

# 탄소나노튜브의 유체유발 진동

## Flow-induced Vibration of Carbon Nanotubes Conveying Fluid

송오섭† · 최중운\* · 길보람\*\*

Ohseop Song, Jongwoon Choi and Boramm Gil

**Key Words** : Carbon Nanotube(탄소나노튜브), Flutter(플러터), Critical Flow Velocity(임계유속)

### ABSTRACT

In this paper, flow-induced flutter instability of cantilever carbon nanotubes conveying fluid and modelled as a thin-walled beam is investigated. Non-classical effects of transverse shear and rotary inertia are incorporated in this study. The governing equations and the associated boundary conditions are derived through Hamilton's principle. Numerical analysis is performed by using extend Galerkin method which enables us to obtain more exact solutions compared with conventional Galerkin method. Cantilevered carbon nanotubes are damped with decaying amplitude for flow velocity below a certain critical value, however, beyond this critical flow velocity, flutter instability may occur. Variations of critical flow velocity with both radius ratio and length of carbon nanotubes are investigated and pertinent conclusion is outlined.

### 1. 서론

탄소나노튜브(Carbon Nano Tubes ; 이하 CNT)는 그 우수한 전기적, 기계적, 물리적, 화학적 특성 때문에 나노전기 기계, 나노파이프, 나노센서, 나노작동기, 나노복합재료 등을 위한 구조요소로서 크게 각광받고 있으며 따라서 CNT의 기계적 거동에 대한 해석은 최근 많은 연구들의 주제가 되어왔다. CNT는 완벽한 중공 실린더 구조와 우수한 기계적 특성으로 인하여 가스를 저장하기 위한 나노 컨테이너와 유체를 수송하는 나노파이프로써 사용될 수 있는 가능성을 지니고 있다. 특히, 나노파이프는 내부를 흐르는 유동 유체의 속도에 따라 그 거동 특성이 크게 달라지므로 이에 대한 연구가 필수적이다. 그러나 CNT의 기계적 거동에 관한 연구는 아직 활발하지 않으며, 특히 그 진동 특성들에 관한 연구는 초기 단계에 있다 할 수 있다.

CNT의 거동 특성을 규명하기 위한 실험을 수행하는 데 수반되는 어려움으로 인하여, 컴퓨터 시뮬레이션은 나노 튜브의 특성을 모델링하기 위한 강력한 도구로 여겨진다. 유용

모델링 기술 중, 분자 동력학 시뮬레이션이 가장 광범위하게 사용되어 왔다. 분자동력학 시뮬레이션은 원자의 열진동을 고려하기 위해 필요하였으나, 시간 단위가 항상 femto( $10^{-15}$ ) 초이다. 그것은 강성과 강도 특성을 시뮬레이션과 같은 장시간 또는 정적 문제의 경우에는 효과적이지 않다. 또한, 시간 소비 때문에, 다중벽 탄소나노튜브(Multi Walled Carbon Nanotubes ; 이하 MWCNT)에 분자 동력학 시뮬레이션을 응용하는 것은 매우 제한적일 수밖에 없다.

나노스케일 구조에 대한 실험은 그 제어가 어려우며, 분자 동력학 시뮬레이션은 큰 스케일의 시스템에 비해 많은 비용이 들고 특히 접근이 쉽지 않기 때문에, 분자구조역학법 또는 연속체 탄성모델이 정적 처짐, 좌굴, 열진동, 공진주파수와 모드 등과 같은 CNT의 기계적 거동 연구에 광범위하고 성공적으로 사용되어왔다.

Chunyu Li와 Tsu-Wei Chou<sup>(5)</sup>는 MWCNT의 영의 계수와 전단계수를 예견하고, 튜브 층수, 튜브 직경, 튜브 나선성(chirality)과 같은 나노튜브 구조의 탄성 거동을 시뮬레이션하기 위하여, 단일벽 탄소나노튜브(SWCNT; Single-Walled Carbon Nanotubes)를 위해 개발된 분자구조역학법을 인장력과 비틀림 상태에서의 MWCNT에 적용하였다.

Karl Sohlberg와 그의 공동 연구자들<sup>(7)</sup>은 연속체 모델링을 CNT의 진동에 적용하여 CNT 진동 분석에 관한 방법으로서 다양하고 효과적인 대안을 제시하였으며, 분자 진동학 연구의 실효성을 위하여 연속체 방법의 필요성을 주장하였다.

J. Yoon과 그의 공동 연구자들<sup>(3)</sup>은 다중 탄성모 모델에 기초

† 교신저자 : 정회원, 충남대학교 기계공학과  
E-mail : songos@cnu.ac.kr  
Tel : (042) 821-5650. Fax : (042)822-5642

\* 한국델파이

\*\* 충남대학교 대학원 기계공학과

로 하며, 탄성체 안에 놓여진 MWCNT의 공진 주파수와 그에 연관된 진동 모드에 관한 연구를 수행하였다. 또한, C. Y. Wang과 그의 공동 연구자들<sup>(6)</sup>은 다중 셸 모델을 사용하여 CNT의 진동 거동을 연구하기 위한 효과적이고 상대적으로 간단한 방법을 제공하였으며, MWCNT의 자유진동에서 층간 반데르발스 힘은 큰 반지름 MWCNT의 반지름 방향 진동에 가장 주요한 영향을 주지만, 비틀림과 길이 방향 모드에는 영향을 거의 주지 않는다는 것을 밝혀냈다.

J. Yoon과 그의 공동 연구자들은 양단 단순지지, 양단 고정 각각의 경우, 오일러 보(이하 EB) 이론을 적용하여 CNT 내부를 흐르는 유체가 자유진동에 미치는 영향, CNT의 유체 유동에 의한 구조적 불안정성<sup>(2)</sup>과 외팔보 CNT의 유체 유동에 의한 플러터 불안정<sup>(1)</sup>에 관하여 연구하였다.

