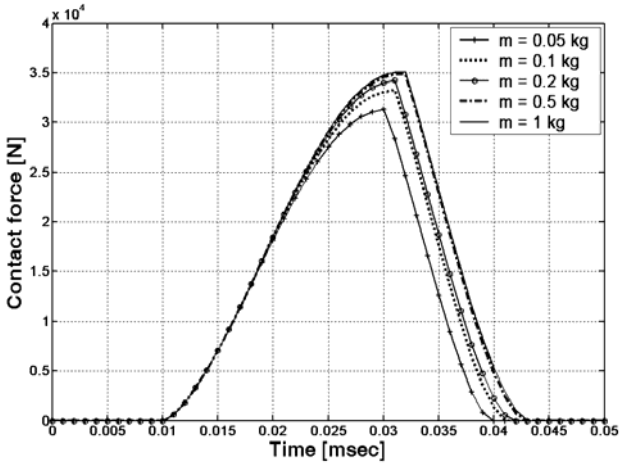

Fig. 4 Variation of contact force in contact point versus time with impact and different impact sphere mass
($e = 1, t_I = 0.01ms,\ \dot{v}_1 = 5m/s,\ a = 5m$)

4. 결 론

본 논문에서는 충돌이 일어나는 병진 가속을 받는 평판의 운동 방정식과 충돌 시 발생하는 접촉력을 구조물의 국부 변형을 고려한 수정된 Hertz 접촉 이론을 이용하여 유도하고 이에 근거한 해석 결과를 제시하여 충격위치와 충돌 구의 질량이 충돌 시 접촉력의 크기와 충돌 접촉 시간에 미치는 영향을 분석하였다. 충돌은 충돌 직전의 속도, 충돌 구의 질량에 영향을 받아 충격량을 발생시키므로 병진 가속을 받는 평판의 충돌 위치가 고정단 근처로 갈수록 접촉력의 크기가 증가하며 충격량이 증가하여 평판의 굽힘 변형이 커지면 접촉력과 충돌 시간은 감소하는 것을 확인할 수 있었다. 그러나 충돌 구의 질량은 증가할수록 접촉력은 증가하나 그 차이가 매우 작아 굽힘 변형에 의한 충돌 시간 감소 효과를 나타내지 못하였다. 그러나 이러한 접촉력과 충돌 시간의 상반된 영향으로 인하여 충돌 위치 변화 시 최대 접촉력을 발생시키는 특정값이 존재함을 알 수 있었으며 충돌 시 발생하는 평판의 굽힘 변형을 고려한 충돌 해석으로 변형에 의한 에너지 손실을 고려한 반발 계수를 얻을 수 있었다.

참 고 문 헌

(1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, “The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades”, British A.R.C. Reports and Memoranda, No. 766

(2) Theodorsen, T., 1935, “Propeller Vibrations and the Effect of Centrifugal Force”, NASA TN, No.516.

(3) Schilhansl, M., 1958, “Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam”, Transaction of ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 25, pp. 28-30.

(4) Putter, S. and Manor, H., 1978, “Natural Frequencies of Radial Rotating Beams”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 56. pp. 175-185.

(5) Bhat, R., 1986, “Transverse Vibration of a Rotating Uniform Cantilever Beam with Tip Mass as Predicted by Using Beam Characteristic Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 105, No. 2, pp. 199-210.

(6) Liew, K.M. and Lim, M.K., 1993, “Transverse Vibration of Trapezoidal Plates of Variable Thickness: Symmetric Trapezoidals”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 165, No. 1, pp. 45-67.

(7) Dokainish, M. and Rawtani, S., 1971, “Vibration Analysis of Rotating Cantilever Plates”, International

Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 3, pp. 233-248.
(8) Ramamurti, V. and Kielb, R., 1984, “Natural Frequencies of Twisted Rotating Plates”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 97, No. 3, pp. 429-449.
(9) Lim, H.S. and Yoo, .H.H., 2006, “modal analysis of cantilever plates undergoing accelerated in-plane motion” Journal of Sound and Vibration, Vol. 297, pp. 880-894.
(10) Lankarani, H. M. and Nikravesh, P. E., 1990, “A Contact Force Model With Hysteres is Damping for Impact Analys is of Multibody Systems,” ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 112, pp. 369- 376.
(11) Hwang K. H. and Shabana A. A., 1995, “Effect of Mass Caprure on the Propagation of Transverse Waves in Rotating Beams”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 186, pp. 495-525.
(12) Marghitu D.B. and Hurmuzlu Y., 1996, “Nonlinear dynamics of an elastic rod with frictional impact”, International Journal of Nonlinear Dynamics, Vol. 10, pp. 187–201..
(13) Rajeev Jain,, K. Ramachandra, K.R.Y. Simha, 2004, “Impact on spinning discs”, International Journal of Impact Engineering, Vol. 30, pp. 1111–1129.
(14) Lim, H.S., kwon, S.H. and Yoo, .H.H., 2007, “Impact analysis of a rotating beam due to particle mass collision”Journal of Sound and Vibration, Vol. 308, pp. 794-804
(15) Leissa, A.W., 1969, Vibration of Plates, NASA SP-160.