또한, C. M. Wang과 그의 공동 연구자들<sup>(4)</sup>은 작은 중횡비를 가진 CNT의 해석을 위해, 티모센코 보(이하 TB) 모델을 사용하여 MWCNT의 자유 진동 해석을 하였으며 DQ 방법(Differential quadrature method)을 사용하여 중횡비와 경계 조건을 달리하며 운동 방정식을 풀어 오일러 보의 결과와 비교 하였다.

CNT의 유체 유발 진동에 관한 연구는 상기 연구들에서 볼 수 있듯이, EB 이론에 기초<sup>(1,2,3,8,9,11)</sup>하여 수행 되었으며, 전단 변형과 회전 관성의 영향이 무시되어 작은 중횡비의 CNT의 경우, 그 결과의 신뢰도가 의심 된다.

따라서, 본 연구에서는 전단 변형과 회전 관성의 영향을 고려한 박판 보 모델(thin-walled beam model)<sup>(8,10,12)</sup>에 기초하여 CNT 파이프의 의 유체 유발 진동에 관한 연구를 수행하여, CNT의 외경 대 내경 비, 길이의 변화에 따른 CNT 파이프의 플러터 불안정성 경향을 도출하고 이를 EB 이론에 기초한 결과와 비교, 고찰한다.

## 2. 구조 모델링

### 2.1 박판 보 모델의 변위장

CNT 파이프 내의 한 점 A의 변위 벡터를 6개의 변위변수(kinematic variables)로 표시하면 다음과 같다.(Fig.1a)

$$\begin{aligned} u(s, z, t) &= u_o(z, t) - Y(s) \phi(z, t) \\ v(s, z, t) &= v_o(z, t) + X(s) \phi(z, t) \\ w(s, z, n, t) &= w_o(z, t) + \theta_Y(z, t) [X(s) + n \frac{dY}{ds}] \\ &\quad + \theta_X(z, t) [Y(s) - n \frac{dX}{ds}] \\ &\quad - \phi'(z, t) [F_w(s) + n a(s)] \end{aligned} \quad (1)$$

여기에서,  $u_o, v_o, w_o$ 는 각각 X, Y, Z 축 방향의 병진 변위 변수이며,  $\theta_X, \theta_Y, \phi$ 는 X, Y, Z 축에 관한 회전 변위변수를 나타낸다. 또한  $F_w(s)$ 와  $na(s)$ 는 각각 1차 외평함수와 2차 외평함수를 나타낸다<sup>(12)</sup>.

$$\begin{aligned} F_w(s) &= \int_0^s [r_n(s) - 2 \frac{A_c}{\beta}] ds \\ a(s) &= -Y \frac{dY}{ds} - X \frac{dX}{ds} \end{aligned} \quad (2)$$

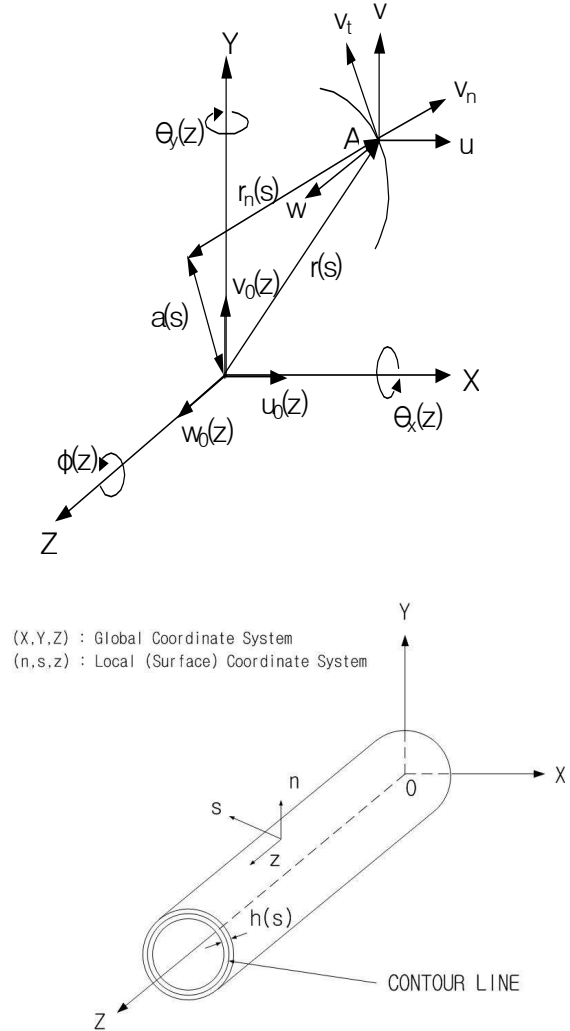


Fig. 1 Kinematic variables, coordinate system and configuration of thin-walled beam.

### 2.2 구성 방정식

CNT의 (n,s,z) 좌표에 관한 응력-변형률 관계는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{ss} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{nn} \\ \sigma_{nz} \\ \sigma_{sn} \\ \sigma_{sz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{13}} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{23}} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{Q_{13}} & \overline{Q_{23}} & \overline{Q_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q_{44}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{Q_{55}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{ss} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{nn} \\ \gamma_{zn} \\ \gamma_{sn} \\ \gamma_{sz} \end{bmatrix} \quad (3)$$

식(3)의 3D 응력-변형률 관계로부터 2D 응력-변형률 관계

식을 유도하기 위하여 다음 식(4)와 같이 3D 응력을 두께 방향( $n$ )에 대하여 적분하여  $s$ 와  $z$ 만의 함수인 합응력과 합모멘트를 구한다.

합응력(stress resultants):

$$\begin{bmatrix} N_{ss} \\ N_{zz} \\ N_{sz} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{h(k)} \begin{bmatrix} \sigma_{ss} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{sz} \end{bmatrix} dn$$

전단합응력(shear stress resultants):

$$\begin{bmatrix} N_{nz} \\ N_{sn} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{h(k)} \begin{bmatrix} \sigma_{nz} \\ \sigma_{sn} \end{bmatrix} dn \quad (4)$$

합모멘트(stress couples):

$$\begin{bmatrix} L_{zz} \\ L_{sz} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{h(k)} \begin{bmatrix} \sigma_{zz} \\ \sigma_{sz} \end{bmatrix} n dn$$

식 (3)을 식 (4)에 대입하여 적분하면 다음과 같은 합응력과 합모멘트에 관한 식을 얻을 수 있다<sup>(12)</sup>.

$$\begin{bmatrix} N_{zz} \\ N_{sz} \\ L_{zz} \\ N_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{zz}^o \\ \gamma_{sz}^o \\ W_M \\ \epsilon_{zz}^n \\ \gamma_{nz} \end{bmatrix} \quad (5)$$

### 2.3 운동방정식과 경계조건

해밀턴의 변분원리를 이용하여 유체유동에 의한 CNT의 운동방정식과 그에 관련된 경계조건을 유도하면 다음과 같다.

해밀턴의 변분원리 ;

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} (-\delta V + \delta K + \delta W_f) dt = 0 \quad (6)$$

$t = t_0, t = t_1$ 에서

$$\delta u_o = \delta v_o = \delta w_o = \delta \theta_Y = \delta \theta_X = \delta \phi = 0$$

식(6)에서 CNT의 변형 에너지  $V$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_{\tau} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\tau \quad (7) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_C [N_{zz} \epsilon_{zz}^o + L_{zz} \epsilon_{zz}^n + N_{sz} \gamma_{sz}^o \\ &\quad + N_{sz} 2 \frac{A_C}{\beta} \phi' + N_{nz} \gamma_{nz}] ds dz \end{aligned}$$

식(7)에 변분을 취하고, 식(1)의 변위 요소를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\delta V = [T_A' \delta w_o + M_Y \delta \theta_Y + M_X \delta \theta_X - B_\omega \delta \phi' + (B_\omega' + M_p) \delta \phi + Q_X \delta u_o + Q_Y \delta v_o]_0^L \quad (8)$$

$$- \int_0^L [T_A' \delta w_o + (M_Y' - Q_X) \delta \theta_Y + (M_X' - Q_Y) \delta \theta_X + (B_\omega'' + M_p') \delta \phi + Q_X' \delta u_o + Q_Y' \delta v_o] dz$$

여기에서,  $T_A(z)$ ,  $M_Y(z)$ ,  $M_X(z)$ ,  $Q_X(z)$ ,  $Q_Y(z)$ ,  $B_\omega(z)$ ,  $M_p(z)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T_A(z) &= a_{11} w_o' + a_{12} \theta_Y' + a_{13} \theta_X' + a_{16} \phi'' \\ M_Y(z) &= a_{21} w_o' + a_{22} \theta_Y' + a_{23} \theta_X' + a_{26} \phi'' \\ M_X(z) &= a_{31} w_o' + a_{32} \theta_Y' + a_{33} \theta_X' + a_{36} \phi'' \quad (9) \\ Q_X(z) &= a_{44} (\theta_Y + u_o') + a_{45} (\theta_X + v_o') + a_{47} \phi' \\ Q_Y(z) &= a_{54} (\theta_Y + u_o') + a_{55} (\theta_X + v_o') + a_{57} \phi' \\ B_\omega(z) &= a_{61} w_o' + a_{62} \theta_Y' + a_{63} \theta_X' + a_{66} \phi'' \\ M_p(z) &= a_{74} (\theta_Y + u_o') + a_{75} (\theta_X + v_o') + a_{77} \phi' \end{aligned}$$

여기에서,  $a_{ij}$ 는 CNT의 전단 및 굽힘 강성계수이다.

식(6)에서 운동에너지  $K$ 는 CNT의 운동에너지  $K_p$ 와 유체 유동의 운동에너지  $K_f$ 의 합으로 표현된다.

CNT의 운동 에너지는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho [(\frac{\partial u}{\partial t})^2 + (\frac{\partial v}{\partial t})^2 + (\frac{\partial w}{\partial t})^2] d\tau \quad (10) \end{aligned}$$

유체의 운동 에너지는 다음과 같이 구할 수 있다. 파이프의 변형에 의한 2차 유동이 없다고 가정할 때, 유체의 운동은 파이프의 중심선을 따라 움직인다. 따라서 변형 후 파이프 중심선의 임의의 점에 대한 위치벡터를  $\vec{R}_{pc}$ , 같은 점에서 유체의 위치벡터를  $\vec{R}_{f/pc}$ 라 할 때 그 관계식은 다음과 같다.(Fig. 2)

$$\vec{R}_f = \vec{R}_{pc} + \vec{R}_{f/pc} \quad (11)$$

여기에서,  $\vec{R}_{pc}$ 와  $\vec{R}_{f/pc}$ 는 다음과 같다.

$$\vec{R}_{pc} = u\vec{I} + v\vec{J} + (z+w)\vec{K} \quad (12)$$

$$\vec{R}_{f/pc} = x_b\vec{i}_b + y_b\vec{j}_b \quad (13)$$

$\theta_Y, \theta_X, \phi \ll 1$ 일 때, 식(12),(13)의  $(\vec{i}_b, \vec{j}_b, \vec{k}_b)$ 와  $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$

사이의 좌표변환식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \vec{i}_b \\ \vec{j}_b \\ \vec{k}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \phi & \theta_Y \\ -\phi & 1 & \theta_X \\ -\theta_Y - \theta_X & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{bmatrix} \quad (14)$$

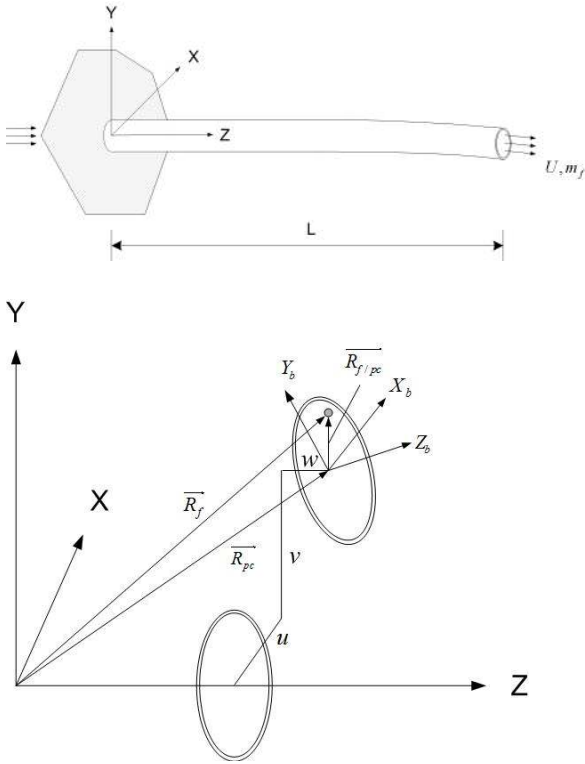


Fig. 2 Displacement of CNT conveying fluid

그러므로, 유체의 운동에너지는 다음과 같으며

$$K_f = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho_f \vec{R}_f \cdot \vec{R}_f d\tau \quad (15)$$

식(15)의 변분을 시간에 대하여 적분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta K_f dt = & \\ - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \rho_f [ & [\ddot{u}_0 + 2U\dot{u}_0' + U^2 u_0''] \delta u_0 \\ + [ & \ddot{v}_0 + 2U\dot{v}_0' + U^2 v_0''] \delta v_0 + \ddot{w}_0 \delta w_0 ] \pi (R - \frac{h}{2})^2 dz dt \\ + \int_{t_0}^{t_1} \rho_f \{ & [(\dot{u}_0 + Uu_0') U \delta u_0]_0^L + [(\dot{v}_0 + Uv_0') U \delta v_0]_0^L \} \\ \pi (R - & \frac{h}{2})^2 dt \end{aligned} \quad (16)$$

끝단(z=L)에서 유속U에 의한 가상일( $\delta W_f$ )은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta W_f = - \int_0^{2\pi} \int_0^{(R-\frac{h}{2})} & \rho_f U [(\dot{u}_0 + Uu_0') \delta u_0 \\ + (\dot{v}_0 + Uv_0') \delta v_0 + & \dot{w}_0 \delta w_0]_{z=L} r dr d\theta \end{aligned} \quad (17)$$

CNT의 변형에너지식(8), CNT의 운동에너지식(10), 유체의 운동에너지식(16), 외력에 의한 가상일식(17)을 해밀턴의 변분 원리식(6)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 굽힘운동에 관한 운동방정식과 경계조건을 유도할 수 있다.

운동방정식

$$\begin{aligned} \delta u_o : a_{44}(u_o'' + \theta_Y') & \\ = b_1 \ddot{u}_o + m_f \ddot{u}_o + 2m_f U \dot{u}_o' + m_f U^2 u_o'' & \end{aligned} \quad (18)$$

$$\delta \theta_Y : a_{22} \theta_Y'' - a_{44}(u_o' + \theta_Y) = (b_5 + b_{15}) \ddot{\theta}_Y$$

경계조건

$$\text{at } z=0 ; u_o = \theta_Y = 0$$

$$\text{at } z=L ; a_{44}(u_o' + \theta_Y) = 0 \quad (19)$$

$$a_{22} \theta_Y' = 0$$

여기에서,  $a_{44}$ ,  $a_{22}$ 는 각각 CNT의 전단 및 굽힘 강성계수이며,  $b_1$ ,  $(b_5 + b_{15})$ 는 각각 CNT의 단위길이 당 질량과 극관성모멘트를 나타낸다.

### 3. 수치 해석

#### 3.1 무차원화(Dimensionless)

다음과 같이 무차원화된 파라미터를 가정한다.

$$\xi = \frac{z}{L}, \quad \bar{\eta}(\xi, T) = \frac{u_0(z, t)}{L}, \quad \bar{\theta}_Y(\xi, T) = \theta_Y(z, t),$$

$$\beta = \frac{m_f}{b_1 + m_f}, \quad \bar{u} = \sqrt{\frac{m_f L^2}{a_{22}}} U, \quad \sigma = \frac{a_{22}}{a_{44} L^2}, \quad (20)$$

$$T = \sqrt{\frac{a_{22}}{b_1 + m_f}} \frac{t}{L^2}, \quad \gamma = \left( \frac{b_5 + b_{15}}{b_1 + m_f} \right) \frac{1}{L^2}$$

여기에서,  $b_1$ 은 CNT의 단위길이 당 질량이며,  $m_f$ 는 유체의 단위길이 당 질량이다.

식(20)을 운동방정식(18) 및 경계조건(19)에 대입하면, 다음과 같은 무차원화된 식을 유도할 수 있다.

운동방정식

$$\bar{\theta}_Y' + \bar{\eta}'' = \sigma \ddot{\eta} + 2\sigma \bar{u} \beta^2 \dot{\eta}' + \sigma \bar{u}^2 \bar{\eta}''$$

$$\sigma \bar{\theta}_Y'' - \bar{\theta}_Y - \bar{\eta}' = \sigma \gamma \ddot{\theta}_Y \quad (21)$$

경계조건

$$\text{at } \xi=0 ; \bar{\eta} = \bar{\theta}_Y = 0$$

$$\text{at } \xi=1 ; \bar{\theta}_Y + \bar{\eta}' = 0, \quad \sigma \bar{\theta}_Y' = 0 \quad (22)$$

여기에서,  $(\dot{\quad}) = \frac{\partial(\quad)}{\partial T}$ ,  $(\prime) = \frac{\partial(\quad)}{\partial \xi}$  이다.

#### 3.2 고유치 문제 및 모드 형상

Extended Galerkin's method를 사용하여 위의 고유치 문제의 해를 구하기 위하여 다음과 같이 해를 가정한다.

$$\bar{\eta}(\xi, T) = \sum_{j=1}^N a_j(T) \phi_j^{(1)}(\xi) \quad (23)$$

$$\bar{\theta}_Y(\xi, T) = \sum_{j=1}^N b_j(T) \phi_j^{(2)}(\xi)$$

여기에서 외팔보인 경우, 시험함수는 내부 유동유체가 없는 경우의 한단 고정, 타단 자유의 경계 조건을 만족 시키는 TB의 고유 함수를 이용하여 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned}\phi_j^{(1)}(\xi) &= \frac{1}{\omega_j^2} (-\phi_j^{(2)}(\xi))''' \\ \phi_j^{(2)}(\xi) &= -[q_j \text{Cosh}(q_j) + \frac{q_j^3}{p_j^3} \text{Cos}(p_j)] \text{Cosh}(q_j \xi) \quad (24) \\ &+ [q_j \text{Sinh}(q_j) + p_j \text{Sin}(p_j)] \text{Sinh}(q_j \xi) \\ &+ [q_j \text{Cosh}(q_j) + \frac{q_j^3}{p_j^3} \text{Cos}(p_j)] \text{Cos}(p_j \xi) \\ &+ \frac{q_j^3}{p_j^3} [q_j \text{Sinh}(q_j) + p_j \text{Sin}(p_j)] \text{Sin}(p_j \xi)\end{aligned}$$

여기에서,  $p_j, q_j$  는 다음과 같으며,  $s_j$  는 외팔보의  $j$  번째 고유치이다.

$$\begin{aligned}p_j^2 &= \frac{1}{2} (\sigma s_j^2 + \sqrt{\sigma^2 s_j^4 + 4s_j^2}) \quad (25) \\ q_j^2 &= \frac{1}{2} (-\sigma s_j^2 + \sqrt{\sigma^2 s_j^4 + 4s_j^2})\end{aligned}$$

위 식(24)을 운동방정식(21)과 경계 조건식(22)에 대입 후  $j=1$ 부터  $N$ 까지 Extended Galerkin 적분을 행하고 행렬 형태의 식으로 정리 하면 다음과 같이 표현된다.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (26)$$

여기에서,  $\{\ddot{q}\}, \{\dot{q}\}, \{q\}$  및  $[M], [C], [K]$  는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\{\ddot{q}\} &= \begin{bmatrix} \ddot{a}_j \\ \ddot{b}_j \end{bmatrix}, \{\dot{q}\} = \begin{bmatrix} \dot{a}_j \\ \dot{b}_j \end{bmatrix}, \{q\} = \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \end{bmatrix} \\ M_{ij}^{(11)} &= \sigma \int_0^1 \phi_j^{(1)} \phi_i^{(1)} d\xi \\ M_{ij}^{(22)} &= \gamma \sigma \int_0^1 \phi_j^{(2)} \phi_i^{(2)} d\xi \\ C_{ij}^{(11)} &= 2\beta^2 \sigma \bar{u} \int_0^1 \phi_j^{(1)'} \phi_i^{(1)} d\xi \quad (27) \\ K_{ij}^{(11)} &= \sigma \bar{u}^2 \int_0^1 \phi_j^{(1)''} \phi_i^{(1)} d\xi - \int_0^1 \phi_j^{(1)''} \phi_i^{(1)'} d\xi + [\phi_j^{(1)'} \phi_i^{(1)}]_0^1 \\ K_{ij}^{(12)} &= - \int_0^1 \phi_j^{(2)'} \phi_i^{(1)} d\xi + [\phi_j^{(2)} \phi_i^{(1)}]_0^1 \\ K_{ij}^{(21)} &= \int_0^1 \phi_j^{(1)'} \phi_i^{(2)} d\xi \\ K_{ij}^{(22)} &= -\sigma \int_0^1 \phi_j^{(2)''} \phi_i^{(2)} d\xi + \int_0^1 \phi_j^{(2)} \phi_i^{(2)'} d\xi + \sigma [\phi_j^{(2)'} \phi_i^{(2)}]_0^1\end{aligned}$$

상기 식(23)을 상태 공간 방법으로 표현하면, 다음과 같다.

$$\{\dot{Z}\} = [A]\{Z\} \quad (28)$$

여기에서,  $\{Z\} = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}$ ,  $[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix}$  이다.

식(28)의 해는 고유치  $\bar{\lambda}_r$  에 의해 지배되며, 일반적으로 감쇠가 존재하는 경우 다음과 같은 복소수의 형태로 표현된다.

$$\bar{\lambda}_r = \bar{\alpha}_r \pm i\bar{\omega}_r \quad (29)$$

여기에서,  $\bar{\alpha}_r$  은 감쇠,  $\bar{\omega}_r$  은 시스템의 동적특성을 알 수 있는 고유진동수를 나타내며 각각의 고유진동수에 대한 계수벡터 값은 모드 형상을 나타낸다.

본 연구의 수치해석에 사용된 CNT 및 유체의 재료 특성은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}E &= 1 \text{ TPa}, \quad G = 0.4 \text{ TPa}, \\ \mu &= 0.25, \quad \rho_{\text{cnt}} = 2.3 \text{ g/cm}^3, \quad \rho_f = 1 \text{ g/cm}^3\end{aligned}$$

### 3.3 안정성 해석

CNT의 안정성 해석은 식(29)의 고유치  $\bar{\lambda}_r$  의 실수부인  $\bar{\alpha}_r$  의 부호에 의해 결정된다. 즉,  $\bar{\alpha}_r < 0$  이면 안정,  $\bar{\alpha}_r > 0$  이면 불안정이다. 특히,  $\bar{\alpha}_r > 0$  인 경우 중,  $\bar{\omega}_r \neq 0$  이면 플러터(flutter) 형태의 불안정,  $\bar{\omega}_r = 0$  이면 발산(divergence) 형태의 불안정이 된다.

### 3.4 무차원 상대 유속

무차원화 된 유속의 상대비교를 위해, 상대 유속을 다음과 같이 정의한다.

$$\overline{U}_{rel} = \bar{u} \bar{R} \frac{1}{\bar{L}} \quad (30)$$

여기에서,  $\bar{R} = \sqrt{\frac{m_f^*}{a_{22}^*}} / \sqrt{\frac{m_f}{a_{22}}}$ ,  $\bar{L} = \frac{L}{L^*}$  이며,  $( )^*$  는  $h = 20 \text{ nm}$ ,  $L = 800 \text{ nm}$ ,  $R_{out} = 40 \text{ nm}$  일 때의 수치이다.

## 4. 수치 해석 결과 및 고찰

내부 유동유체의 유속변화에 따른 CNT의 동적 안정성에 관한 수치해는 수렴성이 보장되는 Extended Galerkin 방법에 의한 4항 근사해에 의해 결과를 얻었으며, 이 결과는 EB 이론을 이용한 참고문헌(1)의 결과와 비교하여 그 타당성을 입증하였다.

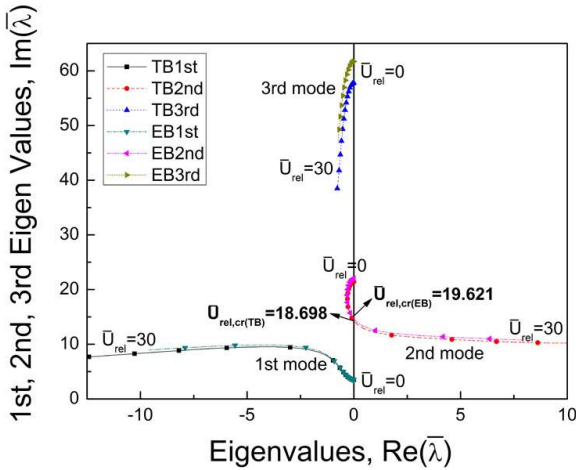
**Table. 1** Comparison of the present results of  $\overline{U}_{rel,cr}$  with Ref. (1), ( $R_{in}/R_{out} = 0.5$ ,  $R_{out} = 40 \text{ nm}$  fixed)

$\bar{L}$	$\overline{U}_{rel,cr}$			Difference (%)
	Present result		Ref.(1)	
	TB	EB	EB	
1	4.744 (2nd)	4.941 (2nd)	4.941 (2nd)	4.15 (TB vs Ref.(1)) 0 (EB vs Ref.(1))
5	0.988 (2nd)	0.988 (2nd)	0.988 (2nd)	0 (TB vs Ref.(1)) 0 (EB vs Ref.(1))

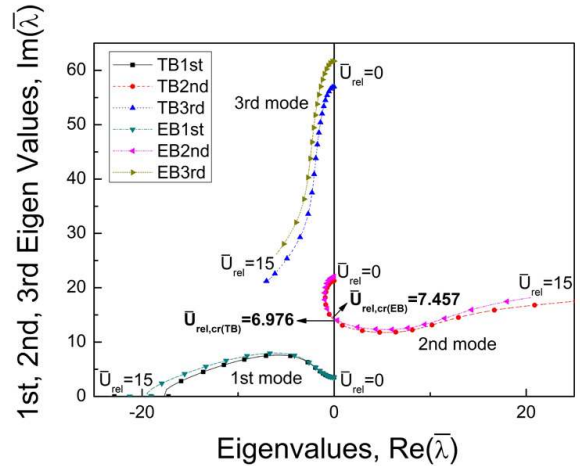
Figs. 3–7은  $R_{out}$  을  $40nm$ 로 고정하고 다양한  $R_{in}/R_{out}$  값에 대하여, 무차원 유속값이 변화 할 때, TB와 EB의 처음 저차 3개의 고유치의 실수부와 허수부 값의 변화를 나타내었다.  $R_{in}/R_{out}$  이 0.1, 0.3, 0.5에서는 2차 모드에서 임계 유속이 발생하나, 0.7, 0.9에서는 2, 3차 모드에서 임계 유속이 발생 된다. Figs. 3–7에서 보인 임계유속을 표로 정리하면 Table 2 와 같다.

**Table 2.** Variation of relative critical velocities,  $\overline{U}_{rel,cr}$  with  $R_{in}/R_{out}$  ( $\overline{L} = 1$ ,  $R_{out} = 40nm$  fixed)

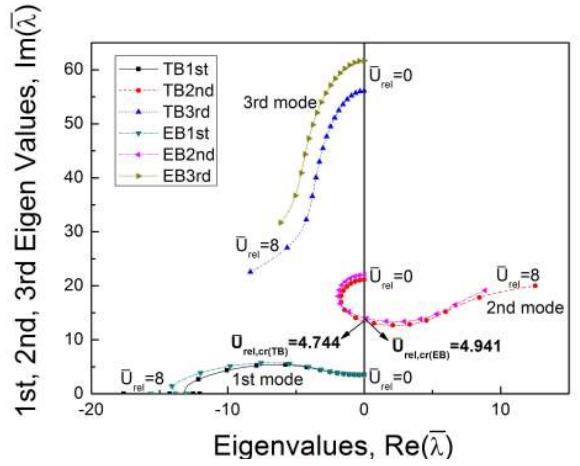
$\frac{R_{in}}{R_{out}}$	$\overline{U}_{rel,cr}$		Difference (EB/TB-1)x 100 (%)
	TB	EB	
0.1	18.698 (2nd)	19.621 (2nd)	4.94
0.3	6.976 (2nd)	7.457 (2nd)	6.90
0.5	4.744 (2nd)	4.941 (2nd)	4.15
0.7	7.533 (2nd) 5.033 (3rd)	8.842 (2nd) 5.498 (3rd)	17.38 9.24
0.9	4.601 (2nd) 3.281 (3rd)	5.905 (2nd) 3.584 (3rd)	28.34 9.23



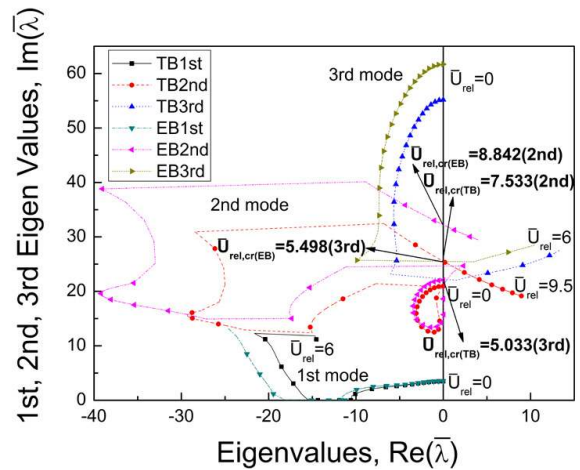
**Fig. 3** Variation of real( $Re(\overline{\lambda})$ ) and imaginary ( $Im(\overline{\lambda})$ ) parts of the non-dimensional eigenvalues with fluid velocity for both Timoshenko beam(TB) and Euler beam(EB) cases ( $\overline{L} = 1$ ,  $R_{in}/R_{out} = 0.1$ ).



**Fig. 4** The counterpart of Fig.3 for  $R_{in}/R_{out} = 0.3$ .



**Fig. 5** The counterpart of Fig.3 for  $R_{in}/R_{out} = 0.5$ .



**Fig. 6** The counterpart of Fig.3 for  $R_{in}/R_{out} = 0.7$ .

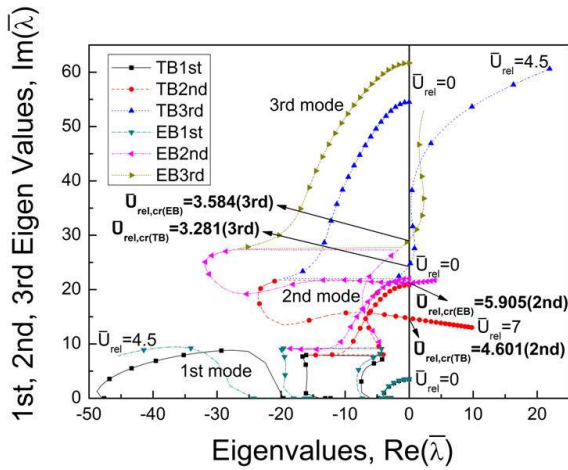


Fig. 7 The counterpart of Fig.3 for  $R_{in}/R_{out} = 0.9$ .

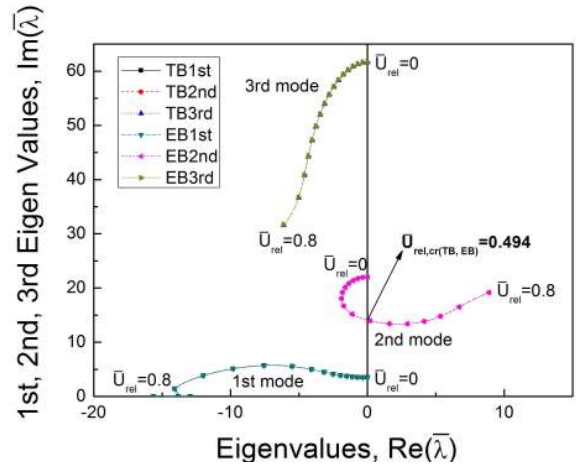


Fig. 10 The counterpart of Fig.3 for  $\bar{L} = 10$ ,  $R_{in}/R_{out} = 0.5$ .

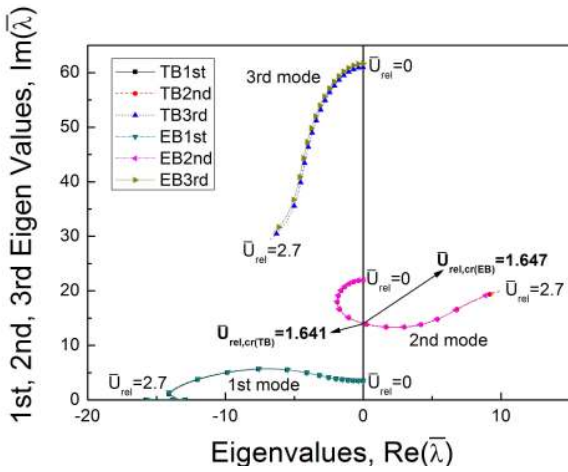


Fig. 8 The counterpart of Fig.3 for  $\bar{L} = 3$ ,  $R_{in}/R_{out} = 0.5$ .

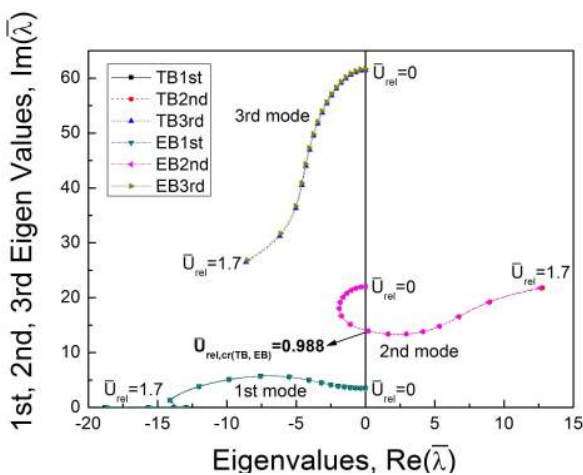


Fig. 9 The counterpart of Fig.3 for  $\bar{L} = 5$ ,  $R_{in}/R_{out} = 0.5$ .

Figs. 8-10은  $R_{in}/R_{out} = 0.5$  로 고정하고  $\bar{L}$  의 증가에 따른 TB와 EB의 처음 저차 3개의 고유치 실수, 허수부의 변화를 나타낸 그림으로, 이를 요약하면 다음 Table 3과 같다.

Table 3 Variation of relative critical velocities,  $\bar{U}_{rel,cr}$ , with  $\bar{L}$  ( $R_{in}/R_{out} = 0.5$ ,  $R_{out} = 40nm$  fixed)

$\bar{L}$	$\bar{U}_{rel,cr}$		Difference (EB/TB-1) x100 %
	TB	EB	
1	4.744 (2nd)	4.941 (2nd)	4.15
3	1.641 (2nd)	1.647 (2nd)	0.37
5	0.988 (2nd)	0.988 (2nd)	0
10	0.494 (2nd)	0.494 (2nd)	0

## 5. 결론

본 연구에 의하면, 외팔보 CNT의 유체 유발 진동에 있어서, 유체유동의 속도를 증가시켜 CNT의 안정성에 영향을 미치는 임계유속을 고찰하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 외팔보 CNT에서 유속이 임계 유속 이상으로 증가 할 때 플러터가 발생한다.
- (2) 외경/내경 비( $R_{in}/R_{out}$ )의 증가에 따라 2차 모드에서만 발생하던 임계 유속이 3차에서도 발생되었으며, EB 이론이 TB 이론 보다 임계유속을 크게 예측 (overestimates)한다는 것을 알 수 있다.
- (3) 외경/내경 비( $R_{in}/R_{out}$ )에 따른 EB 이론과 TB 이론에 기초한 임계 유속 사이의 차이의 상관관계는 발견되

지 않았다.

- (4) 길이 비( $\bar{L}$ )의 증가에 따라서 임계 유속이 점차 작아지는 경향을 보이며 이는 구조물이 점점 불안정성에 취약해짐을 뜻한다.
- (5) 길이 비( $\bar{L}$ )가 작을 수록 TB 이론에 기초한 임계 유속과 EB 이론에 기초한 임계 유속의 차이가 커지며 이와 반대로 길이 비( $\bar{L}$ )가 커질 수록이 두 이론에 기초한 임계유속의 차이가 없어져 갔다. 따라서 CNT 보의 길이가 짧은 경우, TB 이론에 기초하여 해석하는 것이 EB 이론에 기초하여 해석하는 것 보다 정확한 결과를 산출하는 것을 알 수 있다.

### 참 고 문 헌

- (1) J. Yoon, C. Q. Ru and A. Mioduchowski, 2006, "Flow-induced Flutter Instability of Cantilever Carbon Nanotubes", *International Journal of Solids and Structures* 43, pp. 3337~3349.
- (2) J. Yoon, C. Q. Ru and A. Mioduchowski, 2005, "Vibration and Instability of Carbon Nanotubes Conveying Fluid", *Composites Science and Technology* 65, pp. 1326~1336.
- (3) J. Yoon, C. Q. Ru and A. Mioduchowski, 2003, "Vibration of an embedded multiwall Carbon Nanotube", *Composites Science and Technology* 63, pp. 1533~1542.
- (4) C. M. Wang, V. B. C. Tan and Y. Y. Zhang, 2006 "Timoshenko Beam Model for Vibration Analysis of Multi-walled Carbon Nanotubes", *Journal of Sound and Vibration* 294, pp. 1060~1072.
- (5) Chunyu Li and Tsu-Wei Chou, 2003, "Elastic Moduli of Multi-walled Carbon Nanotubes and The Effect of Van der Waals Forces", *Composites Science and Technology* 63, pp. 1517~1524.
- (6) C. Y. Wang, C. Q. Ru and A. Mioduchowski, 2005 "Free Vibration of Multiwall Carbon Nanotubes", *Journal of Applied Physics* 97 114323, pp. 1~11.
- (7) Karl Sohlberg, Bobby G Sumpter, Robert E Tuzun and Donald W Noid, 1998 "Continuum Methods of Mechanics as a Simplified Approach to Structural Engineering of Nanostructures", *Nanotechnology* 9, pp. 30~36.
- (8) Michael P. Paidoussis, 1998, *Fluid-Structure Interactions : Slender Structures and Axial Flow, Volume 1*, Academic Press.
- (9) W. Weaver Jr., S. P. Timoshenko and D. H. Young, 1990, *Vibration Problems in Engineering*, John Wiley &

Sons, Inc.

- (10) 최재운, 송오섭, 2001, "유체유동에 의한 복합재료 파이프의 안정성 해석", *한국소음진동공학회 논문집*, 제11권 제8호, pp. 314~321.
- (11) 류봉조, 정승호, 이종원, 2000, "유체유동에 의한 유연한 파이프의 불안정과 진동억제에 미치는 부가질량의 영향", *한국소음진동공학회 논문집*, 제10권 제2호, pp. 280~290.
- (12) Liviu Librescu and Ohseop Song, 2006, *Thin-Walled Composite beams: Theory and Application*, Springer.